BAB II
TEORI PENUNJANG

2.1 PENGERTIAN DASAR GRAPH

Graph merupakan himpunan sejumlah simpul(vertek) dan garis(ruas). Graph G dinyatakan dengan G=(V,E) dimana V adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan ruas yang merupakan himpunan bagian dari pasangan unsur-unsur dari V.

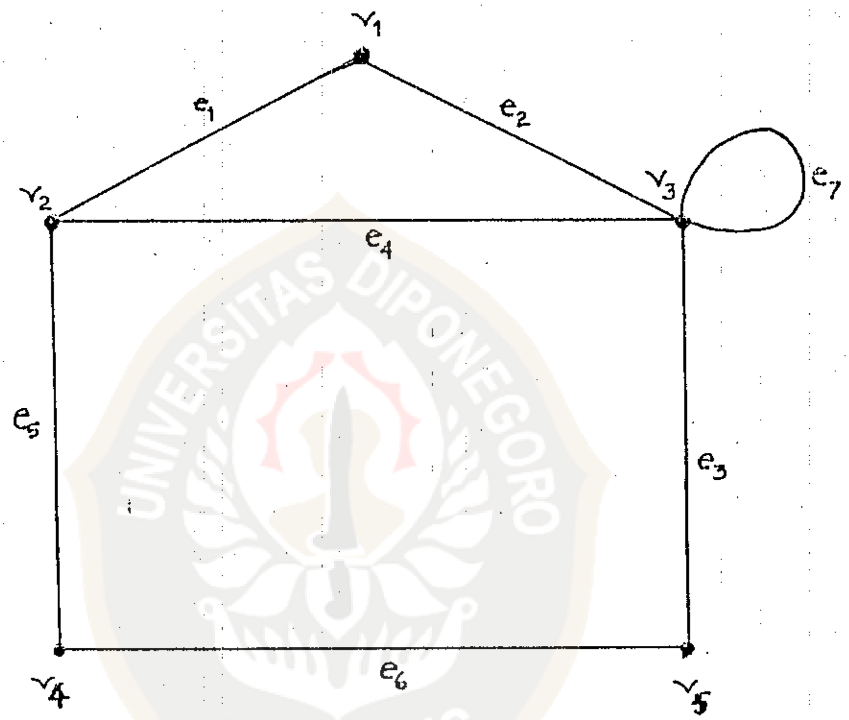
Simpul dari graph di gambarkan sebagai suatu titik pada bidang datar, sedangkan setiap ruas pada graph di gambarkan sebagai garis yang menghubungkan dua simpul pada graph tersebut. Urutan simpul pada ruas, biasanya mempunyai arti. Misalnya dalam graph berarah suatu ruas (v_1,v_2) mempunyi arti yang berbeda dengan sisi (v_2,v_1). Pada graph tak berarah ruas (v_1,v_2) dianggap sama dengan ruas (v_2,v_1). Disini yang di bahas adalah graph yang tidak berarah.

Pada graph, suatu simpul $v_1 \in V$ di katakan adjacent dengan simpul $v_2 \in V$, bila ada $e \in (v_1,v_2) \in E$ atau dengan kata lain, v_1 disebut adjacent dengan v_2, bila ada ruas yang menghubungkan v_1 dan v_2 dalam E.
Untuk memudahkan pengertian graph, diambil contoh suatu graph G=(V,E) dengan himpunan simpul $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan himpunan pasangan simpul E= { (v_2,v_1) , (v_1,v_3) ,

(v_3,v_4) , (v_2,v_3) , (v_2,v_5) , (v_5,v_4) , (v_3,v_3) } atau

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$

Graph tersebut bila di gambarkan secara geometris misalnya sebagai berikut :



Gambar(2.1) : Graph dengan 5 simpul dan 7 ruas.

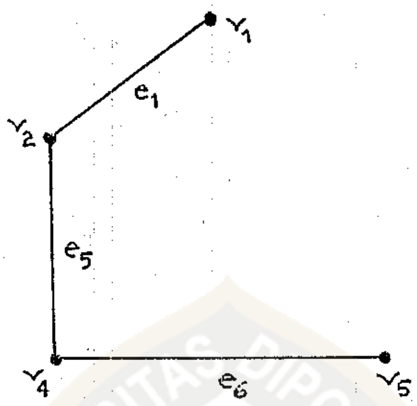
Ada juga ruas suatu graph yang bertemu pada simpul yang sama, yang dapat di tulis sebagai $e=(a,a)$ yang disebut *Loop*. Sebagai contohnya dapat dilihat pada gambar(2.1), yaitu $e_7=(v_3,v_3)$ merupakan *Loop*.

Sedangkan suatu *Trail* adalah barisan simpul dan ruas secara bergantian $v_1,e_1,v_2,e_2,\ldots,e_{n-1},v_n$ dengan ruas e_i menghubungkan simpul v_i dan v_{i+1}. Dalam hal ini semua ruas dalam barisan adalah berbeda .

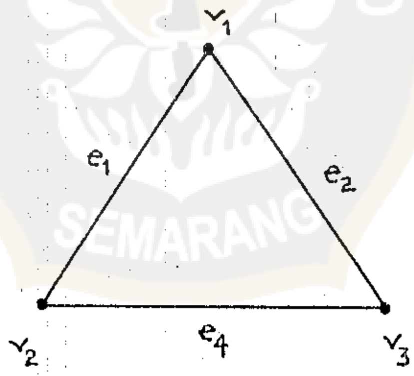
Contoh :

Pada gambar(2.1) suatu *trail* adalah :

1. *Trail terbuka* , misalnya : $v_1, e_1, v_2, e_5, v_4, e_6, v_5$

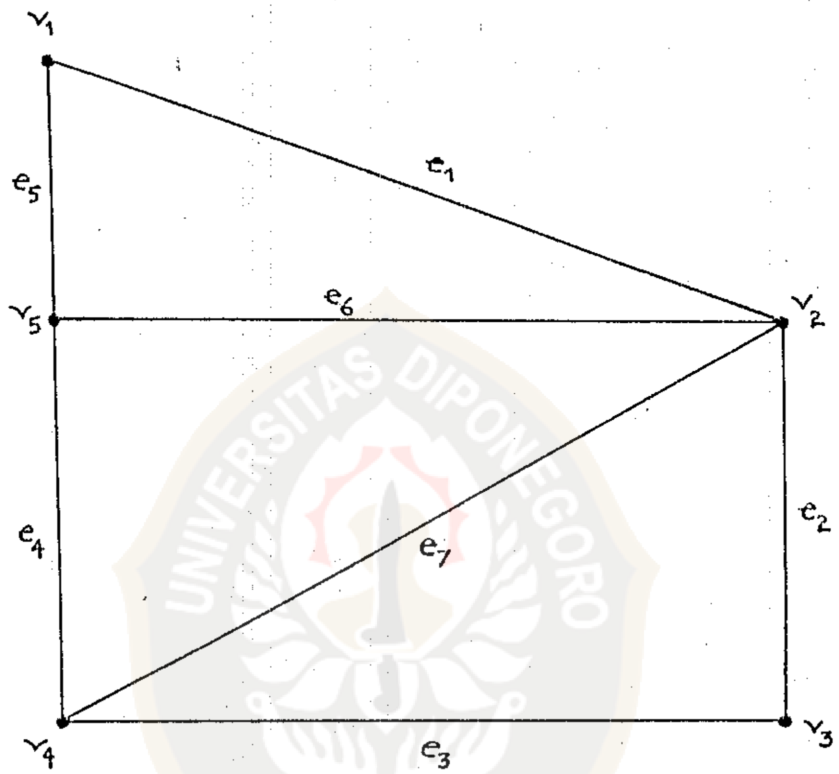


2. *Trail tertutup* misalnya : $v_1, e_1, v_2, e_4, v_3, e_2, v_1$



Pengertian dari *Subgraph* yaitu, jika diberikan graph $G=(V,E)$. $G_1(V_1,E_1)$ disebut *Subgraph* dari G jika V_1 subset dari V dan E_1 subset dari E.

Kemudian suatu *Sirkuit* adalah suatu trail tertutup dengan derajat setiap simpulnya sebanyak dua. Banyaknya ruas yang membangun *sirkuit* tersebut disebut *panjang sirkuit*.



gambar(2.2)

Pada gambar(2.2) himpunan C = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ adalah *sirkuit* dari graph diatas dan *panjang sirkuit* tersebut adalah 5 (lima).

Sedangkan pengertian *Chord* dari suatu sirkuit C dalam graph G adalah ruas dari G yang tidak berada dalam C tetapi menghubungkan dua simpul dalam C.

Pada gambar(2.2), ruas e_6 dan ruas e_7 adalah *Chord* dari sirkuit C diatas.

2.2 PENGERTIAN SIMPUL COVER DAN HIMPUNAN BEBAS DALAM GRAPH

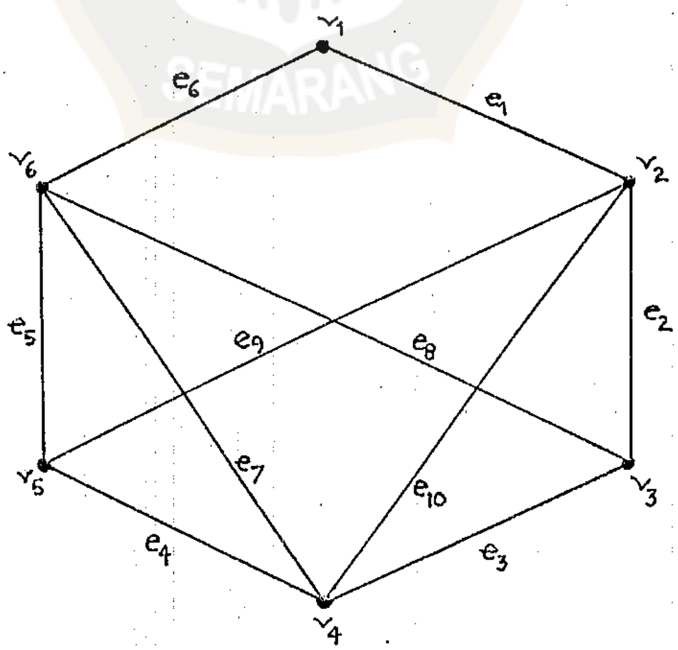
Di sini akan dibahas tentang hubungan antara *simpul cover* dan himpunan bebas dalam suatu graph. Tetapi sebelumnya akan dijelaskan definisi dari *simpul cover* dan himpunan bebas dalam graph.

DEFINISI 2.1 :

Subset K dari V adalah *simpul cover* dari graph G jika untuk setiap ruas dari G mempunyai sedikitnya sebuah simpul ujung di K.

Contoh :

Untuk memudahkan pengertian *simpul cover* dalam graph G dapat dilihat pada gambar(2.3), dibawah ini :



Gambar(2.3)

Pada gambar(2.3) himpunan { v_2, v_4, v_5, v_6 } , { v_1, v_3, v_4, v_5 } , { v_2, v_3, v_4, v_6 } dan { v_2, v_4, v_6} adalah *simpul cover* dari graph G diatas.

DEFINISI 2.2 :

Simpul cover K dari G adalah minimum jika tidak ada simpul cover lain K′ dengan |K′| < |K|.

Pada gambar(2.3), {v_2, v_4, v_6} adalah *simpul cover minimum.*

Banyaknya simpul dalam simpul cover minimum dari graph G disebut *bilangan simpul cover* dari G dan dinotasikan β(G).

DEFINISI 2.3 :

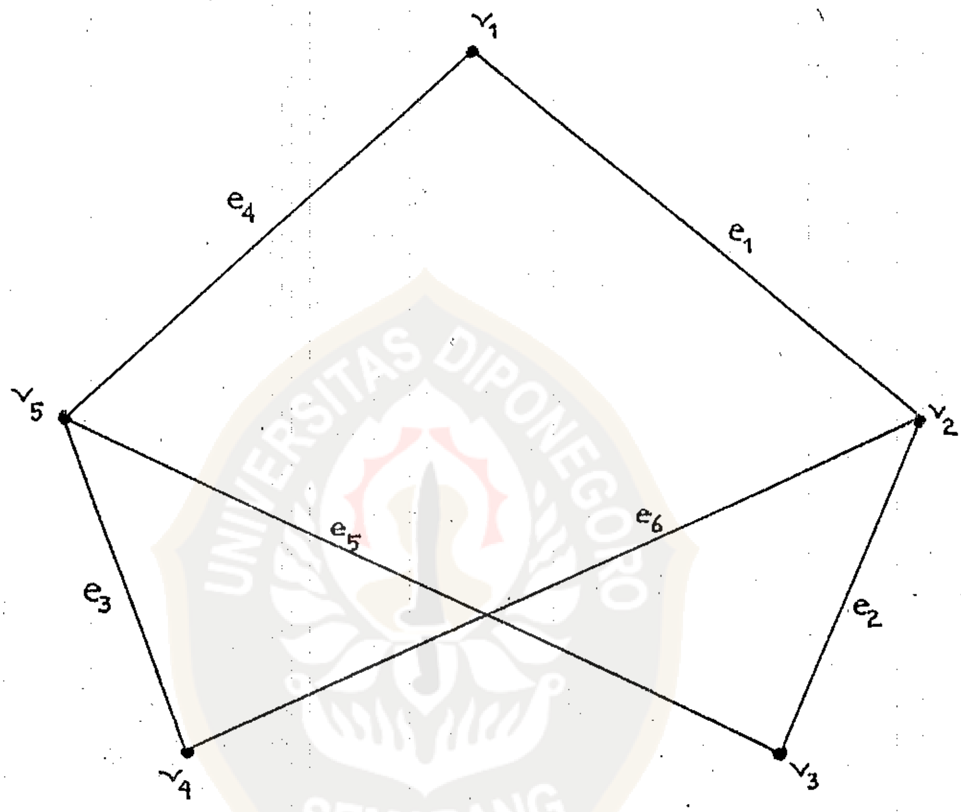
Suatu subset S dari V disebut *himpunan bebas* dari G jika tidak ada dua simpul dari S yang adjacent di G.

DEFINISI 2.4 :

Himpunan bebas S dari G adalah maksimum jika tidak ada himpunan bebas lain S′ dengan |S′| > | S|.

Banyaknya simpul dalam himpunan bebas maksimum dari graph G disebut *bilangan bebas* dari G dan dinotasikan α(G).

Contoh himpunan bebas dalam suatu graph dapat ditunjukkan pada gambar(2.4), yaitu :



Gambar(2.4)

Pada gambar(2.4) himpunan $\{v_1,v_3\}$, $\{v_1,v_4\}$, $\{v_2,v_5\}$ dan $\{v_1,v_3,v_4\}$ adalah *himpunan bebas* dari graph diatas. Disini $\{v_1,v_3,v_4\}$ adalah himpunan bebas maksimum.

Hubungan antara himpunan bebas dan simpul cover dari suatu graph G akan dijelaskan berdasarkan teorema berikut :

TEOREMA 2.1 :

Subset S dari V adalah himpunan bebas dari graph G jika dan hanya jika V-S adalah simpul cover dari G.

BUKTI :

($\Rightarrow$)

Subset S dari V adalah himpunan bebas dari graph G $\Rightarrow$ V - S adalah simpul cover dari G.

Berdasarkan definisi bahwa S adalah himpunan bebas dari G, jika tidak ada dua simpul ujung dari S yang ruasnya di G.

Atau dengan kata lain, setiap ruas di G mempunyai sedikitnya sebuah simpul ujung di V - S.

Hal ini berarti pula bahwa V - S adalah simpul cover dari G.

($\Leftarrow$)

V - S adalah simpul cover dari G $\Rightarrow$ subset S dari V adalah himpunan bebas dari graph G.

Andaikan subset S dari V adalah bukan himpunan bebas dari graph G berarti terdapat dua simpul ujung dari S yang ruasnya di G, hal ini bertentangan dengan V - S adalah simpul cover dari G.

Pengandaian salah (Kontradiksi), yang benar adalah Jika subset S dari V adalah bukan himpunan bebas dari graph G maka V - S bukan simpul cover dari G. Berarti pernyataan diatas terbukti .

AKIBAT 2.1 :

Untuk graph sederhana dengan n simpul maka $\alpha+\beta=n$.

BUKTI :

Misalkan himpunan bebas maksimum S^*, dan simpul cover minimum K^* dari graph G = (V,E), maka :

$$|S^*| = \alpha$$

dan

$$|K^*| = \beta$$

Berdasarkan teorema 2.1, $V-S^*$ adalah simpul cover dan $V-K^*$ adalah himpunan bebas.

Maka :

$$|V-S^*| = n - \alpha \geq \beta \qquad .....(2.1)$$

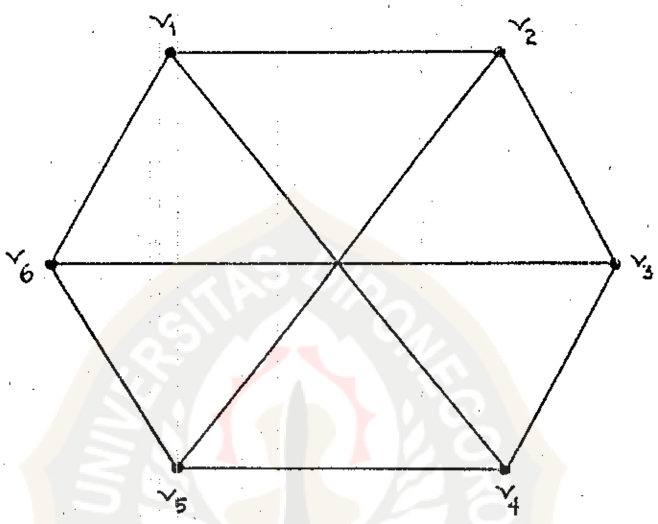
dan

$$|V-K^*| = n - \beta \leq \alpha \qquad .....(2.2)$$

dengan mengkombinasikan persamaan (2.1) dan (2.2) maka diperoleh :

$$\alpha + \beta = n$$

Sebagai gambaran dari hubungan antara simpul cover dan himpunan bebas dalam suatu graph dapat dilihat pada gambar(2.5) yaitu :



Gambar(2.5)

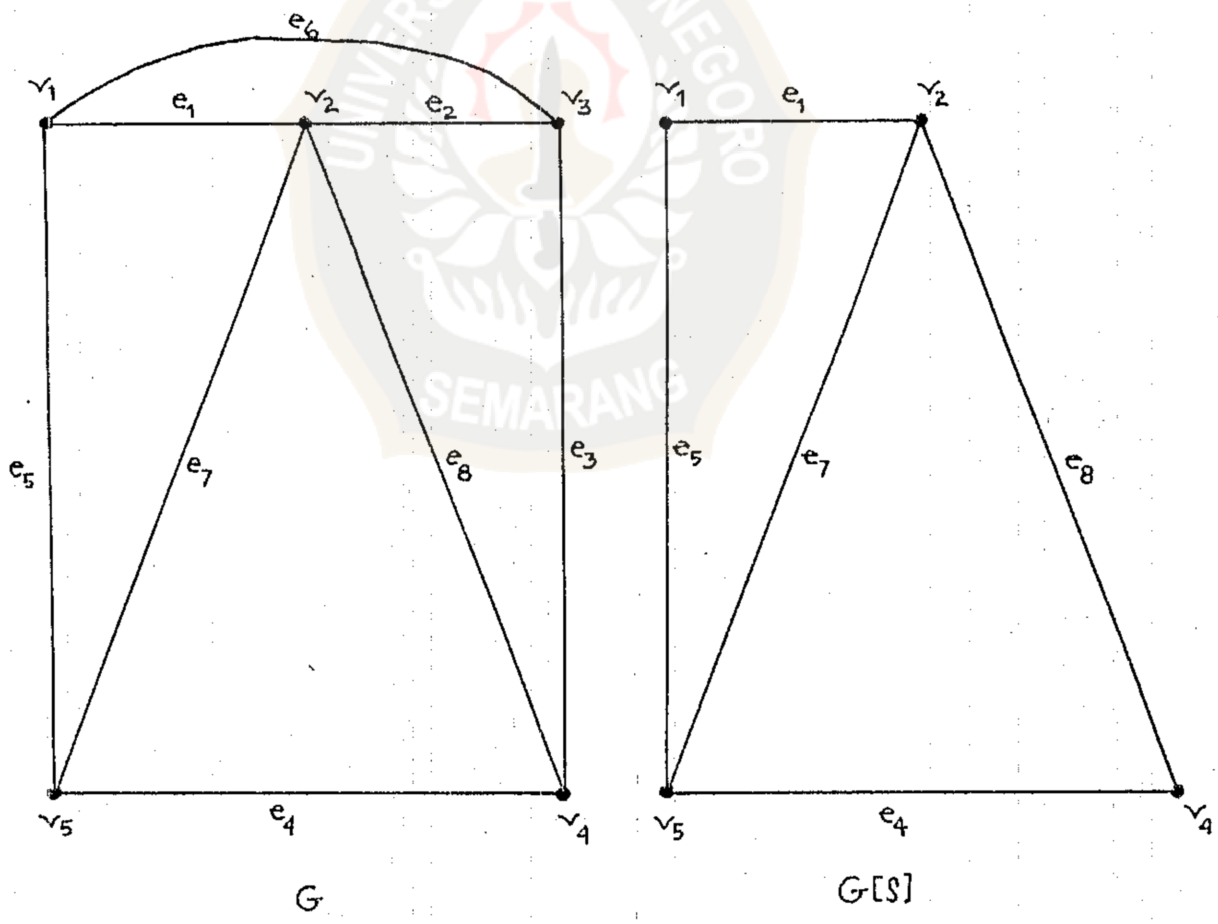
Pada gambar(2.5), S = $\{v_1, v_3, v_5\}$adalah himpunan bebas dari graph diatas, sedangkan V-S = $\{v_2, v_4, v_6\}$ adalah simpul cover dari graph diatas.

2.3 PENGERTIAN KLIK DAN HIMPUNAN BEBAS DALAM GRAPH

Berikut ini akan di jelaskan definisi dari klik, serta hubungan antara klik dengan himpunan bebas dalam suatu graph. Namun sebelumnya akan diberikan penjelasan terlebih dahulu mengenai *Subgraph Terinduksi* dan *Graph Lengkap*.

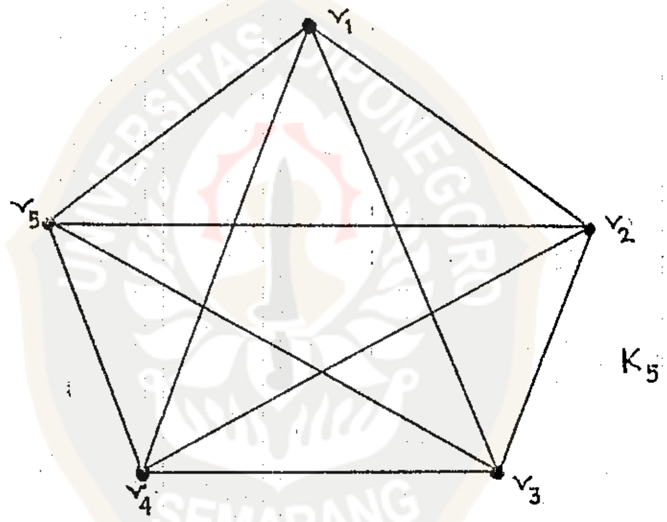
Misalkan S adalah subset tidak kosong dari V. Subgraph dari G yang himpunan simpulnya adalah S dan himpunan ruasnya adalah himpunan ruas dari G yang kedua ujungnya ada dalam S disebut *Subgraph dari G terinduksi oleh S.* Dan notasikan dengan G[S], dikatakan bahwa G[S] adalah subgraph terinduksi dari G.

Contoh dari Subgraph Terinduksi dapat di lihat pada gambar(2.6), yaitu :



gambar(2.6)

Sedangkan *Graph Lengkap* adalah graph sederhana dimana setiap simpulnya saling adjacent, atau dengan kata lain tiap pasangan simpulnya di hubungkan oleh sebuah ruas. Jika graph G mempunyai *n* simpul maka setiap simpulnya berderajat *(n-1)* dan banyaknya ruas dalam graph G adalah *n(n-1)/2*. Graph lengkap dengan *n* simpul di notasikan dengan K_n. Untuk lebih jelasnya mengenai graph lengkap dapat di lihat pada contoh berikut :



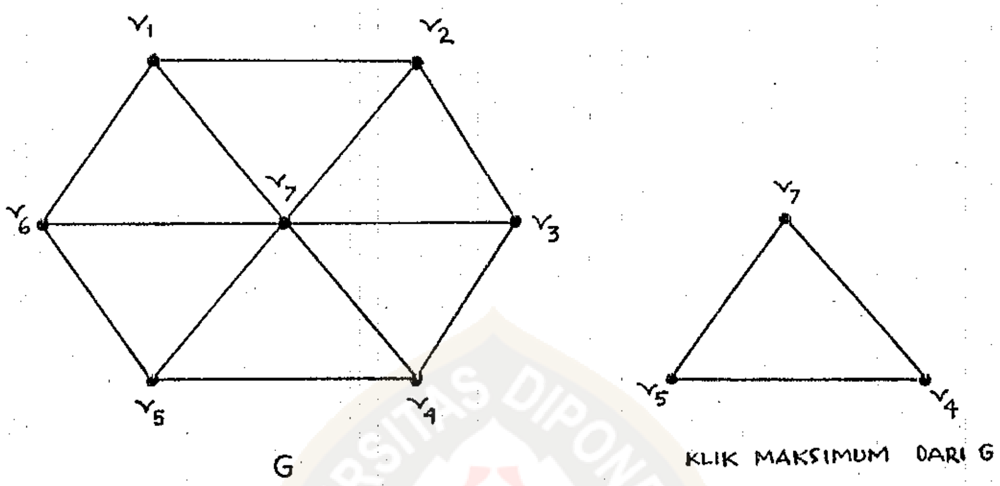
gambar(2.7)

Graph G dengan lima simpul, derajat setiap simpulnya adalah empat, dan banyaknya ruas dalam graph diatas adalah sepuluh. Dapat di lihat pada gambar(2.7).

DEFINISI 2.5 :

Klik (Clique) dari graph sederhana G adalah subset S dari V sedemikian sehingga G[S] adalah lengkap.

Contoh :



Gambar(2.8)

Pada gambar(2.8), ukuran dari klik maksimum sama adalah 3(tiga), maka dapat diwakili oleh salah satu klik yaitu himpunan simpul $\{v_4, v_5, v_7\}$.

DEFINISI 2.6 :

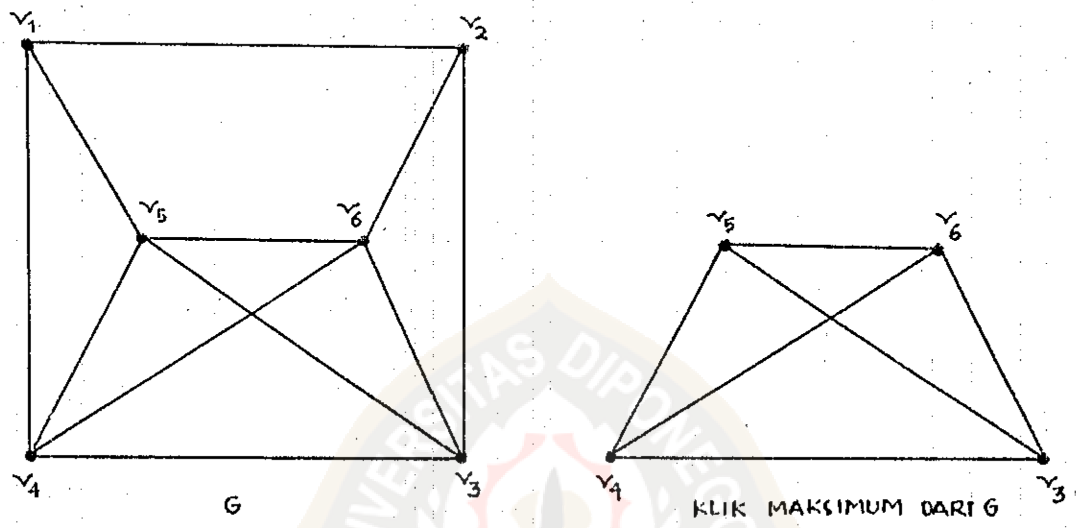
Klik Q dari G adalah maksimum jika tidak ada klik lain Q' dengan $|Q'| > |Q|$.

Ukuran dari klik maksimum dalam G di notasikan dengan $\omega(G)$, maka :

$$\omega(G) = \max_{S \in \diamond} |S|$$

dimana $\diamond$ adalah kumpulan semua klik dalam G.

Contoh klik maksimum :



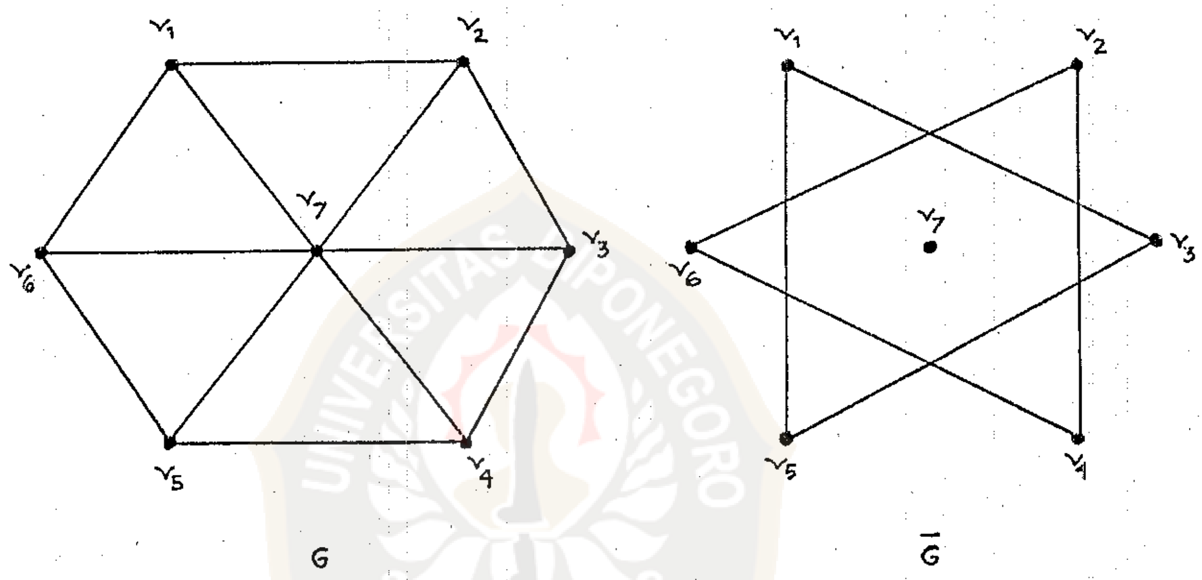
gambar(2.9)

Pada gambar diatas, himpunan $\{v_1, v_5, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_6\}$ dan $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ adalah klik-klik dari graph G diatas. Sedangkan $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ adalah klik maksimum dengan ukuran 4 (empat).

DEFINISI 2.7 :

Graph $\bar{G} = (V, E')$ disebut *komplemen* dari graph $G=(V,E)$ bila dua simpul v_i dan v_j berdampingan di $\bar{G}$ jika dan hanya jika kedua simpul tersebut tidak berdampingan di G.

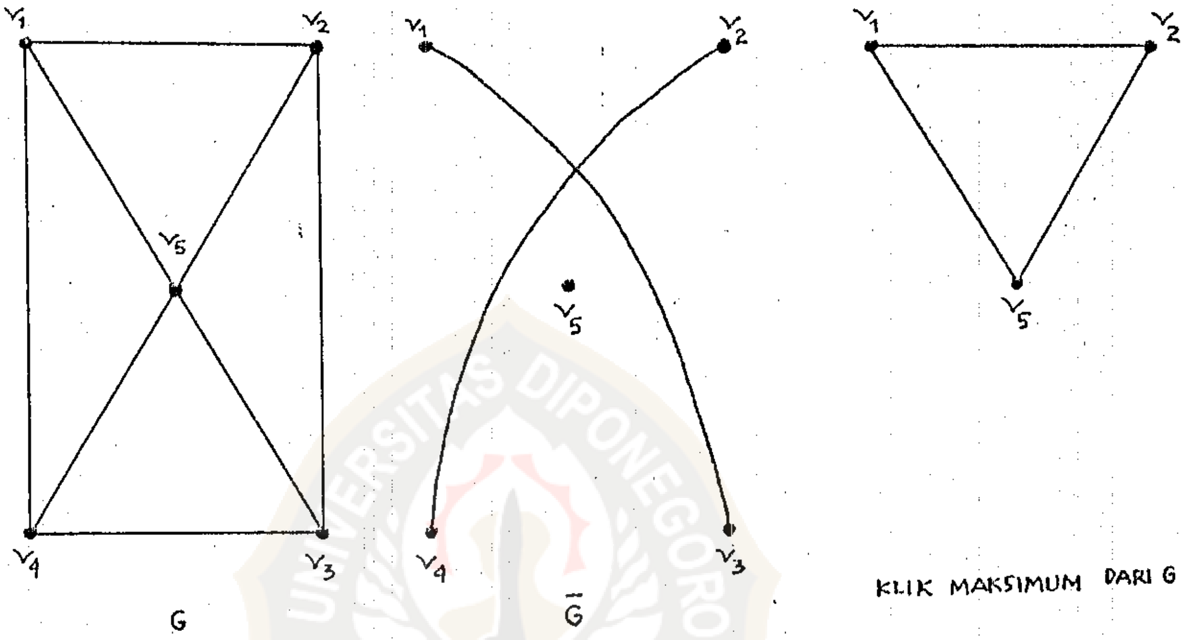
Contoh graph G dengan komplemennya :



gambar(2.10)

Dapat dilihat bahwa S adalah klik dari G jika dan hanya jika S adalah himpunan bebas dari $\overline{G}$.

Contoh Hubungan antara klik maksimum dan himpunan bebas dalam suatu graph, yaitu :



gambar(2.11)

Pada gambar(2.11) himpunan S = $\{v_1, v_2, v_5\}$ adalah himpunan bebas dari $\overline{G}$, sedangkan S adalah klik dari G.