

BAB III

MODEL AKSIOMATIK DALAM PROBABILITAS

REPRODUKSI KACANG KAPRI

Ketrampilan dalam membentuk dan menafsirkan model matematika hanya dapat diraih dengan cara berperan secara aktif di dalam proses pembentukannya. Tak ada rumusan yang sederhana atau algoritma yang terdefinisikan dengan baik yang mampu menjelaskan bagaimana menyusun sebuah model dari suatu permasalahan. Model-model yang dibentuk bertujuan untuk membantu memahami persoalan-persoalan dasar yang berlaku di dalam situasi persoalan yang diselidiki dan membantu memahami persoalan-persoalan yang agak spesifik.

Bila dalam bidang Fisika ataupun Kimia, kita dapat menguji kelayakan suatu hukum dasar dari kedua bidang tersebut dalam suatu percobaan dengan ketelitian yang tinggi, maka dalam bidang Biologi kita tidak dapat mengharapkan adanya hukum-hukum Biologi dasar yang akan berlaku tepat. Hal ini diakibatkan karena dalam Biologi, objek yang diamati adalah benda-benda hidup. Oleh karena itu perhitungan probabilitas akan berperan penting dalam penyusunan model Matematika dalam bidang Biologi. Seperti yang telah dilakukan oleh para ahli Biologi, misalnya Mendel.

Gregor Mendel melakukan riset mengenai hibridisasi tanaman sehingga menghasilkan karya terkenal yaitu hukum Mendel, yang merupakan dasar-dasar bagi ilmu genetika. Mendel menggunakan Matematika untuk menerangkan dan meramalkan observasi-observasinya dan yang pertama kali menggunakan

konsep-konsep model matematika didalam ilmu Biologi. Selanjutnya dipelajari sebuah eksperimen fiktif yang dilakukan oleh seorang saintis untuk menjelaskan aspek-aspek penting dari karya Mendel.

3.1. RUMUSAN PERMASALAHAN

Seorang ahli Biologi (sebut Dr. Augustian Monk) memperkirakan secara akurat sifat-sifat reproduksi dari tanaman tertentu, yaitu kacang kapri, observasinya adalah sebagai berikut :

Dr. Monk memilih dua biji kapri yang tampaknya identik dari pohon yang sama. Setelah tua keduanya ditanam dan diamati, ternyata menghasilkan kacang kapri yang tidak iden-tik. Dr Monk berharap dapat memahami fenomena ini.

3.2. PENYUSUNAN MODEL REAL

Langkah awal untuk menyederhanakan persoalan, Dr. Monk mengkonsentrasikan hanya pada dua aspek dari kacang kapri yaitu warna dan tekstur (bentuk biji). Warna dibagi menjadi dua kelompok yaitu hijau dan kuning, dan tekstur dibagi menjadi dua kelompok juga yaitu licin/bundar dan berkerut.

Dr. Monk mengidealkan keadaan dengan menganggap bahwa selalu dapat menetapkan secara pasti karakteristik-karakteristik mana yang diperlukan oleh suatu kacang tertentu. Oleh karena itu setiap kacang dapat ditandai

secara tepat dengan salah satu klasifikasi di bawah ini (sebut saja tipe).

| | |
|--|---|
| Green-Smooth (Hijau-Licin) G-S | Green-Wrinkled (Hijau-Berkerut) Y-W |
| Yellow-Smooth (Kuning-Licin) Y-S | Yellow-Wrinkled (Kuning-Berkerut) Y-W |

Tabel 3.1

Selanjutnya cara yang ditempuh untuk memulai serangkaian eksperimen yang melibatkan regenerasi tanaman secara berturut-turut sebagai berikut:

Bibit dari tipe generasi tertentu ditanam dan tanaman yang tumbuh darinya dibiarkan melakukan reproduksi melalui fertilisasi diri (secara Biologi hal ini dimungkinkan). Kacang yang dihasilkan dikumpulkan dan diidentifikasi sehingga termasuk tipe tertentu, kemudian ditanam lagi dan demikian seterusnya. Data yang terkumpul pada setiap langkah (yang melibatkan kacang-kacang dari setiap generasi) dapat disusun dalam setiap himpunan barisan tipe-tipe kacang. setiap barisan berisi tipe-tipe dari setiap galur atau garis keturunan langsung dari kacang mula-mula. Jika barisan dari tipe-tipe yang muncul dalam cara ini semuanya

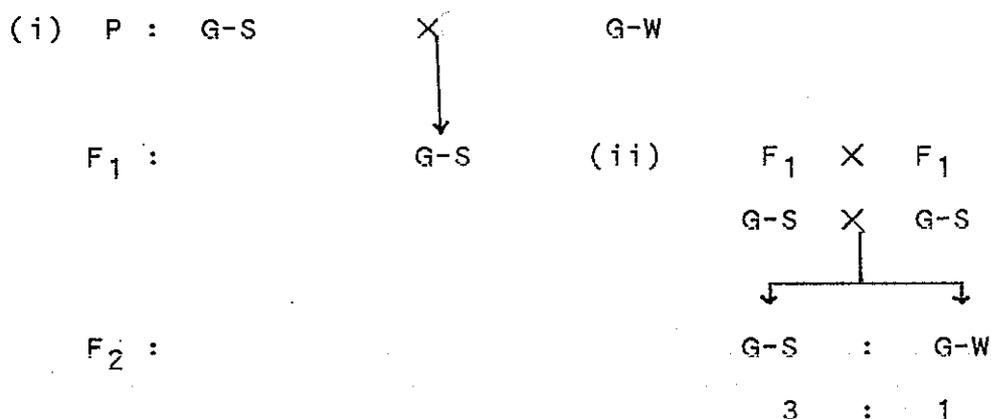
hanya membuat satu tipe tunggal maka kacang tersebut dikatakan berasal dari garis keturunan galur murni. Jadi, jika sebuah kacang dengan tipe tertentu merupakan anggota dari galur murni maka semua keturunannya adalah bertipe sama dengan mengingat bahwa reproduksi berlangsung melalui fertilisasi diri).

Penelitian diteruskan dengan melakukan fertilisasi silang antara dua garis keturunan yang berbeda, dengan eksperimen sebagai berikut :

Apabila bibit-bibit asli atau induk berbeda karakteristiknya, maka semua generasi pertamanya bertipe sama, dan apabila bibit-bibit generasi pertama melakukan reproduksi secara fertilisasi diri, maka ia tidak akan mengalami reproduksi dengan cara yang konsisten (semua tipe generasi kedua berbeda).

CONTOH 3.1 :

Induk asli bertipe G-S dan G-W disilangkan, maka semua turunan generasi pertamanya bertipe G-S dan dengan fertilisasi diri turunan generasi pertama akan menurunkan kacang generasi kedua yang bertipe G-S dan G-W dengan perbandingan 3:1. Dapat digambarkan sebagai berikut :

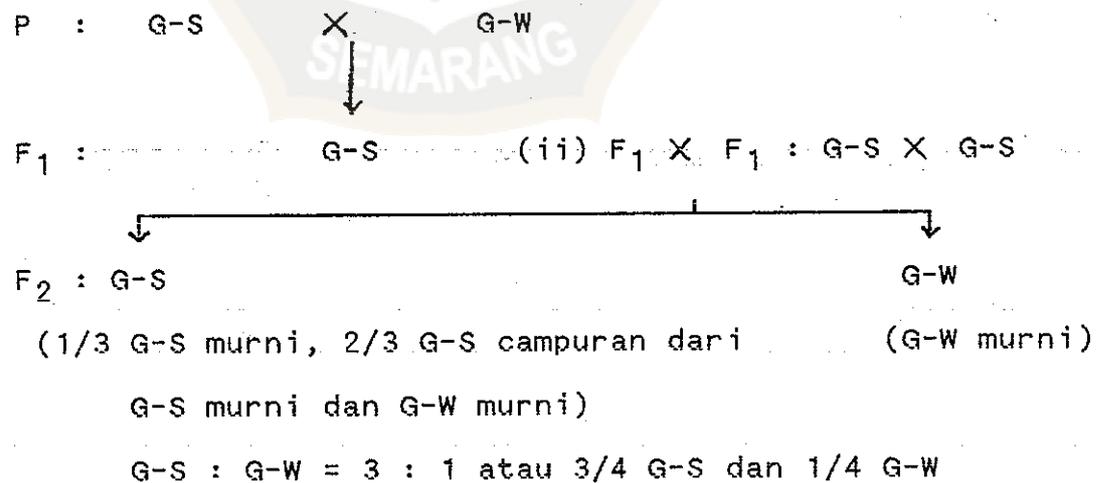


Salah satu kesimpulan dari eksperimen ini adalah bahwa bibit-bibit bertipe G-S dapat mempunyai keturunan bertipe G-S dan G-W. Hasil ini menunjukkan bahwa penampakan luar tidak menentukan sama sekali hasil-hasil reproduksi melalui fertilisasi diri. Hal ini membuat DR. Monk percaya bahwa pemberian tipe didasarkan pada penampakan luar saja tidaklah cukup.

Selanjutnya apa yang dikenal sebagai tipe di atas (tabel 4.1) diistilahkan dengan fenotip, yaitu sifat yang dapat diamati (tampak dari luar). Dr. Monk melihat kemungkinan untuk mencari notasi lain bagi tipe selain fenotip. Ia melihat bahwa bibit-bibit yang terlibat dalam proses reproduksi diatas membawa satuan-satuan yang tidak terdeteksi (dalam skala mikroskopik). Sifat atau tingkah laku apapun yang diperlihatkan oleh satuan-satuan tersebut harus diperhitungkan dengan distribusi 3:1 yang berhasil diamati dari eksperimen di atas.

Dr. Monk melanjutkan eksperimen dengan fertilisasi silang seperti yang telah dipelajari sebelumnya (lihat

contoh 3.1). Dari hasil pengamatannya diketahui bahwa pada fertilisasi diri dari bibit-bibit generasi pertama yaitu bibit-bibit dengan fenotip G-S menghasilkan bibit-bibit dengan fenotip G-S dan G-W. Selanjutnya dari fertilisasi silang diatas (lihat contoh 3.1), Dr. Monk mengamati bahwa bibit bertipe G-W menghasilkan generasi pertama yang merupakan galur murni dengan fenotip G-W. Sedang G-S menghasilkan generasi pertama sepertiganya merupakan turunan murni dengan fenotip G-S, sedangkan dua per tiga sisanya menunjukkan hasil fertilisasi silang antara bibit dengan galur murni G-S dengan yang bertipe G-W. Jadi tiga per empat bibit-bibit adalah dengan fenotip G-S dan seperempat lagi dengan fenotip G-W. Dengan skema sebagai berikut :



Catatan :

Percobaan-percobaan di atas digunakan kacang-kacang yang berwarna hijau saja sehingga hanya teksturnya saja yang divariasasi.

Sekarang perhatian dipusatkan pada karakteristik tekstur. Dr. Monk memperkirakan bahwa tiap sel dari tiap kacang membawa suatu satuan dasar yang menentukan tekstur turunannya. Satuan dasar tersebut terdiri atas sepasang gen. Sel-sel yang terlibat di dalam proses reproduksi hanya membawa satu gen tetapi selanjutnya dapat lebih banyak. Dr Monk berasumsi bahwa karena ada dua alternatif bentuk tekstur maka akan ada dua alternatif bentuk gen yang sesuai. Selama reproduksi, sepasang gen akan membelah dan salah satunya akan memberi keturunan.

Bila dikatakan lebih detail, maka sel-sel reproduksi dikenal dengan nama gamet. Sel yang terbentuk selama reproduksi menerima gen dari dua gamet yakni gamet jantan dan betina, masing-masing dipilih secara acak dari tiap induk. Kemudian setiap sel dapat diklasifikasikan menurut komposisi genetiknya. Karena setiap sel dari tumbuhan mengandung struktur gen yang tepat sama maka tumbuhan secara keseluruhan dapat juga dikelompokkan menurut struktur gen tersebut. Sifat genetik dari tumbuhan dinamakan sifat genotip.

Atas dasar eksperimen, Dr. Monk menyimpulkan hubungan antara genotip dan fenotip dari suatu tumbuhan adalah sebagai berikut:

1. Suatu tumbuhan akan menurunkan kacang-kacang licin bila bibit-bibitnya mengandung gen yang sesuai dengan bentuk karakteristik tersebut, apakah berasal

dari gamet jantan atau betina.

2. Suatu tumbuhan akan menurunkan kacang-kacang berkerut hanya bila bibit-bibitnya mengandung gen yang sesuai dengan bentuk karakteristik tersebut, apakah berasal dari gamet jantan atau betina.

Fenomena ini dinamakan *dominasi*.

Di dalam kasus ini faktor kehalusan atau licin merupakan bentuk dominasi tekstur sedangkan bentuk lain dari karakteristik tersebut dinamakan *resesif*. Akhirnya, ditekankan bahwa dengan pengertian di atas maka pengetahuan mengenai genotip dari hubungan-hubungan dominan cukup memadai untuk menetapkan fenotip.

3.4. PENYUSUNAN MODEL AKSIOMATIK

Keterangan di atas dalam hubungannya dengan penyusunan suatu model real, memberi keyakinan bahwa istilah gen merupakan hal yang penting. Sementara ini hanya ditinjau karakteristik teksturnya saja, yang mempunyai bentuk licin dan berkerut. Gen yang bersesuaian dengan tekstur adalah salah satu dari kedua bentuk alternatif tersebut. Kedua bentuk tersebut dikenal sebagai *Alele*, alele-alele yang bersesuaian dengan tekstur kita sebut *A* dan *a*.

Dr. Monk menduga bahwa gen-gen itu terbentuk secara berpasang-pasangan yaitu *AA*, *Aa* dan *aa*. Bila alele-alele *A* dan *a* masing-masing dapat dihubungkan dengan bentuk-bentuk licin dan berkerut, maka kacang-kacang dengan gen *AA* atau *Aa* akan mempunyai tekstur licin dan gen *aa* akan berkerut.

Sekarang kita tinjau rupa genetik dari induk dan turunannya. Tiap sel hasil reproduksi menerima satu gen yang dipilih sebarang dari dua yang tersedia dari induk masing-masing, misalnya:

1. Bila induk-induk mempunyai gen-gen AA dan Aa maka setengah dari keturunannya mempunyai genotip AA dan setengah lagi Aa.
2. Bila induk-induk mempunyai gen-gen AA dan aa maka semua turunannya mempunyai genotip Aa.

Gen sebagai satuan dasar yang menentukan heriditas (sifat yang diturunkan), sebagai unsur tak terdefinisikan.

Untuk menentukan model matematika aksiomatik, maka terlebih dahulu harus disusun sistem aksiomanya.

SISTEM AKSIOMA θ :

Unsur tak terdefinisikan adalah unsur gen (Alele A dan a merupakan unsur gen yang mempengaruhi bentuk licin dan berkerut).

AKSIOMA 3.1 (A_1) :

Tiap gen terbentuk dari dua unsur gen (Alele) A dan a.

DEFINISI 3.1 :

$U = \{AA, Aa, aa\}$ merupakan himpunan semua jenis gen yang saling berbeda.

DEFINISI 3.2 :

Reproduksi adalah fungsi dari $U \times U$ ke R^3 .

NOTASI :

Andaikan r fungsi reproduksi, maka $r : U \times U \longrightarrow R^3$ atau $r : (u_1, u_2) \longrightarrow (r_1, r_2, r_3) \in R^3$ atau $r(u_1, u_2) = (r_1, r_2, r_3)$ dengan $u_1, u_2 \in U$ dan $r_1, r_2, r_3 \in R$ adalah bilangan real yang menyatakan proporsi atau perbandingan antara banyaknya gen AA, Aa dan aa.

CONTOH 3.2. :

Aa \times Aa menghasilkan gen AA, Aa, aA dan aa sehingga $r_1 = 1/4$, $r_2 = 2/4 = 1/2$ dan $r_3 = 1/4$ atau $r(\text{Aa}, \text{Aa}) = (1/4, 1/2, 1/4)$. Fenomena ini digambarkan dalam skema sebagai berikut :

P : AA \times aa

F₁ : Aa

F₁ \times F₁ : Aa \times Aa

AA Aa aA aa

($r_1=1/4$) ($r_2=1/2$) ($r_3=1/4$)

Tampak bahwa :

a) r_1 adalah proporsi banyaknya gen AA yang didapat A dari u_1 dan A dari u_2 .

b) r_2 adalah proporsi banyaknya gen Aa yang didapat

mungkin A dari u_1 atau u_2 , dan mungkin a dari u_1 atau u_2 .

- c) r_3 adalah proporsi banyaknya gen aa yang didapat a dari u_1 dan a dari u_2 .

DEFINISI 3.3 :

Untuk setiap $u \in U$ dan $\alpha \in \{A, a\}$, diambil $p(\alpha; u)$ sebagai probabilitas dipilihnya α bila dilakukan pemilihan secara random antara dua unsur yang menyusun u , dengan menganggap bahwa setiap unsur mempunyai peluang yang besar untuk dipilih. $p(\alpha; u_i)$ dapat diberikan dalam tabel sebagai berikut :

| $\alpha \backslash u_i$ | AA | Aa | aa |
|-------------------------|----|-----|----|
| A | 1 | 1/2 | 0 |
| a | 0 | 1/2 | 1 |

Tabel 3.1

Keterangan tabel 3.1 :

$p(A; u_i)$ menyatakan probabilitas terdapatnya A dalam u_i , sebaliknya $p(a; u_i)$ menyatakan probabilitas terdapatnya a dalam u_i (dengan meninjau unsur-unsur yang menyusun gen).

Dari tabel 3.1 kita dapatkan :

$$p(A; AA) = 1 \qquad p(a; AA) = 0$$

$$p(A; Aa) = 1/2 \qquad p(a; Aa) = 1/2$$

$$p(A;aa) = 0 \qquad p(a;aa) = 1$$

Selanjutnya diungkapkan aksioma berikutnya yang berisi asumsi-asumsi esensial tentang reproduksi.

AKSIOMA 3.2 (A_2) :

Fungsi reproduksi memenuhi :

1. $r_1(u_1, u_2) = p(A;u_1).p(A;u_2)$
2. $r_2(u_1, u_2) = p(A;u_1).p(a;u_2) + p(a;u_1).p(A;u_2)$
3. $r_3(u_1, u_2) = p(a;u_1).p(a;u_2)$

Keterangan :

1. $r_1(u_1, u_2) = p(A;u_1).p(A;u_2)$ artinya proporsi banyaknya gen AA dari $u_1 \times u_2$ sama dengan probabilitas didapatkannya A dari u_1 dan A dari u_2 .
2. $r_2(u_1, u_2) = p(A;u_1).p(a;u_2) + p(a;u_1).p(A;u_2)$ artinya proporsi banyaknya gen Aa dari $u_1 \times u_2$ sama dengan probabilitas didapatkannya A dari u_1 dan a dari u_2 dijumlahkan dengan probabilitas didapatkannya a dari u_1 dan A dari u_2 .
3. $r_3(u_1, u_2) = p(a;u_1).p(a;u_2)$ artinya proporsi banyaknya gen aa dari $u_1 \times u_2$ sama dengan probabilitas didapatkannya a dari u_1 dan a dari u_2 .

Sekarang telah dipunyai struktur yang cukup untuk mulai mengembangkan suatu teori dengan menyusun teorema-teorema.

TEOREMA 3.1:

Range dari fungsi reproduksi merupakan sebuah himpunan dari vektor-vektor probabilitas.

BUKTI TEOREMA 3.1 :

Range dari fungsi reproduksi merupakan daerah hasil dari fungsi reproduksi $r(u_1, u_2)$ yakni himpunan nilai-nilai $r(u_1, u_2)$ untuk semua $u_1, u_2 \in U$ yang mungkin.

$$r : U \times U \longrightarrow R^3$$

$$r(u_1, u_2) = (r_1, r_2, r_3) \in R_3$$

Range dari fungsi reproduksi : $r(U \times U) \subseteq R^3$,

$$\text{dengan } r(U \times U) = \{(r_1, r_2, r_3) \mid r_1(u_1, u_2) = p(A; u_2)p(A; u_1) \\ r_2(u_1, u_2) = p(a; u_1)p(a; u_2) + p(a; u_1)p(a; u_2), r_3(u_1, u_2) \\ = p(a; a_1) \cdot p(a; a_2)\}.$$

Dengan mengingat vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n$

adalah suatu vektor probabilitas bila $0 \leq x_i \leq 1$,

dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $\sum_1^n x_i = 1$. Maka range dari fungsi reproduksi $r(U \times U) \subseteq R^3$ merupakan sebuah himpunan dari vektor probabilitas, jika untuk setiap koordinat (r_1, r_2, r_3) dipenuhi $0 \leq r_i \leq 1$ dengan $i = 1, 2, 3$ dan $\sum_1^3 r_i = 1$.

Berdasarkan definisi 3.3, $p(a; u)$ merupakan suatu fungsi probabilitas dengan $p(a; u) + p(A; u) = 1$ untuk setiap $u \in U$,

maka tiap koordinat (r_1, r_2, r_3) adalah non negatif, jadi

$r_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jumlah

setiap koordinat dari $r(U \times U)$ sama dengan 1 atau

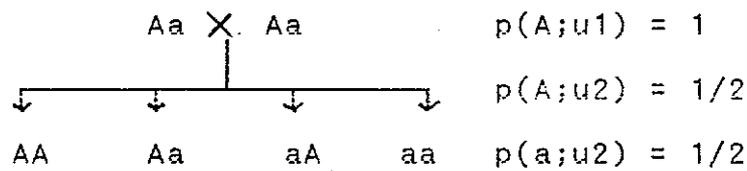
$r_i = 1$, untuk setiap (r_1, r_2, r_3) .

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 r_i &= r_1(u_1, u_2) + r_2(u_1, u_2) + r_3(u_1, u_2) \\
&= [p(A; u_1) \cdot p(A; u_2)] + [p(A; u_1) \cdot p(a; u_2) + \\
&\quad p(a; u_1) \cdot p(A; u_2)] + [p(a; u_1) \cdot p(a; u_2)] \\
&= p(A; u_1) \cdot [p(A; u_2) + p(a; u_2)] + p(a; u_1) \cdot [p(A; u_2) + \\
&\quad p(a; u_2)] \\
&= p(A; u_1) \cdot 1 + p(a; u_1) \cdot 1 \\
&= p(A; u_1) + p(a; u_1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Jadi setiap koordinat jumlahnya tidak lebih dari 1 atau untuk setiap koordinat (r_1, r_2, r_3) terbukti bahwa $0 \leq r_i \leq 1$, $i=1, 2, 3$ dan $\sum_{i=1}^3 r_i = 1$. Sehingga range dari fungsi reproduksi $r(U \times U) \subseteq R^3$ merupakan sebuah himpunan dari vektor-vektor probabilitas (bukti selesai).

Sekarang akan dibahas hubungan antara sistem aksioma θ dengan model real dari reproduksi kacang kapri.

Mengingat jika induk-induk mempunyai genotip AA dan Aa maka gamet dari induk pertama (AA) membawa gen A dengan probabilitas 1, sedang gamet-gamet dari induk kedua (Aa) membawa gen A dengan probabilitas 1/2 dan gen a dengan probabilitas 1/2. Ternyata keturunan dari reproduksi AA dan Aa akan mempunyai genotip AA dengan probabilitas 1/2 dan genotip Aa dengan probabilitas 1/2. Salah satu metode untuk menampilkan kenyataan ini adalah dengan menetapkan unsur (AA, Aa) dari $U \times U$ sebagai vektor $(1/2, 1/2, 0)$. Keterangan tersebut dapat dijelaskan dengan skema berikut ini.



$$r_1(u_1, u_2) = p(A;u_1) \cdot p(A;u_2) = 1 \cdot 1/2 = 1/2$$

$$r_2(u_1, u_2) = p(A;u_1) \cdot p(a;u_2) + p(a;u_1) \cdot p(A;u_2) \\ = 1 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2 = 1/2$$

$$r_3(u_1, u_2) = p(a;u_1) \cdot p(a;u_2) = 0 \cdot 1/2 = 0$$

Jadi $r(AA, Aa) = (1/2, 1/2, 0)$

Penaksiran umum dari fungsi reproduksi adalah sebagai berikut :

$r(u_1, u_2) = (r_1(u_1, u_2), r_2(u_1, u_2), r_3(u_1, u_2))$ dengan $r_1(u_1, u_2)$ merupakan koordinat pertama dari $r(u_1, u_2)$ ditafsirkan sebagai probabilitas banyaknya tumbuhan yang mempunyai genotip AA dari induk-induk u_1 dan u_2 . Koordinat kedua dan ketiga masing-masing r_2 dan r_3 ditafsirkan sebagai probabilitas bahwa genotipnya akan menjadi Aa dan aa. Karakter dari keturunan-keturunan tersebut sangat dipengaruhi karakter dari induk-induknya.

TEOREMA 3.2 :

Jika $u_1, u_2 \in U$ maka $r(u_1, u_2) = r(u_2, u_1)$

BUKTI TEOREMA 3.2 :

Dengan melihat aksioma 3.2 diperoleh :

$$r(u_1, u_2) = (r_1(u_1, u_2), r_2(u_1, u_2), r_3(u_1, u_2)) \\ = (p(A;u_1) \cdot p(A;u_2), p(A;u_1) \cdot p(a;u_2) + \\ p(a;u_1) \cdot p(A;u_2), p(a;u_1) \cdot p(a;u_2))$$

Berdasarkan sifat komutatif terhadap penjumlahan dan perkalian, maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
 r(u_1, u_2) &= (p(A;u_2) \cdot p(A;u_1), p(a;u_1) \cdot p(A;u_2) + \\
 &\quad p(a;u_1) \cdot p(A;u_2), p(a;u_1) \cdot p(a;u_2)) \\
 &= (p(A;u_1) \cdot p(A;u_2), p(A;u_1) \cdot p(a;u_2) + \\
 &\quad p(a;u_1) \cdot p(A;u_2), p(a;u_1) \cdot p(a;u_2)) \\
 &= (r_1(u_2, u_1), r_2(u_2, u_1), r_3(u_2, u_1)) \\
 &= r(u_2, u_1)
 \end{aligned}$$

Bukti selesai

Kembali pada penaksiran di atas dan membandingkan garis keturunan yang dihasilkan oleh model ini dengan hasil sesungguhnya dari keturunan-keturunan yang diamati di dalam laboratorium. Hasil perbandingan menunjukkan validitas model sebagai suatu abstraksi dari proses reproduksi.

Meninjau kasus di atas yaitu dua galur murni mula-mula disilangkan dan keturunan-keturunan yang diperoleh dihasilkan dari fertilisasi diri. Ternyata jika induk-induk mempunyai genotip AA dan aa, maka $r(AA, aa) = (0, 1, 0)$. Berarti keturunan-keturunan generasi pertama semuanya mempunyai genotip Aa atau berbentuk licin. Selanjutnya dengan menggunakan model, reproduksi dari generasi pertama dengan cara fertiilisasi diri menghasilkan $r(Aa, Aa) = (1/4, 1/2, 1/4)$.

Informasi yang diperoleh sejauh ini dengan penaksiran yang dilakukan dapat diringkas sebagai berikut :

