BAB I

PENDAHULUAN

I.1. PENGERTIAN / LATAR BELAKANG

A adalah suatu matriks bujur sangkar yang berorder n dan λ adalah skalar yang memenuhi persamaan :

$$A\,X = \lambda\,X \tag{1.1}$$

untuk suatu vektor kolom $X \neq 0$, maka λ disebut akar karakteristik dari A Sedang X yang memenuhi persamaan (1.1) diatas disebut vektor karakteristik yang bersangkutan dengan λ .

Dari persamaan (1.1) kita peroleh suatu sistem persamaan linear :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = \lambda\,x_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = \lambda\,x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = \lambda\,x_n \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

kita juga dapat menulis persamaan (1.2) diatas dalam bentuk sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}\,x_2 - \ldots - a_{1n}\,x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (\lambda - a_{nn})x_n = 0 \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

karena x bukan vektor null maka paling sedikit salah satu dari $x_1, x_2, \ldots, x_n \neq 0$.

sesuai dengan persamaan (1.3) yang merupakan persamaan linier homogen ,diinginkan jawaban non trivial $x \neq 0$ maka determinan dari sistem persamaan linier diatas haruslah sama dengan nol.

Jadi :

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots.(1.4)$$

Persamaan (1.4) diatas disebut persamaan karakteristik dan ruas kirinya disebut polinomial karakteristik.

Dalam bentuk eksplisit persamaan (1.4) ditulis dalam bentuk :

$$|\lambda I-A| = \lambda^{n}-p_{1}\lambda^{n-1}-p_{2}\lambda^{n-2}-\ldots-p_{n} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1.5)$$

Dimana I adalah matrik identitas.

Dan jika s_t $(t=1,2,3,\ldots,n)$ adalah jumlahan dari prinsipal minor berorder t dari suatu matrik bujur sangkar $A=\|a_{ik}\|_1^n$ maka :

$$s_t = \begin{cases} p_t & \text{untuk } t \text{ ganjil} \\ -p_t & \text{untuk } t \text{ genap} \end{cases}$$

Metoda Faddeev adalah suatu metoda yang efektif untuk menentukan akar (harga) karakteristik ,determinan,invers dari suatu matrik bujur sangkar yang diketahui juga sekaligus vektor-vektor karakteristik yang berkorespondensi dengan harga-harga karakteristiknya.

Metoda ini kita mulai dengan pengertian Trace dari suatu matrik bujursangkar A, yang didefinisikan sebagai jumlahan dari elemen-elemen diagonalnya.

Atau dengan kata lain :

$$\text{Trace } A \text{ (ditulis tr } A \text{)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.6)$$

Dan selanjutnya akan diturunkan rumus :

$$\left.\begin{array}{lll} A_1 = A & p_1 = \text{tr } A & B_1 = A_1 - p_1 I \\ A_2 = AB_1 & p_2 = \frac{1}{2} \text{ tr } A_2 & B_2 = A_2 - p_2 I \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ A_n = AB_{n-1} & p_n = \frac{1}{n} \text{ tr } A_n & B_n = A_n - p_n I \end{array}\right\} \quad (1.7)$$

Persamaan $B_n = A_n - p_n E = 0$ digunakan untuk mengecek kebenaran dari perhitungan.

Dengan menggunakan rumus (1.7) diatas sudah dapat ditentukan :

1. Determinan dari matrix A yaitu :

   $$|A| = (-1)^{n-1} p_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.8)$$

2. Invers dari matrix A yaitu :

   $$A^{-1} = \frac{1}{p_n} . B_{n-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.9)$$

3. Dengan memasukkan harga-harga $p_1, p_2, \ldots, p_n$ kedalam persamaan $|\lambda I - A| = \Delta(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \ldots - p_n = 0$ didapatkan akar-akar karakteristik dari matrix A.

4. Dengan memasukkan harga-harga $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ kedalam persamaan : $B(\lambda) = I\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \ldots + B_{n-1}$ ....(1.10)

   didapatkan vektor-vektor karakteristik dari A. Karena setiap kolom yang tidak nol dari $B(\lambda_o)$yang berkorespondensi dengan akar karakteristik λ_o merupakan vektor karakteristik yang bersangkutan dengan λ_o.

Contoh 1 :

Diketahui suatu matrix order 3 yaitu

$$A= \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Dimana λ adalahskalar dan x_1, x_2, x_3 adalah vektor-vektor kolom yang memenuhi :

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$

Ditanyakan :

1. Determinan dari matrix A
2. invers dari matrik A
3. Harga-harga karakteristik dari matrix A
4. Vektor-vektor karakterirtik x_1, x_2, x_3.

Dengan menggunakan metode FADDEEV.

Jawab :

Dengan menggunakan persamaan (1.7) didapatkan

$$A= A_1 = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad p_1 = \operatorname{tr} A_1 = 4$$

$$B_1 = A_1 - p_1 I = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{Vmatrix}$$

$$A_2 = AB_1 = \begin{Vmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{Vmatrix} ; \quad p_2 = \frac{1}{2} \text{ tr } A_2 = -5$$

$$B_2 = A_2 - p_2 I = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$A_3 = AB_2 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix} ; \quad p_3 = \frac{1}{3} \text{ tr } A_3 = 2$$

Check :

$$B_3 = A_3 - p_3 I = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Sehingga didapatkan :

1. $|A| = (-1)^{3-1} . p_3 = 2.$

2. $A^{-1} = \frac{1}{p_3} . B_2 = \frac{1}{2} . \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{Vmatrix}$$

3. $\Delta(\lambda) = \lambda^3 - p_1\lambda^2 - p_2\lambda - p_3$

$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$

$= (\lambda-1)^2(\lambda-2)$

Sehingga didapatkan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$

Dan jika harga-harga ini dimasukkan kedalam persamaan :

$B(\lambda) = I\lambda^2 + B_1\lambda + B_2$

$$B(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -2\lambda & -\lambda & \lambda \\ 0 & -3\lambda & \lambda \\ -\lambda & \lambda & -3\lambda \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda^2-2\lambda & -\lambda+2 & \lambda-2 \\ -1 & \lambda^2-3\lambda+3 & \lambda-2 \\ -\lambda+1 & \lambda-1 & \lambda^2-3\lambda+2 \end{Vmatrix}$$

Untuk $\lambda_0 = 1$ maka $B(1) = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

Sehinga vektor karakteristik untuk harga $\lambda_0 = 1$ adalah :

$x_1 = \alpha\ (1,1,0)$. bimana α adalah skalar sembarang. $(\alpha \neq 0)$

Untuk $\lambda_0 = 2$ maka :

$x_2 = \alpha\ (0,1,1)$ dimana α adalah skalar sembarang. $(\alpha \neq 0)$

I.2. PERMASALAHAN

Dari uraian diatas timbul permaasalahan bagaimana menurunkan dan menggunakan metoda Faddeev untuk menentukan determiminan,invers,akar karakteristik dari suatu matrik bujur sangkar yang diketahui dan juga vektor karakteristik yang bersangkutan dengan akar karakteristik tersebut.

I.3. PEMBAHASAN

Tulisan ini dibagi menjadi 4 Bab dimana :

Bab I berisi tentang pengertian dasar akar dan vektor karakteristik dari suatu matrix bujur sangkar serta metoda Faadeev yang akan digunakan untuk menentukan akar dan vektor karakteristik tersebut.

BAB II berisi tentang beberapa teori tentang vektor-vektor yang bebas dan bergantung linear,teori dasar matrik sseperti determinan,minor dari matrik dan beberapa teorema-teorema tentang akar dan vektor karakteristik.

BAB III akan dibahas penurunan metoda pertama dan kedua dari Faddeev yang akan dimulai dengan pengertian tentang matrik polinomial kemudian dilanjutkan beberapa theorema dari Bezoet dan Hamilton-caley yang pada akhirnya didapatkan rumus-rumus Faddeev.

BAB IV berisi tentang kesimpulan dari apa yang telah kita bahas pada BAB I s/d III.