BAB II

KONSEP FUNGSI TAHAN - HIDUP

2.1 Fungsi Tahan-Hidup dan Fungsi Hazard

2.1.1 Fungsi Tahan-Hidup

Sebelumnya akan dikenalkan fungsi densitas kematian $f(t)$ sebagai fungsi probabilitas individu yang mati selama interval waktu $t < x < t + \Delta t$, tidak masalah sekecil apapun Δt. Ini juga disebut fungsi densitas probabilitas atau fungsi frekwensi dimana variabel randomnya adalah waktu. Fungsi densitas kematian, yang kadang-kadang juga disebut angka kegagalan tak bersyarat, dalam matematika ditulis :

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{pr\{t < x < t + \Delta t\}}{\Delta t}$$

Fungsi densitas kematian mempunyai sifat seperti berikut:

$$f(t) \geq 0, \qquad \text{untuk semua } t$$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$$

kemudian, karena waktu tahan-hidup hanya diukur harga positif dari t saja, maka

$$f(t) = 0\ , \qquad \text{untuk } t < 0;$$

Oleh karenanya ,

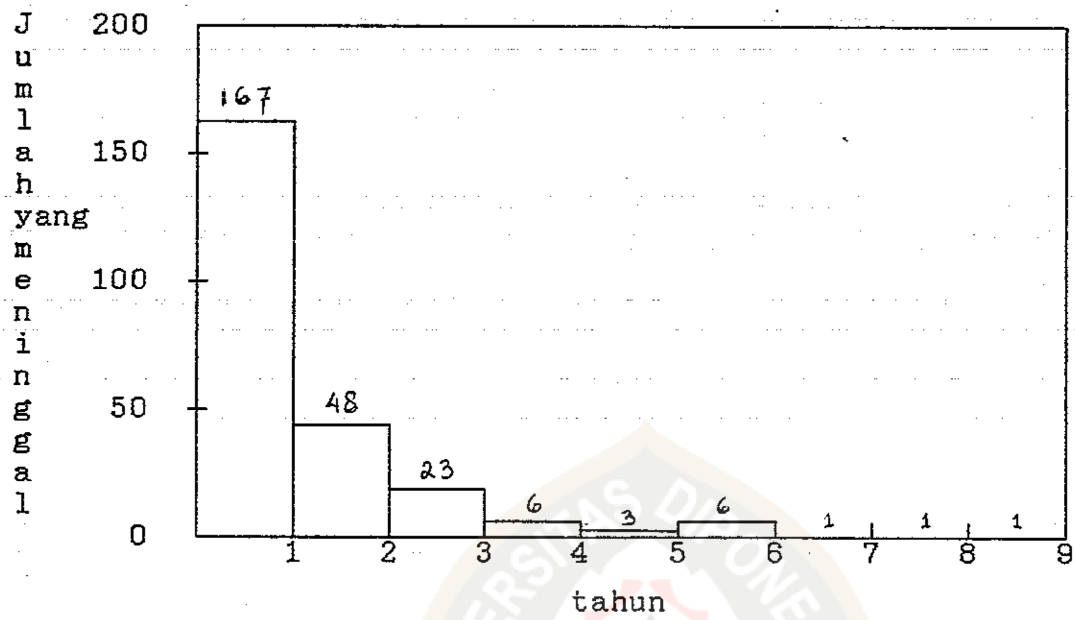
$$\int_{0}^{\infty} f(t)\, dt = 1$$

Sebagai contoh, kita ambil laporan dari Mac Donald (1963) dengan lamanya tahan hidup dari 256 laki-laki dengan gangguan melanoma yang telah metastesis pada penerimaan oleh klinik tumor M.D Anderson. Waktu penerimaan 1944 sampai dengan 1960. Tabel 1.1 menggambarkan bagian tahan-hidup dari pasien-pasien ini. Dengan menggunakan data dari pasien, maka tidaklah sulit untuk mencari waktu tahan-hidupnya.

Tabel 1.1 Klinik tumor oleh M.D Anderson

Waktu tahan-hidup (tahun)	Jumlah pasien yang tahan -hidup pada permulaan interval	Jumlah pasien yang meninggal dalam interval
0 - 1	256	167
1 - 2	89	48
2 - 3	41	23
3 - 4	18	6
4 - 5	12	3
5 - 6	9	6
6 - 7	3	1
7 - 8	2	1
8 - 9	1	1
9 +	0	0

Waktu bagi individu yang meninggal merupakan variabel random yang mempunyai distribusi frekwensi. Gambar 1.1 di bawah ini adalah histogram dari jumlah kematian dalam masing-masing interval untuk data dalam contoh di atas.



Gambar 1.1 Histogram dari jumlah gangguan melanoma dengan tahun-tahun setelah penerimaan klinik M.D Anderson (data dari contoh)

Gambar 1.2 menunjukkan tipe fungsi densitas kematian. Dalam gambar 1.3 dengan data dari contoh gangguan melanoma dibuat grafik sebagai poligon frekwensi dengan menghubungkan titik tengah dari histogram dalam gambar 1.1 Kemudian diperoleh :

$$f(0,5) = \frac{167}{256} = 0,652$$

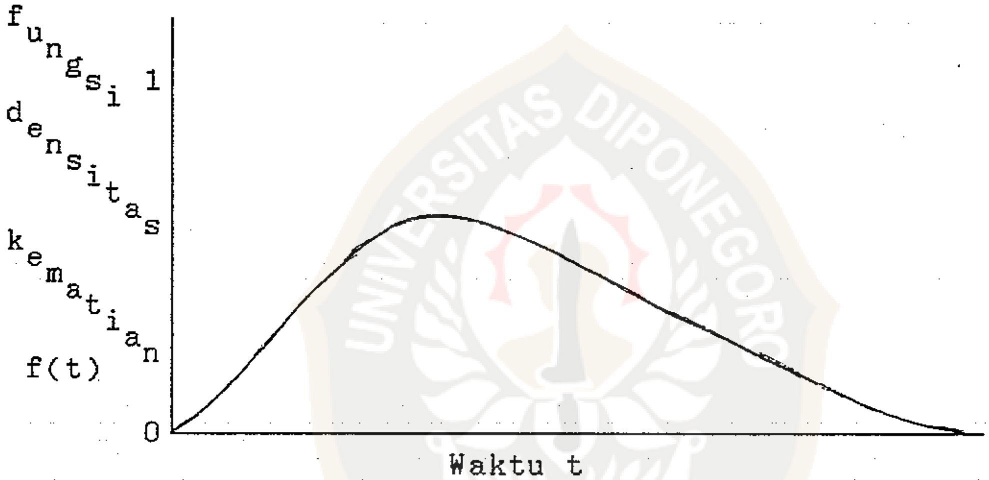
$$f(1,5) = \frac{48}{256} = 0,188$$

$$f(2,5) = \frac{23}{256} = 0,089$$

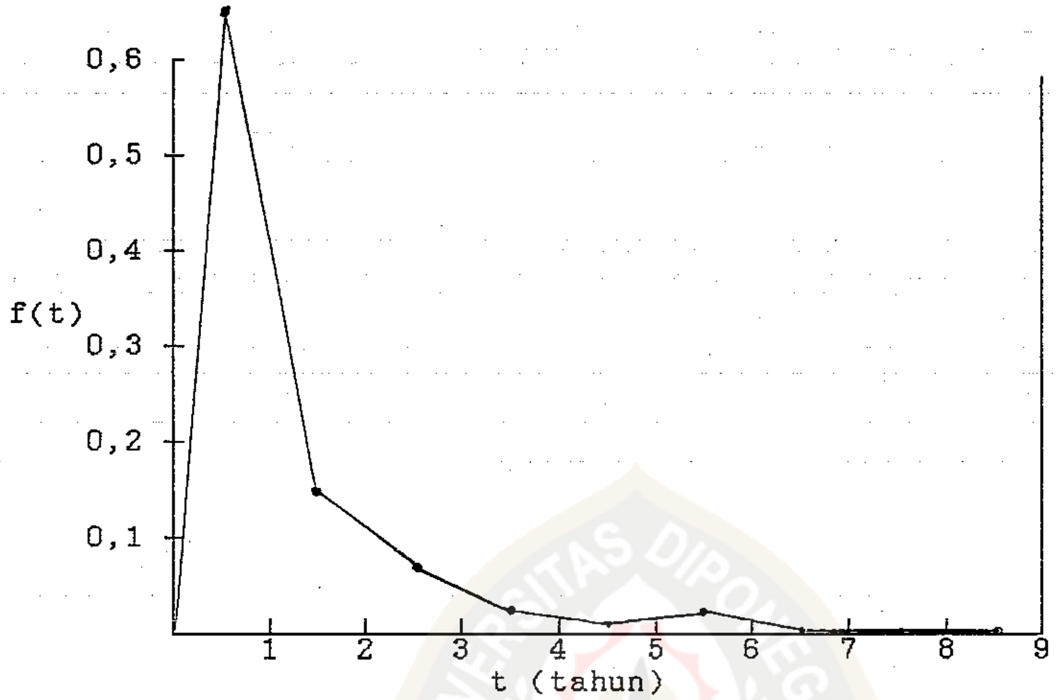
$$f(3,5) = \frac{6}{256} = 0,023$$

$$f(4,5) = \frac{3}{256} = 0,012$$

$$f(5,5) = \frac{6}{256} = 0,023$$



Gambar 1.2 Tipe kurva densitas f(t) sebagai fungsi dari t (data dari contoh)



Gambar 1.3 Poligon frekwensi untuk para pasien dengan gangguan melanoma

$$f(6,5) = \frac{1}{256} = 0{,}004$$

$$f(7,5) = \frac{1}{256} = 0{,}004$$

$$f(8,5) = \frac{1}{256} = 0{,}004$$

Fungsi tahan-hidup S(t) adalah fungsi probabilitas individu yang mempunyai tahan-hidup pada waktu t dimana $t > 0$. Yaitu, jika T adalah variabel random yang mewakili waktu tahan-hidup dari individu, serta merupakan waktu tetap dari t ($t > 0$). Dalam statistika fungsi distribusi kumulatif F(t) didefinisikan sebagai :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(T)\, dT$$

kemudian

$$S(t) = 1 - F(t)$$

$$= \int_t^{\infty} f(T)\, dT$$

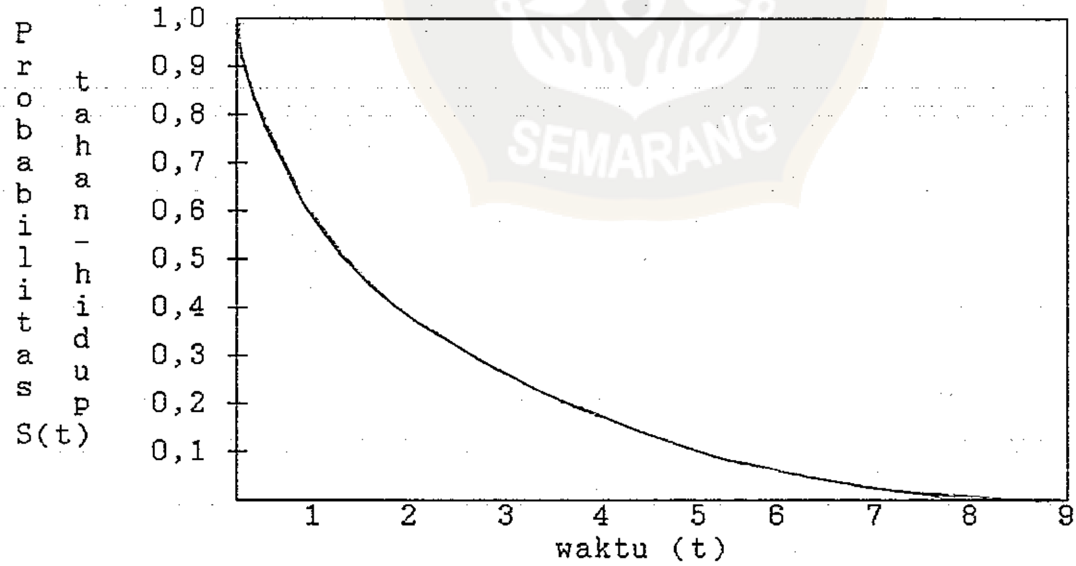
$$= pr\ \{\ t \leq T\ \} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Kita catat probabilitas individu yang tahan-hidup pada waktu t dari probabilitas yang mati sebelum waktu t. Ambil F(t) yang dideferensialkan dalam t,t ≥ 0, dan fungsi densitas kematian diberikan sebagai berikut :

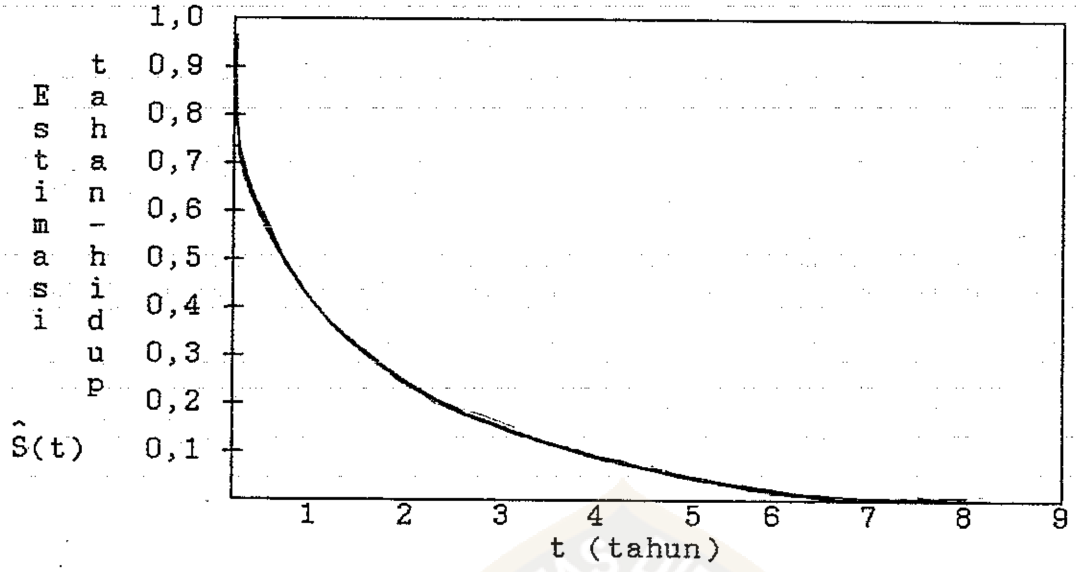
$$f(t) = \lim_{\Delta t \to o} \left[\frac{\text{prob individu yang mati dalam } (t,t+\Delta t)}{\Delta t} \right]$$

$$= F'(t)$$

$$= -S'(t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$



Gambar 1.4 Tipe kurva tahan-hidup S(t) sebagai fungsi dari t.



Gambar 1.5 Estimasi distribusi tahan-hidup $\hat{S}(t)$ untuk para pasien dengan gangguan melanoma (menggunakan data dari contoh)

Gambar 1.4 menunjukkan tipe teoritis kurva tahan-hidup. Gambar 1.5 memberi estimasi distribusi tahan-hidup $\hat{S}(t)$ untuk 256 pasien dengan gangguan melanoma dari data dalam contoh. Jelas bahwa $\hat{S}(0) = 1$, pada t = 0 karena semua pasien (yaitu 256 pasien) masih hidup. Setelah 1 tahun dari lamanya penyakit tersebut, 89 pasien masih hidup. Lalu probabilitas yang diberikan pasien tahan-hidup kurang dari1 tahun ditaksir dari tabel 1.1, $\hat{S}(1) = 89/256 = 0,347$. Setelah 2 tahun dari penyakitnya, 41 pasien masih hidup. Estimasi probabilitas yang diberikan pasien tahan-hidup kurang dari 2 tahun adalah $\hat{S}(2) = 41/256 = 0,160$. Demikian pula selanjutnya :

$$\hat{S}(3) = \frac{18}{256} = 0,070$$

$$\hat{S}(4) = \frac{12}{256} = 0,047$$

$$\hat{S}(5) = \frac{9}{256} = 0,035$$

$$\hat{S}(6) = \frac{3}{256} = 0{,}012$$

$$\hat{S}(7) = \frac{2}{256} = 0{,}008$$

$$\hat{S}(8) = \frac{1}{256} = 0{,}004$$

$$\hat{S}(9) = \frac{0}{256} = 0$$

Titik-titik ini ditunjukkan dalam gambar 1.5. Perhatikan bahwa grafiknya menurun, baik untuk S(t) dalam gambar 1.4 maupun $\hat{S}(t)$ dalam gambar 1.5. Selanjutnya, dari definisi $\hat{S}(t)$ bahwa S(0) = 1, S(t) fungsi yang menurun dari t, dan $S(\infty) = 0$.

2.1.2 Fungsi Hazard

Fungsi hazard $\lambda(t)$ adalah fungsi probabilitas individu yang mati dalam interval waktu $t < x < t+\Delta t$. Fungsi hazard juga disebut angka kegagalan, atau angka kematian yang didefinisikan secara matematika sebagai berikut :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to o} \left[\frac{pr\ \{t < x < t+\Delta t \mid x > t\}}{\Delta t} \right] \qquad (3)$$

Kita nyatakan $\lambda(x|t)$ sebagai fungsi densitas kematian bersyarat untuk individu yang mati pada waktu $x > t$, untuk harga tetap dari t. Karena $\lambda(x|t)$ adalah fungsi densitas kematian, maka

$$\int_t^\infty \lambda(x|t)\, dx = 1 \qquad \ldots.\ (4)$$

Selanjutnya, karena $\lambda(x|t)$ adalah fungsi densitas kematian, maka ini dihubungkan dengan fungsi densitas kematian tak bersyarat sebagai berikut :

$$\lambda(x|t) = k(t)\ f(t), \qquad x \geq t$$
$$= o \qquad , \qquad x < t$$

dimana k(t) adalah konstan dan tergantung pada t. Melalui persamaan (4) kemudian memberikan $k(t) = 1/S(t)$.

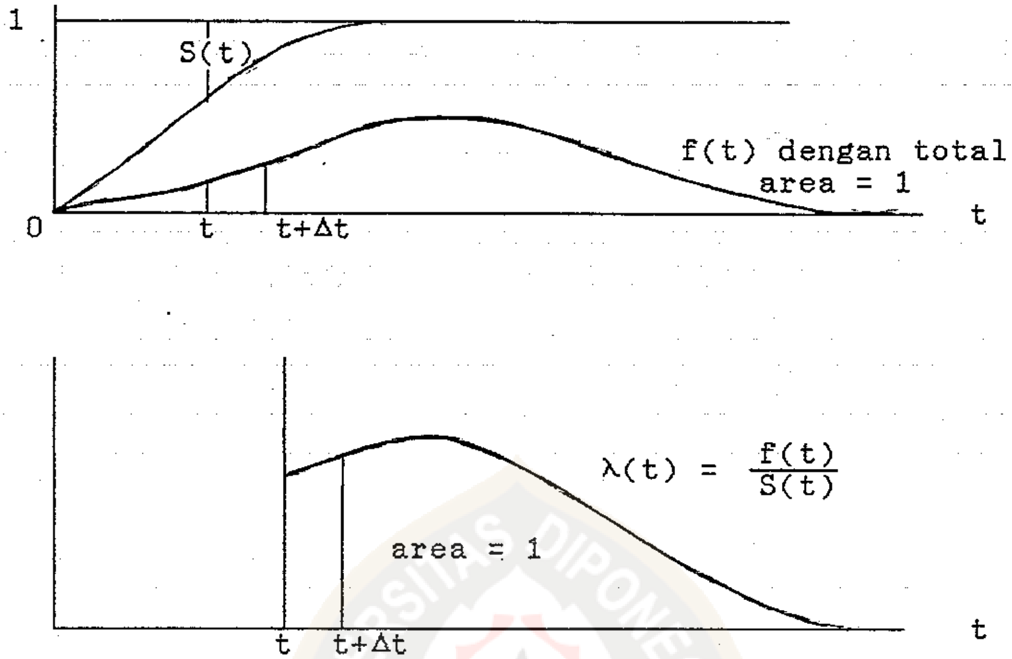
Perhatikan bahwa :

$$\frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} \lambda(x|t)\ dx = \frac{S(t)}{S(t)} = 1$$

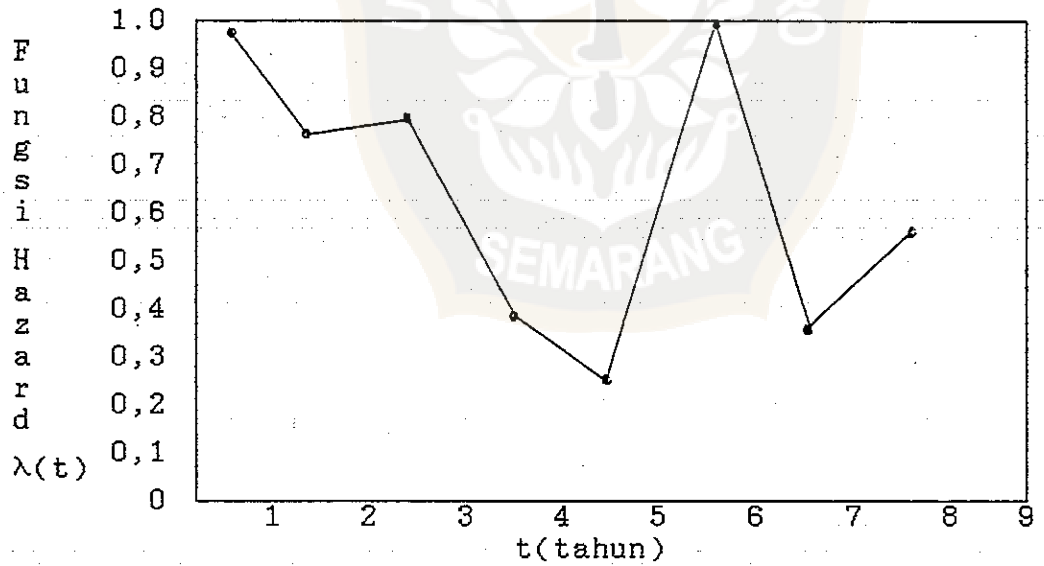
Kita amati bahwa $\lambda(t)$ yang merupakan angka kegagalan bersyarat pada waktu t adalah sama dengan $\lambda(t|t)$, sehingga dari hal ini dapat ditulis bahwa :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Secara grafik, kita peroleh f(t) dengan area total 1 dan juga $\lambda(t)$ dengan area total 1 yang ditunjukkan dalam gambar 1.6 di bawah ini



Gambar 1.6 Ilustrasi dari f(t), S(t), dan λ(t).



Gambar 1.7 Fungsi hazard λ(t) untuk pasien dengan gangguan melanoma (data dari contoh)

Gambar 1.7 menunjukkan fungsi hazard untuk pasien dengan gangguan melanoma dalam contoh diatas. Untuk menaksir λ(t) dari data dalam contoh, kita gunakan estimator aktuaria yang akan sedikit dibicarakan dalam bab III, dimana jumlah kematian per unit waktu dalam interval dibagi dengan jumlah rata-rata tahan- hidup pada titik tengah interval. Lalu rata- rata estimasi fungsi hazard selama tahun per- tama adalah $\hat{\lambda}(0,5)$ = 167/(256 - 167/2) = 0,968. Selanjutnya dengan cara yang sama diperoleh :

$$\hat{\lambda}(1,5) = \frac{48}{(89 - 48/2)} = 0,738$$

$$\hat{\lambda}(2,5) = \frac{23}{(41 - 23/2)} = 0,779$$

$$\hat{\lambda}(3,5) = \frac{6}{(18 - 6/2)} = 0,400$$

$$\hat{\lambda}(4,5) = \frac{3}{(12 - 3/2)} = 0,286$$

$$\hat{\lambda}(5,5) = \frac{6}{(9 - 6/2)} = 1,000$$

$$\hat{\lambda}(6,5) = \frac{1}{(3 - 1/2)} = 0,400$$

$$\hat{\lambda}(7,5) = \frac{1}{(2 - 1/2)} = 0,667$$

$$\hat{\lambda}(8,5) = \frac{1}{(1 - 1/2)} = 2,000$$

Estimasi $\lambda(t)$ adalah jumlah kematian per unit dalam interval dibagi dengan jumlah tahan-hidup pada permulaan interval. Kemudian $\hat{\lambda}(1)$ = 167/256 = 0,652 adalah estimasi fungsi hazard pada akhir dari tahun pertama, $\hat{\lambda}(2)$ = 48/89 = 0,539 adalah estimasi fungsi hazard pada akhir tahun kedua. Dengan cara sama maka

$$\hat{\lambda}(3) = \frac{23}{41} = 0,561$$

$$\hat{\lambda}(4) = \frac{6}{18} = 0,333$$

$$\hat{\lambda}(5) = \frac{3}{12} = 0,250$$

$$\hat{\lambda}(6) = \frac{6}{9} = 0,667$$

$$\hat{\lambda}(7) = \frac{1}{3} = 0,333$$

$$\hat{\lambda}(8) = \frac{1}{2} = 0,500$$

$$\hat{\lambda}(9) = \frac{1}{1} = 1,000$$

Untuk menggambarkan hubungan antara f(t), S(t) dan $\lambda(t)$, gunakan persamaan (2), sebagai berikut :

$$\lambda(t) = - \frac{S'(t)}{S(t)}$$

$$= - \frac{d \log S(t)}{dt}$$

Sehingga

$$S(t) = \exp\left[- \int_{o}^{t} \lambda(u)\, du \right]$$

Kita mempunyai tiga rumus yang menghubungkan $\lambda(t)$, f(t), dan S(t) yaitu :

(i) $f(t) = - S'(t)$

(ii) $\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$

(iii) $S(t) = \exp\left[- \int \lambda(u)\, du \right]$

2.2 Sensor Dalam Pengamatan

Sensor timbul dalam berbagai cara. Sebuah pengamatan sensor hanya memuat sebagian informasi tentang variabel random yang dikehendaki. Ambil t_c sebagai waktu sensor tertentu. Misal $T_1, \ldots, T_n$ adalah variabel random yang secara independent didistribusikan identik masing-masing dengan distribusi fungsi F.

2.2.1 Sensor Tipe I

Ambil t_c waktu sensor tetap pada pengamatan $T_1, \ldots, T_n$ (variabel random yang dikehendaki) dengan mengamati $Y_1 \ldots, Y_n$ dimana

$$Y_i = \begin{cases} T_i & \text{jika } T_i \le t_c \\ t_c & \text{jika } t_c < T_i \end{cases}$$

Perhatikan bahwa fungsi distribusi dari Y mempunyai kumpulan (mass) positif $P\{T > t_c\} > 0$ pada $y = t_c$.

2.2.2 Sensor Tipe II

Ambil $r < n$ tetap, dan misalkan $T_{(1)} < T_{(2)} < \ldots < T_{(n)}$ adalah order statistik dari $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Pengamatan berhenti setelah kegagalan ke-r sehingga dapat diamati $T_{(1)}, T_{(2)}, \ldots T_{(r)}$.

Urutan pengamatan sampelnya adalah sebagai berikut :

$Y_{(1)} = T_{(1)}, \ldots, Y_{(r)} = T_{(r)}, Y_{(r+1)} = T_{(r)}, Y_{(n)} = T_{(r)}$. Terlihat bahwa untuk $r<n$ diperoleh pengamatan individu Y sampai ke-n adalah sama dengan pengamatan individu T sampai ke-r.

2.2.3 Sensor Random

Dalam banyak pengamatan, waktu sensor merupakan random yang sering berhasil digunakan. Sebagai contoh, dalam pengamatan medis para pasien dapat dimasukkan studi dalam random yang waktu mereka disusun dari diagnosis. Jika studi diselesaikan pada beberapa tanggal sebelum disusun, lalu ada waktu tersensor, dimana lama dari waktu individu masuk pada studi sampai akhir studi itulah yang merupakan ramdom.

Misal C_1, C_2, ... , C_n adalah variabel random independent yang didistribusikan identik dengan masing-masing distribusi fungsi G. C_i adalah waktu sensor yang dikawankan dengan T_i. Kita dapat mengamati (Y_1, δ_1), ... , (Y_n, δ_n) dimana

$$Y_i = \min (T_i, C_i) = T_i \wedge C_i \qquad \text{dan}$$

$$\delta_i = I\,(T_i \le C_i) = \begin{cases} 1 & \text{jika } T_i \le C_i,\ T_i \text{ tak tersensor} \\ 0 & \text{jika } T_i > C_i,\ T_i \text{ tersensor} \end{cases}$$

Perhatikan bahwa Y_1, ... , Y_n variabel random independent yang didistribusikan secara identik dengan fungsi distribusi H. δ_i, ... , δ_n memuat informasi sensor.

Sensor random timbul dalam aplikasi medis dengan studi hewan atau percobaan klinik. Misal dalam percobaan klinik, para pasien dapat dimasukkan studi untuk waktu yang berbeda; lalu masing-masing pasien dicoba dengan salah satu dari beberapa terapi yang mungkin. Akan kita amati kehidupan mereka. Selama terapi itu, akan terjadi sensor dalam salah satu bentuk berikut ini :

1. **Loss to follow-up**

(Hilang untuk diikuti lebih lanjut)

Di sini pasien telah hilang dan memutuskan sendiri untuk tidak mengikuti terapi lagi, sehingga kita tidak pernah melihatnya lagi. Misal, kemungkinan seorang pasien yang pindah, menolak untuk ikut lagi atau karena suatu sebab lain yang tidak mungkin dilacak sehingga titik akhirnya tidak diketahui.

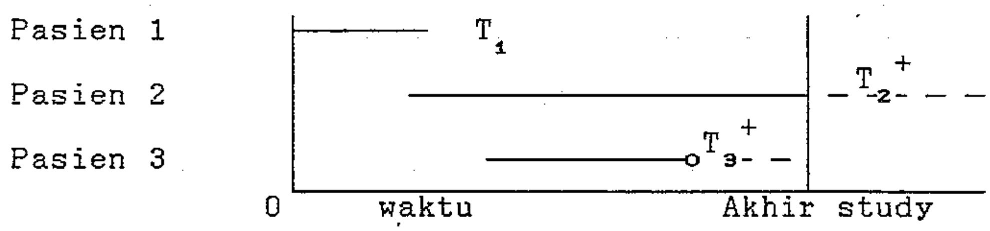
2. **Drop-out**

Terapi mempunyai beberapa akibat sampingan buruk, sehingga diperlukan suatu treatment diskontinu (diamati sewaktu-waktu). Atau pasien tersebut masih dalam kontak (belum keluar) tetapi dia menolak untuk pemberian treatment kontinu.

3. **Termination of the study**

Sensor terjadi karena berakhirnya studi yang telah ditetapkan waktunya.

Lebih jelasnya kita tunjukkan ilustrasi berikut dari sebuah pengamatan untuk 3 pasien dengan kondisi yang berbeda-beda



Di sini, pasien 1 dimasukkan studi pada t = 0 dan kematian terjadi pada T_1 memberi pengamatan tak tersensor.

Pasien 2 dimasukkan dalam studi dan pada akhir studi dia masih hidup untuk melanjutkan pengamatan, dan tersensor pada T_2^+.

Dan pasien 3 juga dimasukkan dalam studi kemudian hilang yang diikuti lebih lanjut sebelum akhir studi yang memberi pengamatan T_3^+.

Dengan sensor random dapat dibuat asumsi penting berikut ini :

Asumsi : T_i dan C_i adalah independent.

Terlihat kebenaran dengan random yang memasukkan studi dan dengan random menjadikan hilang yang diikuti lebih lanjut. Walau demikian, jika alasan pada droup-out dihubungkan pada terapi tertentu mungkin ada ketergantungan yang baik diantara T_i dan C_i.

2.2.4 Sensor Yang Lain

Tipe sensor yang lain adalah sensor kanan dan sensor kiri. Untuk sensor kanan, jika variabel random yang diingini terlalu besar, kita tidak dapat mengambil pengamatan ini secara lengkap. Untuk sensor kiri, misalnya kita amati :

$$(Y_1,\varepsilon_1), \; \ldots \; , (Y_n, \; \varepsilon_n)$$

dimana

$$Y_i = \max\,(T_i,C_i)$$

$$\varepsilon_i = I\;(C_i \leq \; T_i)$$

Sebagai contoh kita ambil penelitian seorang ahli psikiater yang bernama Stanfort mengamati anak-anak

Afrika. Di sini, baik sensor kanan maupun sensor kiri ada. Stanfort ingin mengetahui umur kelompok tertentu dari anak-anak Afrika yang dipelajarinya untuk menjalankan tugas penting. Ketika dia tiba di desa itu, ada beberapa anak yang telah siap mengetahui bagaimana menjalankan tugas itu. Jadi anak-anak ini digolongkan pada pengamatan sensor kiri. Beberapa anak yang mempelajari tugas itu memerlukan waktu yang lama, kemudian umur mereka dicatat. Ketika dia meninggalkan tempat itu, disana tinggal beberapa anak yang belum mempelajari tugas itu, mereka ini digolongkan pada pengamatan sensor kanan.

Baik sensor kanan maupun sensor kiri adalah hal khusus dalam interval yang tersensor, dimana kita tidak dapat mengambil variabel random yang diingini jatuh dalam sebuah interval. Jika T_i sensor random kanan, kita amati bahwa T_i jatuh dalam interval (C_i,∞). Dan jika T_i sensor random kiri, kita amati bahwa T_i jatuh dalam interval $(-\infty,C_i)$.

Dalam penulisan jumlah bilangan, penulisan T_i sebagai pengamatan tak tersensor dan T_i^+ untuk pengamatan tersensor. Misal ambil data sebagai berikut :

5, 11+, 6,5, 14+

Maka untuk waktu = 5 dan 6,5 adalah tak tersensor serta 11 dan 14 yang tersensor.

2.3 Estimator Likelihood Maximum

Estimasi yang digunakan untuk menaksir fungsi tahan-hidup berhubungan dengan likelihood maximum. Sebelum akan diberikan beberapa definisi dari Estimator likelihood maximum.

Fungsi likelihood

$$L(W) = \prod_{i=1}^{m} f_i\ (x_i;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_m),(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_m) \in W$$

dan

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{m} f_i\ (x_i;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_m),\ (\theta_1,\ \ldots,\ \theta_m) \in \Omega$$

$\Omega = \{\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_m\}$ adalah ruang parameter dan $W \subset \Omega$.

Definisi :

Estimator dari suatu parameter didefinisikan sebagai titik yang digunakan untuk mengestimasi suatu parameter.

Definisi :

Misal u $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ adalah fungsi dari x_1, $x_2,\ \ldots,\ x_n$ sedemikian sehingga fungsi Likelihood $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ ;\ \theta_1, \theta_2, \ldots,\ \theta_n)$ terkecil dari maximum $L\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ untuk setiap θ. Maka statistik u $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ didefinisikan sebagai suatu likelihood maximum dengan lambang :

$$\hat{\theta} = u\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

Sekarang, kita anggap model sebagai sensor random. Ambil $C_i = t_c$, pasangan (y_i, δ_i) mempunyai likelihood :

$$L(y_i,\delta_i) = \begin{cases} f(y_i) & \text{jika } \delta_i = 1 \text{ (tak tersensor)} \\ S(y_i) & \text{jika } \delta_i = 0 \text{ (tersensor)} \end{cases}$$

$$= f(y_i)^{\delta_i} \; S(y_i)^{1 - \delta_i}$$

Likelihood dari seluruh sampel adalah :

$$L = L(y_i, \; \ldots \; , y_n \; ; \; \delta_i, \; \ldots \; \delta_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} L(y_i,\delta_i)$$

$$= \left[\prod_u f(y_i) \right] \left[\prod_c S(y_i) \right]$$

dimana $\prod_u$ ($\prod_c$) menyatakan multiganda pada pengamatan tak tersensor dan tersensor.

Kemudian, likelihood lengkap dibawah sensor random :

$$L(y_i,\delta_i) = \begin{cases} f(y_i)\,(1 - G(y_i)) & \text{jika } \delta_i = 1 \\ g(y_i)\; S(y_i) & \text{jika } \delta_i = 0 \end{cases}$$

$$L = \left[\prod_u f(y_i) \right] \left[\prod_c S(y_i) \right] \left[\prod_c g(y_i) \right] \left[\prod_u (1 - G(y_i) \right]$$

Tetapi asumsi ini tidak menghubungkan waktu sensor dengan waktu tahan-hidup, dua pergandaan sebelumnya yaitu $\prod_c g(y_i)$ dan $\prod_u (1 - G(y_i))$ tidak melibatkan parameter waktu hidup yang tak dikenal. Jadi dua pergandaan ini dapat dijadikan konstan bila memaximalkan L.

2.4 Metode Delta

Metode delta banyak digunakan disini, yaitu untuk mencari harga pendekatan dari var(X/Y) atau var(XY). Setelah itu dapat dihitung harga pendekatan standart errornya.

a. Metode Delta untuk Kasus Univariat

Misal variabel random Y mempunyai mean μ dan varians σ^2 yang dinyatakan dengan $Y \sim (\mu,\sigma^2)$ dan misalkan kita menginginkan distribusi dari fungsi g(Y). Maka perluasan dari g(Y) yang berhubungan dengan μ :

$$g(Y) \approx (g(\mu) + (Y - \mu)\, g'(\mu) + \ldots$$

dengan mengambil

$$g(Y) \approx (g(\mu)\ ,\ \sigma^2(g'(\mu)^2)$$

dan jika

Y berdistribusi dengan asimtotik pada $N\ (\mu,\ \sigma^2)$

maka

g(Y) berdistribusi dengan asimtotik pada

$$N\ (g(\mu),\ \sigma^2(g'(\mu)^2)$$

dan

$$\text{var}\ (g(Y)) = \left[\, g'\ (\mu)\, \right]^2 \text{var}\ (Y)$$

b. Metode Delta untuk kasus Multivariat

Misal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}^2 , \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ & \sigma_y^2 \end{pmatrix}\right)$$

Maka distribusi dari g(X,Y) adalah :

$$g(X,Y) = g\ (\mu_x,\ \mu_y) + (X - \mu_x)\ \frac{\partial}{\partial x}\ g\ (\mu_x,\ \mu_y) +$$

$$(Y - \mu_y)\ \frac{\partial}{\partial y}\ g(\mu_x,\ \mu_y) + \ldots$$

jadi

$$g(X,Y) = \left[g(\mu_x,\ \mu_y),\ \sigma_x^2 \left[\frac{\partial g}{\partial x} \right]^2 + 2\ \sigma_{xy}\ \frac{\partial g}{\partial x}\ \frac{\partial g}{\partial y} \right.$$

$$\left. + \left[\sigma_y^2\ \ \frac{\partial g}{\partial y} \right]^2 \right]$$

Jika (X,Y) berdistribusi dengan asimtotik normal, maka g(X,Y) berdistribusi dengan asimtotik normal.