BAB II

TEORI PENUNJANG

II.1. VEKTOR YANG BEBAS LINEAR DAN BERGANTUNG LINEAR

Definisi 1 :

Himpunan m buah vektor $\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_m\}$ disebut bergantung linear bila terdapat skalar-skalar $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga : $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\ldots+\lambda_m u_m = 0$. (dimana 0 adalah vektor nol).

Definisi 2 :

Himpunan m buah vektor $\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ disebut bebas linear apabila $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\ldots+\lambda_m u_m = 0$ hanya terpenuhi oleh $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_m=0$.

Contoh 2 :

Diketahui Vektor-vektor : a=[3,1,2],b=[1,2,1], c=[2,-1,1].

Ditanyakan : Apakah ketiga vektor tersebut diatas bergantung linear/bebas linear.

Jawab :

$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$

$\lambda_1 [3,1,2] + \lambda_2 [1,2,1] + \lambda_3 [2,-1,1] = [0,0,0\}]$

$3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$ ....(1)

$\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ ....(2)

$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ....(3)

Dari ketiga persamaan diatas didapat $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Jadi ketiga vektor diatas bergantung linear

(sesuai dengan definisi 1)

Theorema 1 :

Jika sebagian (himpunan bagian) dari m vektor-vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ bergantung linear maka keseluruhan m vektor-vektor tersebut adalah bergantung linear.

Bukti :

Misalkan ambil p vektor, $p < m$ dan p bergantung linear, katakanlah $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Maka terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0 \qquad (2.1)$$

Ambil kemudian $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \ldots = \lambda_m = 0$. Sehingga persamaan (2.1) menjadi :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p + \lambda_{p+1} u_{p+1} + \ldots + \lambda_m u_m = 0$$

Dimana terdapat λ_i tidak sama dengan nol $(1 < i < p)$

Contoh 3 :

Diketahui vektor-vektor :

a=[2,3,1,4];b=[6,9,3,12];c=[2,0,3,1];d=[0.0,1,4].

Tunjukkan bahwa ke empat vektor diatas bergan - tung linear.

Jawab :

Karena vektor a dan b berkelipatan maka mereka bergantung linear, dan sesuai dengan theorema 1 keseluruhan $\{a,b,c,d\}$ bergantung linear.

Theorema 2 :

Jika himpunan m vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ bebas linear maka sebagian (himpunan bagiannya) juga bebas linear.

Bukti :

Andaikata himpunan bagian tersebut bergantung linear, menurut theorema 1 keseluruhan m vektor adalah bergantung linear. Suatu kontradiksi, pengandaian diatas tidak benar jadi haruslah himpunan bagian tersebut bebas linear.

II.2. KOMBINASI LINEAR

Definisi 3 :

Suatu vektor v dikatakan kombinasi linear dari vektor-vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ bila terdapat skalar-skalar $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ sedemikian sehingga $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$.

Contoh 4 :

Diketahui a=[2,1,2]; b=[1,0,3]; c=[3,1,5].

Nyatakanlah a sebagai kombinasi linear dari b dan c.

Jawab

Dihitung λ_1, λ_2 yang memenuhi :

$[2,1,2] = \lambda_1 [1,0,3] + \lambda_2 [3,1,5]$ atau

$2 = \lambda_1 + 3\lambda_3$ ....(1)

$1 = 0\lambda_1 + \lambda_2$ ....(2)

$2 = 3\lambda_1 + 5\lambda_2$ ....(3)

Dari (1),(2),dan (3) didapatkan 3 persamaan dengan 2 anu.Diselesaikan dulu persamaan (1) dan (2) yang hasilnya $\lambda_1=-1$ dan $\lambda_2=1$.

Kemudian nilai tersebut disubstitusikan kedalam Persamaan (3) ternyata memenuhi pula.jadi $a=-b+c$.

Contoh 5 :

Diketahui p=[2,1,3]; q=[0,1,2]; r=[2,2,4]

Ditanyakan : apakah p dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari q dan r.

Jawab :

$[2,1,3] = \lambda_1[0,1,2] + \lambda_2[2,2,4]$ atau

$2 = 0\lambda_1 + 2\lambda_2$ ....(1)

$1 = \lambda_1 + 2\lambda_2$ ....(2)

$3 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2$ ....(3)

Persamaan (1) dan (2) diselesaikan dulu dan diper oleh $\lambda_1=-1$ dan $\lambda_2=1$.Tetapi nilai-nilai tersebut tak memenuhi persamaan (3).Jadi p tidak dapat di nyatakan sebagai kombinasi linear dari q dan r.

Theorema 3 :

Jika m (m > 1) vektor $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bergantung linear,maka paling sedikit terdapat satu vektor dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor selebihnya.

Bukti :

Karena $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ bergantung linear,paling sedikit satu diantara skalar-skalar

$\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\}$ tidak nol.Misalnya λ_p tidak sama dengan nol sedemikian sehingga :

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p + \ldots + \lambda_m u_m = 0.$

Kemudian $\lambda_p u_p$ dipindah ruas diperoleh :

$$u_p = -\frac{\lambda_1}{\lambda_p} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_p} u_2 - \ldots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} u_{p-1} - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} u_{p+1} + \ldots + \frac{\lambda_m}{\lambda_p} u_m .$$

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1} + \alpha_{p+1} u_{p+1} + \ldots + \alpha_m u_m .$$

Jadi u_p kombinasi linear dari vektor-vektor selebihnya.

Theorema 4 :

Jika satu diantara m vektor$\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$adalah kombinasi linear dari vektor-vektor selebihnya maka m vektor tersebut bergantung linear.

Bukti :

Misalkan u_p kombinasi linear dari vektor-vektor $\{u_1,u_2,\ldots,u_{p-1},u_{p+1},\ldots,u_m\}$ maka :

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1} + \alpha_{p+1} u_{p+1} + \ldots + \alpha_m u_m .$$

Bila u_p pindah ruas diperoleh :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1} - u_p + \alpha_{p+1} u_{p+1} + \ldots + \alpha_m u_m = 0.$$

Jelas tidak semua koefisien $\lambda_i = 0$, karena $\alpha_p = -1$ tidak sama dengan nol.

jadi m vektor tersebut bergantung linear.

Contoh 6 :

Diketahui a=[2,1,2]; b=[0,1,0]; c=[2,0,2]

Tunjukkan bahwa {a,b,c} bergantung linear.

Jawab :

Berdasarkan theorema 4 akan diselidiki apakah salah satu diantara a,b,c kombinasi linear vektor-vektor selebihnya.

Misal : $a = \lambda_1 b + \lambda_2 c$ maka :

$[2,1,2] = \lambda_1 [0,1,0] + \lambda_2 [2,0,2]$

$2 = 0\lambda_1 + 2\lambda_2$

$1 = \lambda_1 + 0\lambda_2$

$2 = 0\lambda_1 + 2\lambda_2$

terpenuhi oleh $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1$. Berarti a kombinasi linear dari b dan c. Sehinga {a,b,c} bergantung linear.

Theorema 5 :

Jika m vektor-vektor $\{u_1, u_2, .., u_m\}$ bebas linear dan (m+1) vektor-vektor $\{u_1, u_2, .., u_m, v\}$ bergantung linear maka v adalah kombinasi linear dari $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$.

Bukti :

Karena $\{u_1, u_2, ..., u_m, v\}$ bergantung linear pada persamaan $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m + \lambda_{m+1} v = 0$. terdapat $\lambda_i = 0$. Dalam hal ini haruslah $\lambda_{m+1} = 0$, karena bila tidak demikian terjadi kontradiksi yaitu $\lambda_i = 0$ (i=1,2,...,m) yang mana :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m + 0\ v = 0 \text{ atau}$$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m = 0.$$

Berakibat $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ bergantung linear. maka bila λ_{m+1} pindah ruas diperoleh :

$$-\lambda_{m+1} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m$$

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{m+1}} u_2 - ... - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} u_m$$

$$V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m$$

jadi v kombinasi linear dari $\{u_1, u_2, .., u_m\}$.

Akibat :

Bila $\{u_1, u_2, .., u_m\}$ bebas linear dan v bukan kombinasi linear dari $\{u_1, u_2, .., u_m\}$, maka :

$\{u_1, u_2, .., u_m, v\}$ bebas linear.

Definisi 4 :

Suatu himpunan vektor-vektor $\{u_1, u_2, .., u_m\}$ disebut sistem pembentuk dari ruang vektor V, ditulis V= $\{u_1, u_2, .., u_m\}$ bila setiap $v \in V$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\{u_1, u_2, .., u_m\}$.

Contoh 7 :

Diketahui : vektor-vektor a=[2,1,0]; b=[3,2,1] c=[5,3,1] adalah sistem pembentuk ruang vektor L{a,b,c}.

Ditanyakan : apakah vektor d=[1,1,1] $\in$ L.

Jawab :

Akan diselidiki apakah d kombinasi linear dari {a,b,c}.

ternyata karena d=-a+b+0c. Maka d kombinasi linear dari {a,b,c}. Yang berarti bahwa d $\in$ L.

II.3. DIMENSI DAN BASIS

Definisi 5 :

Suatu ruang vektor V dikatakan berdimensi n bila dapat diketemukan suatu himpunan n vektor-vektor $\in$ V yang bebas linear, sedangkan setiap himpunan (n+1) vektor-vektor $\in$ V selalu bergantung linear. Dengan perkataan lain banyaknya maximum vektor-vektor $\in$ V yang bebas linear adalah n.

Theorema 6 :

Setiap n vektor-vektor $\{u_1, u_2, .., u_n\}$ yang bebas linear dari V suatu ruang vektor berdimensi n pasti merupakan sistem pembentuk dari V.

Bukti :

Ambil vektor sembarang $v \in V$, karena dimensi V adalah n menurut definisi $\{u_1, u_2, .., u_n, v\}$ bergantung linear, sehingga pada persamaan :

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} V = 0$

terdapat λ_i Yang tidak nol,dan haruslah $\lambda_{n+1} \neq 0$ karena bila tidak demikian persamaan $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n + 0v = 0$.

Berakibat $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ bergantung linear.

Kontradiksi berarti :

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}} u_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} u_n$$

$$= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

jadi untuk setiap $v \in V$ kombinasi linear dari $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Berarti $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ sistem pembentuk.

Definisi 6 :

Setiap himpunan n vektor-vektor yang bebas linear $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dari ruang vektor berdimensi n disebut basis dari ruang vektor atau setiap sistem pembentuk yang bebas linear disebut basis dari ruang vektor tersebut.

Contoh 8 :

Diketahui : S = {a=[1,1,1]; b=[2,1,1]; c=[3,2,2]} dan S membentuk ruang vektor L(s)=L{a,b,c}.

S={a,b,c} adalah sistem pembentuk dari L.

Ditanyakan : Dimensi dan basis dari L.

Jawab :

Ternyata bahwa : c = a + b . Sehingga {a,b,c} bergantung linear.

Kemudian {a,b} adalah sistem pembentuk yang bebas linear (karena a dan b tidak berkelipatan).Jadi merupakan basis dari L.Sehingga menurut definisi 5 dimensi dari L adalah 2.

Boleh dipilih basis dari L yang lain yaitu himpunan 2 vektor $\in$ L yang bebas linier.

Misal : {a,c} atau {b,c}. Atau yang lain dari a,b,c. misalnya :d = a + b + 0c = [3,2,2] $\in$ L

e = -a + 3b + 2c = [11,6,6] $\in$ L

{d,e} bebas linear,jadi juga basis L.

II.4 MATRIK

II.4.1 PENGERTIAN

Definisi 7 :

Matrik adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun/dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

skalar-skalar itu disebut elemen matrik.

Untuk batasnya diberikan :

$$\left\| \qquad \right\|$$

Notasi Matrik :

Matrik diberi nama dengan huruf besar A,B,P,C dan lain sebagainya.Secara lengkap ditulis matrik A $= \|a_{ij}\|$ artinya suatu matrik A yang elemen-elemennya a_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke -i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen tersebut.

Contoh 9 :

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

A adalah suatu Matrik dengan elemen-elemen $a_{11} = 3$, $a_{12} = 2, \ldots, a_{33} = 2$.

II.4.2 OPERASI PADA MATRIK

II.4.2.1 PENJUMLAHAN MATRIK (BERLAKU UNTUK MATRIK-MATRIK BERUKURAN SAMA)

Jika $A = \|a_{ij}\|$ dan $B = \|b_{ij}\|$, matrik berukuran sama, maka A + B adalah suatu matrik $C = \|c_{ij}\|$ dimana : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Atau $A+B = \|a_{ij} + b_{ij}\|$.

Contoh 10 :

Diketahui matrik :

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix} \text{ dan } B = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan : Hitung A + B

Jawab :

$$A+B = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} 3+0 & 1+2 \\ 4+1 & 2+3 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{Vmatrix}$$

II.4.2.2 PERKALIAN SKALAR TERHADAP MATRIK DAN PERKALIAN MATRIK

Jika λ suatu skalar (bilangan) dan $A = \|a_{ij}\|$ maka matrik $\lambda A = \|\lambda a_{ij}\|$;dengan perkataan lain,matrik λA diperoleh dengan mengalikan semua elemen matrik A dengan λ.

Contoh 11 :

Diketahui matrik :

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan : berapakah 3A ?

Jawab :

$$3A = \begin{Vmatrix} 3.3 & 3.1 \\ 3.4 & 3.2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 9 & 3 \\ 12 & 6 \end{Vmatrix}$$

Definisi 8 :

Pandang $A = \|a_{ij}\|$ berukuran (p x q) dan $B = \|b_{ij}\|$ berukuran (q x r).Maka perkalian AB adalah suatu matrik $C = \|c_{ij}\|$ berukuran (p x r) dimana :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{iq}b_{qj}$$

untuk setiap i = 1,2,...,p dan j = 1,2,...,r.

Contoh 12 :

Diketahui matrik :

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} ; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan :Berapa AB ?

Jawab :

$$AB = \begin{Vmatrix} 4.1+3.2 & 4.0+3.3 \\ 1.1+1.2 & 1.0+1.3 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix}$$

II.4.3 TRANSPOSE DARI SUATU MATRIK

Definisi 9 :

Pandang suatu matrik $A = \|a_{ij}\|$ berukuran (m x n) maka Transpose dari A adalah matrik A^T berukuran (n x m) yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A (i=1,2,...,m) sebagai kolom ke-i dari A^T. Dengan perkataan lain :

$A^T = \|a_{ji}\|$.

Beberapa sifat matrik Transpose :

1. $(A+B)^T = A^T+B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $\lambda(A^T) = (\lambda A)^T$ untuk λ suatu skalar
4. $(AB)^T = B^T A^T$

II.4.4 OPERASI ELEMENTER PADA BARIS DAN KOLOM SUATU MATRIK

Yang dimaksud dengan operasi elementer pada baris dan kolom suatu matrik A adalah sebagai berikut :

1. Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j (baris ke-i dijadikan baris ke-j dan baris ke j dijadikan baris ke-i), ditulis : $H_{ij}\|A\|$.

Contoh 13 :

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ maka } H_{12}\|A\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

2. Memperkalikan baris ke - i dengan skalar $\lambda \neq 0$ ditulis $H_i^{(\lambda)}\|A\|$.

Contoh 14(i) :

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ maka } H_2^{(-2)}\|A\| = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

3. Menambah baris ke i dengan λ kali baris ke-j, ditulis $H_{ij}^{(\lambda)}\|A\|$

Contoh 14(ii) :

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ maka } H_{31}^{(1)}\|A\| = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{Vmatrix}$$

Catatan 1 :

Untuk operasi kolom analog.

II.4.5 BEBERAPA JENIS MATRIK KHUSUS

1. Matrik nol adalah matrik yang semua elemennya nol (Diberi notasi $\|0\|$) .
2. Matrik diagonal adalah matrik bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya adalah nol.
3. Matrik Identitas atau matrik satuan adalah matrik diagonal yang elemen-elemen diagonal utama nya semua 1(diberi notasi I).

II.4.6 RANK MATRIK

Definisi 10 :

Rank baris dari matrik A adalah dimensi dari ruang baris matrik A. Rank kolom dari matrik A adalah dimensi ruang kolom matrik A. Akan ternyata bahwa rank baris = rank kolom,maka rank matrik A didefinisikan adalah harga rank baris = rank kolom dari A tersebut,ditulis r‖A‖.

Catatan 2 :

Karena matrik-matrik yang ekivalen baris/kolom mempunyai ruang yang sama maka untuk mencari rank dari suatu matrik dapat digunakan operasi elementer. Diusahakan mengubah sebanyak mungkin baris/kolom menjadi vektor nol (karena vektor nol bergantung linier).

Secara umum untuk mencari rank dari suatu matrik digunakan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Pilih salah satu baris yang bukan vektor nol,untuk mudahnya diberi tanda (*).Pilih salah satu elemen dari baris tadi yang ≠ 0,disebut elemen pivot. (untuk mempermudah perhitungan sedapat mungkin dipilih baris yang mengandung elemen = 1 atau = -1 untuk digunakan sebagai pivot).
2. Jadikan nol semua elemen yang sekolom dengan pivot,melalui operasi elementer baris oleh pivot tersebut.
3. Sekarang tidak perlu lagi memperhatikan baris

pivot diatas perhatikan baris-baris yang tinggal. kerjakan langkah (1) terhadap mereka.Begitulah dikerjakan langkah (2) dan (3).

4.Pekerjaan ini diakhiri apabila langkah (1) tidak dapat dikerjakan lagi ,yaitu apabila semua baris telah bertanda (*) dan atau menjadi baris nol.
Rank dari matrik tersebut = banyaknya baris yang bertanda (*),atau banyak baris semua dikurangi banyak baris yang menjadi baris nol.

Contoh 15 :

Diketahui matrik :

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan : Rank dari matrik A !

Jawab :

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \xrightarrow[H_{31}^{(-3)}]{H_{21}^{(-2)}} \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \end{Vmatrix} \xrightarrow{H_{32}^{(-1)}}$$

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Baris ke-3 adalah vektor nol jadi $r\|A\| = 2$.

II.5 DETERMINAN

II.5.1 PERMUTASI

Definisi 11 :

Barisan bilangan-bilangan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ dimana berlaku $j_i \neq j_k$ untuk $i \neq k$ (i dan $k = 1,2,\ldots,n$) serta j_i salah satu dari bilangaan asli $(1,2,\ldots,n)$ disebut suatu Permutasi.

Contoh 16 :

(2,3,1,4,5) adalah suatu permutasi.

Catatan 3 :

Apabila dipunyai n buah bilangaan asli $1,2,\ldots,n$ maka banyaknya permutasi yang dapat dibentuk ada $n! = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$.

Misalnya n=3 maka terdapat 3 ! = 3.2.1 = 6 buah permutasi yaitu : (1,2,3);(1,3,2);(2,1,3);(2,3,1);(3,1,2);(3,2,1).

Definisi 12 :

Yang dimaksud inversi pada suatu permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ adalah adanya $j_k < j_i$ (j_k mendahului j_i) padahal $j_i < j_k$ (i dan $k = 1,2,\ldots,n$).

Contoh 17 :

Diketahui : suatu permutasi (4 3 1 2)

Ditanyakan : Berapa banyaknya inversi pada permutasi tersebut ?

Jawab :

Misal (4 3 1 2)

$j_1 = 4$; $j_2 = 3$; $j_3 = 1$; $j_4 = 2$.

(1) j_1 = 4 mendahului j_2 = 3 padahal 3<4.

(2) j_1 = 4 mendahului j_3 = 1 padahal 1<4.

(3) j_1 = 4 mendahului j_4 = 2 padahal 2<4.

(4) j_2 = 3 mendahului j_3 = 1 padahal 1<3.

(5) j_2 = 3 mendahului j_4 = 2 padahal 2<3

Sehingga banyaknya permutasi ada 5 buah.

Definisi 13 :

Permutasi genap adalah suatu permutasi yang banyak inversinya bilangan genap dan jika banyaknya inversi adalah bilangan ganjil disebut permutasi ganjil.

Definisi 14 :

Suatu permuatasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ diberi notasi : $\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ adaalah $\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n) = +1$ bila $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ genap dan $= -1$ bila $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ganjil.

Pandang Matrik bujur sangkar A berorder n :

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Dan pandang pula suatu hasil kali antara elemen-elemen dari A yang masing - masing terletak pada baris yang berbeda dan kolom yang berbeda. Suatu hasil kali yang mengandung hanya satu elemen dari setiap baris dan setiap kolom.

Contoh hasil kali yang dimaksud misalnya hasil kali n elemen-elemen diagonal utaama matrik A :

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ jelas dari setiap baris dan dari setiap kolom hanya diambil 1 elemen.Untuk memudahkan diambil suatu hasil kali dari elemen-elemen yang barisnaya telah diurutkan (tentu saja boleh pula kalau kolomnya yang diurutkan),maka setiap hasil kali n elemen matrik A diatas selalu berbentuk : $a_{1j1}, a_{2j2}, \ldots, a_{njn}$ ....(2.2)

Dimana j_i menunjukkan kolomnya.Karena masing-masing faktor haruslah elemen yang datang dari kolom yang berbeda maka barisan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ adalah suatu permutasi.Apabila hasil kali dari persamaan (2.2) dilengkapidengan memberikan tanda dari permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$tersebut maka hasil kali $\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n) \cdot a_{1j1}, a_{2j2}, \ldots, a_{njn}$ ....(2.3)

Disebut hasil kali bertanda dari n elemen-elemen :

$a_{1j1}, a_{2j2}, \ldots, a_{njn}$.

Definisi 15 :

Determinan dari matrik bujur sangkar A berorder n adalah jumlah dari semua n! hasil kali bertanda dari elemen-elemen matrik A tersebut yaitu :

Det.matrik A $= |A|$

$$= \Sigma\, \sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n) \cdot a_{1j1} a_{2j2} \ldots a_{njn}$$

Contoh 18 :

Diketahui :

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\|$$

Ditanyakan : Determinan dari A sesuai definisi 11

Jawab :

A Berordo 3 jadi terdapat 3! = 6 hasil kali.

(1) $a_{11}a_{22}a_{33}$ Permutasi (1,2,3) banyaknya inversi 0

(2) $a_{12}a_{23}a_{31}$ Permutasi (2,3,1) banyaknya inversi 2

(3) $a_{13}a_{21}a_{32}$ Permutasi (3,1,2) banyaknya inversi 2

(4) $a_{13}a_{22}a_{31}$ Permutasi (3,2,1) banyaknya inversi 3

(5) $a_{11}a_{23}a_{32}$ Permutasi (1,3,2) banyaknya inversi 1

(6) $a_{12}a_{21}a_{33}$ Permutasi (2,1,3) banyaknya inversi 1

Sehingga $|A| = +a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$
$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$

II.5.2 SIFAT - SIFAT DETERMINAN

1. $|A| = |A^T|$

2. Tanda Determinan berubah bila ada baris/kolom ditukar tempatnya.

3. Harga Determinan menjadi λ kali bila suatu baris/kolom dikalikan dengan λ (λ suatu skalar).

4. Harga Determinan tidak berubah bila baris/kolom ke-i ditambah dengan λ baris/kolom ke-j.

II.6 MINOR ,KOFAKTOR DAN MINOR ORDER DARI MATRIK

Definisi 16 :

Minor dari elemen a_{ij} suatu Matrik A = $\|a_{ij}\|$ yang berukuran n x n adalah $|M_{ij}|$,dimana $\|M_{ij}\|$ suatu sub Matrik dari A dengan ukuran (n-1) x (n-1) yang baris ke-i dan kolom ke-j nya dihilangkan.

Sedang kofaktor dari a_{ij} adalah $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$.

Contoh 19 :

Diketahui :

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan : Minor dari elemen a_{32} dan kofaktor dari elemen a_{32}

Jawab :

$$a_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 20 = -6$$

kofaktor dari elemen $a_{32} = (-1)^{3+2}.(-6) = 6$

Definisi 17 :

Kombinasi dari n elemen diambil p diberi notasi C_p^n adalah $n!/p!(n-p)!$ ($n=1,2,\ldots$ dan $1 \le p \le n$)

Catatan 4 :

Jika elemen-elemen dari suatu baris/kolom sebuah matrik bujur sangkar A berorder n dikalikan dengan kofaktor-kofaktor dari elemen-elemenbaris/kolom yang lain jumlahnya akan sama dengan nol dan jika elemen-elemen dari sembarang baris/kolom suatu matrik bujur sangkar A berorder n dikalikan dengan kofaktor-kofaktornya akan sama dengan determinan dari matrik tersebut atau :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = |A| \text{ bila } j=k$$
$$= 0 \text{ bila } j \neq k$$

dimana A_{ik} adalah kofaktor elemen a_{ik} dari matrik A

Definisi 18 :

Minor order p dari suatu matrik bujur sangkar A berorder n ($1 \leq p \leq n$) adalah :

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{vmatrix} \quad \left(1 \leq \begin{matrix} i_1 < i_2 < \dots < i_p \\ k_1 < k_2 < \dots < k_p \end{matrix} \leq n \right)$$

Dimana :

i_p = baris ke-p dan k_p = kolom ke-p.

Yaitu Determinan dari submatrik A berorder p dengan baris ke-1 hingga ke- p dan kolom ke-1 hingga ke-p yang dipakai (tidak dihilangkan).

Catatan 5 :

Jumlah dari minor-minor dengan order p adalah N^2 dengan $N = C_p^n = n!/p!(n-p)!$

Definisi 19 :

Matrik bujur sangkar baru berorder $N = C_p^n$ yang disusun dari seluruh minor-minor berorder p yang mungkin dari matrik A yang berorder n ($1 \leq p \leq n$) disebut Compound Matrik ke-p yang diberi Notasi μ_p.

Penyusunan Minor-minor berorder p kedalam matrik Bujur sangkar baru berorder N menggunakan aturan sebagai berikut

1. Cari seluruh kombinasi yang mungkin dari n diambil p dengan $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ dan $k_1 < k_2 < \dots < k_p$. Beri tanda masing-masing dengan α dan β.
2. Minor-minornya sekarang berbentuk :

$$a_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{vmatrix}$$

3.Akhirnya didapatkan :

$$\mu_p = \| a_{\alpha\beta} \|_1^N$$

Contoh 20 :

Diketahui :

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan :

Susun seluruh minor-minor berorder 2 yang mungkin dari matrik A kedalam compound matrik ke-2.

Jawab :

$N = C_2^4 = 4!/2!(4-2)! = 6$ (dari definisi 16)

Sehingga order dari μ_2 adalah 6.

Sedang banyaknya minor-minor berorder 2 yang mungkin dari matrik A adalah $N^2 = 36$.

Sedang seluruk kombinasi yang mungkin dari n=4 (1,2,3,4) diambil 2 adalah :

(1 2);(1 3);(1 4);(2 3);(2 4);(3 4)

Sehingga menurut Definisi 19 maka :

$$
\begin{array}{cc}
& \begin{array}{cccccc} (34) & (24) & (23) & (14) & (13) & (12) \end{array} \\
\mu_2 = & \left\| \begin{array}{cccccc}
\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}
\end{array} \right\| \begin{array}{c} (34) \\ (24) \\ (23) \\ (14) \\ (13) \\ (12) \end{array}
\end{array}
$$

Dimana :

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ adalah Determinan dari baris ke-3 dan 4 serta kolom ke-1 dan 2 dari matrik A Yaitu :

$$
\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{31} a_{42} - a_{41} a_{32}
$$

Demikian juga dengan yang lainnya.

Definisi 20 :

Principal Minor order p adalah jumlahan dari minor-minor berorder p pada diagonal utama dari μ_p.

Contoh 21 :

Pada contoh 20 principal minor berorder 2 adalah jumlahan minor-minor padaa diagonal utama dari μ_2 yaitu :

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}
$$

II.7 MATRIK SINGULAR DAN NON SINGULAR (REGULAR)

Definisi 21 :

Suatu matrik bujur sangkar A disebut singular apabila $|A| = 0$ dan non singular (regular) jika $|A| \neq 0$.

Catatan 6 :

Matrik bujursangkar A berorder n adalah singular jika $r\|A\| < n$. Hal ini berhubungan dengan sifat ke-4 dan akibat sifat ke-3 dari Determinan. (Dimana determinan dari matrik yang mempunyai baris/kolom 0 harga determinannya = 0).

Contoh 22 :

Diketahui matrik :

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan : Buktikan bahwa A matrik singular !

Jawab :

$$\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{Vmatrix} \xrightarrow{H_{31}^{(-1)}} \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \xrightarrow{H_{32}^{(-1)}} \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

sehingga $\det\|A\| = 0$ (dari catatan 6)

II.8 INVERS DARI MATRIK BUJUR SANGKAR

Definisi 22 :

Matrik bujur sangkar A berorder n disebut mempunyai invers bila ada suatu matrik B sehingga $AB = BA = I$. Matrik B disebut invers dari matrik A ditulis

A^{-1} ,merupakan matrik bujur sangkar berorder n.

Contoh 23 :

Diketahui matrik :

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan : invers dari matrik A !

Jawab :

Misalkan $A^{-1} = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{Vmatrix}$

maka berlaku : $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$

menurut definisi 8 :

$$\begin{Vmatrix} 2a_1 + a_3 & 2a_2 + a_4 \\ 4a_1 + 3a_3 & 4a_2 + 3a_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

dan bila diselesaikan diperoleh :

$a_1 = 3/2$; $a_2 = -1/2$; $a_3 = -2$; $a_4 = 1$

Sehingga :

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

II.9 MATRIK ADJOIN

Definisi 23 :

Suatu matrik bujur sangkar $A = \|a_{ij}\|$ dengan A_{ij} adalah kofaktor-kofaktor dari elemen a_{ij} maka transpose dari matrik $\|A_{ij}\|$ disebut matrik adjoin dari A.

Contoh 24 :

Diketahui matrik :

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan : matrik adjoin dari A

Jawab :

Kofaktor dari kesembilan elemen dari A adalah :

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -18 \; ; \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \; ; \; A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10 \; ; \; A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \; ; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{Jadi adj.A} = \begin{Vmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{Vmatrix}$$

II.10 TRACE DARI MATRIK BUJUR SANGKAR

Definisi 24 :

Trace dari matrik $A=\|a_{ik}\|_1^n$ adalah jumlahan elemen-elemen pada diagonal utama dari matrik tersebut.

Notasi :

Trace dari matrik A diberi notasi Tr A.

Sehingga $Tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Contoh 25 :

Diketahui :

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \\ 3 & -8 & 4 \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan : berapakah Tr A ?

Jawab :

$$Tr\ A = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$
$$= 1+6+4 = 11.$$

Theorema 7 :

Jika A dan B adalah 2 matrik bujur sangkar yang berorder sama maka :

1. Tr A $\pm$ Tr B = Tr (A $\pm$ B)
2. p Tr A = Tr p.A Dimana p adalah skalar sembarang .

Bukti :

Ambil A dan B matrik bbujur sangkar berorder n

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32}\ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

$$B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12}\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\ldots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32}\ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}$$

dan p skalar sembarang maka :

1. $\mathrm{Tr}\ A = a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$

$\mathrm{Tr}\ B = b_{11}+b_{22}+\ldots+b_{nn}$

$\mathrm{Tr}\ A \pm \mathrm{Tr}\ B = (a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}) \pm$
$(b_{11}+b_{22}+\ldots+b_{nn})$

$\mathrm{Tr}\ A + \mathrm{Tr}\ B = (a_{11} \pm b_{11}) + (a_{22} \pm b_{22}) + \ldots +$
$(a_{nn} \pm b_{nn})$

$\mathrm{Tr}\ A \pm \mathrm{Tr}\ B = \mathrm{Tr}\ (A \pm B)$

2. $p\ \mathrm{Tr}\ A = p\ (a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})$

$= p\ a_{11}+p.a_{22}+\ldots+p.a_{nn}$

$= \mathrm{Tr}\ p.A$

II.11 AKAR DAN VEKTOR KARAKTERISTIK

Definisi 25 :

A suatu matrik bujur sangkar dan λ adalah skalar yang memenuhi persamaan :

$AX = \lambda X$ ....(2.4)

untuk suatu vektor kolom $X \neq 0$ maka dikatakan λ adalah suatu akar karakteristik dari A dan X yang memenuhi persamaan (2.4) disebut vektor karakteristik yang bersangkutan dengan λ

Contoh 26 :

Diketahui :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Ditanyakan : λ dan X yang memenuhi persamaan :

$AX = \lambda X$.

Jawab :

Misal λ adalah skalar dan $X = \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Vmatrix}$ vektor yang memenuhi :

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Suatu persamaan homogen dan diinginkan jawaban non trivial $X \neq 0$ sehingga :

$$\text{rank} \begin{Vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-2 \end{Vmatrix} < 2 \text{ atau :}$$

$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$ (persamaan ini disebut persaamaan karakteristik) sehingga :

$$(\lambda-1)(\lambda-2)-6 = 0$$

$$\lambda^2-3\lambda+2-6 = 0$$

$$\lambda^2-3\lambda-4 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-4) = 0$$

$\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 4$

untuk mencari vektor karakteristik yang bersangkutan dengan harga akar karakteristiknya kita masukkan harga-harga λ kedalam persamaaan (*) diatas.

untuk $\lambda_1 = -1$ didapat :

$$\begin{Vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 \\ X \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$ sehingga menurut definisi 8 :

$-2X_1 - 2X_2 = 0$

$-3X_1 - 3X_2 = 0$

karena ranknya = 1 cukup diambil 1 persamaan.

n-r = 2-1 = 1 maka terdapat 1 parameter.

Misal diambil :

$-2X_1 - 2X_2 = 0$

$2X_1 + 2X_2 = 0$

$X_1 + X_2 = 0$

$X_1 = -X_2$

Jika $X_1 = \mu$ maka $X_2 = -\mu$.

Sehingga : $X = \mu\ [1,-1]$

untuk $\lambda_2 = 4$ didapat :

$$\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$3X_1 - 2X_2 = 0$

$-3X_1 + 2X_2 = 0$

r = 1 daan n-r = 1

ambil : $3X_1 - 2X_2 = 0$

$3X_1 = 2X_2$

$X_1 = \mu$ dan $X_2 = 3/2\ \mu$

Sehingga $X = \mu\ [1,3/2]$

$X = \mu\ [2,3]$

Theorema 8 :

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ adalah nilai-nilai karakteristik yang beralainan dari matrik A berukuran k dan jika $X_1, X_2, \ldots, X_k$ adalah vektor-vektor karakteristik yang $\neq$ 0 ,maasing-masing berhubungan dengan nilai-nilai karakteristik ini,maka $X_1, X_2, \ldots, X_k$ adalah bebas linear.

Bukti :

Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_k$ bergantung linear dan vektor-vektor $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ bebas linear maka menurut theorema 5 X_k adalah kombinasi linear dari $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ sehingga :

$X_k = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_{k-1} X_{k-1}$ ....(2.4)

Dimana $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ adalah skalar yang $\neq 0$.

Jika persamaan (2.4) di kalikan dengan A dari kiri maka :

$A\ X_k = A\ (C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_{k-1} X_{k-1})$

$A\ X_k = C_1 A\ X_1 + C_2 A\ X_2 + \ldots + C_{k-1} A\ X_{k-1}$ .....(2.5)

karena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ nilai-nilaai karakteristik dan $X_1, X_2, \ldots, X_k$ adalah vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian maka berlaku :

$$A X_i = \lambda_i X_i \qquad i = 1,2,\ldots,k$$

Disubstitusikan kedalam persamaan (2.5) didapat :

$$\lambda_k X_k = C_1 \lambda_1 X_1 + C_2 \lambda_2 X_2 + \ldots + C_{k-1} \lambda_{k-1} X_{k-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} C_i \lambda_i X_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.6)$$

Jika (2.4) dikalikan dengan λ_k diperoleh :

$$\lambda_k X_k = \lambda_k C_1 X_1 + \lambda_k C_2 X_2 + \ldots + \lambda_k C_{k-1} X_{k-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_k C_i X_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.7)$$

Persamaan (2.6) - (2.7) diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{k} C_i \lambda_i X_i - \sum_{i=1}^{k} C_i \lambda_k X_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} C_i (\lambda_i - \lambda_k) X_i = 0$$

Karena $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ bebas linear maka berlaku :

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k) = 0 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_k \neq 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$C_2(\lambda_2 - \lambda_k) = 0 \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_k \neq 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

....

$$C_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0 \Rightarrow \lambda_{k-1} - \lambda_k \neq 0 \Rightarrow C_{k-1} = 0$$

atau $C_1 = C_2 = \ldots = C_{k-1} = 0$.

Mengakibatkan persamaan (2.4) menjadi $X_k = 0$ hal ini tidak mungkin karena X_k adalah vektor karakteristik .Kontradiksi.Sehingga $X_1, X_2, \ldots, X_k$ bebas linear.

Definisi 26 :

Jika A suatu matrik bujur sangkar berorder n maka berlaku determminan dari matrik $\|A-\lambda I\|$

$$|A-\lambda I| = (-\lambda)^n + s_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + s_n$$

dimana $s_1, s_2, \ldots, s_t$ adalah jumlahan prinsipal minor berorder t (t = 1,2,...,n).

dalam hal khusus :

$s_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ dan $s_n = |A|$.

Dan juga :

$|\lambda I-A| = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n$

dimana $p_t = (-1)^{n-1} s_t$ $(t=1,2,\ldots,n)$