BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. Model Matematika

Banyak permasalahan di luar Matematika, misalnya dalam bidang Biologi, Ekonomi, Kimia, Fisika dan lain-lain, seringkali tidak bisa diselesaikan secara langsung. Untuk mengatasi hal ini, seringkali suatu permasalahan dapat diselesaikan secara matematika, dengan terlebih dahulu menterjemahkan permasalahan yang dihadapi ke dalam bahasa Matematika yang disebut model matematika dari permasalahan tersebut.

Model adalah gambaran (perwakilan) suatu objek yang disusun dengan tujuan tertentu. Objek disini dapat berupa kejadian, proses, sistem dan lain sebagainya. Melalui model, orang dapat memperoleh gambaran yang lebih jelas mengenai objek, dapat mengadakan percobaan terhadap model tanpa mengganggu objek dan dapat membuat gambaran masa depan.

Langkah-langkah yang ditempuh dalam penyusunan model matematika, dapat dirinci menjadi enam langkah, yaitu :

1. Perumusan masalah nyata (real).
2. Penyusunan model (penyusunan dalam bahasa matematika).
3. Penyelesaian masalah dalam model dengan alat matematika yang sesuai.
4. Penafsiran kembali ke sistemnya (interpretasi ke dunia nyata).
5. Pengkajian penyelesaian dengan mengadakan percobaan-percobaan.

6. Pelaksanaan/penggunaan hasil sesuai dengan tujuan yang ingin dicapai.

Model disebut baik, bila model mampu memberikan gambaran objeknya dengan cukup jelas, sehingga tujuan penyusunan model tercapai.

2.2. Model Aksiomatik

Untuk menyelesaiakan suatu masalah dengan model matematika aksiomatik (untuk selanjutnya disingkat model aksiomatik saja), terlebih dahulu dirumuskan sistem aksioma, yaitu menentukan unsur-unsur tak terdefinisikan (undefined terms), beserta ungkapan-ungkapan aksioma yang berkaitan dengan unsur tak terdefinisikan tersebut. Masing-masing aksioma tidak bertentangan satu dengan yang lain, yang banyaknya berhingga, dibuat tergantung cakupan masalah yang akan diselesaikan.

Dari sistem aksioma diturunkan berbagai konsekuensi logis yang selanjutnya disebut teorema. Untuk membuktikan apakah teorema benar dan tidak bertentangan dengan aksioma, maka dibuat definisi-definisi bila diperlukan. Sistem aksioma, teorema-teorema dan definisi-definisi tersebut membangun suatu teori.

Pengertian-pengertian dalam model aksiomatik :

1. Unsur tak terdefinisikan adalah unsur/konsep dasar untuk mendefinisikan konsep berikutnya, misalnya : titik, garis, pohon, kebun dan lain-lain.
2. Aksioma adalah suatu anggapan (asumsi) dalam sistem

matematika atau logika yang telah diterima sebagai suatu kebenaran tanpa suatu bukti. Dari sini selanjutnya dapat ditarik suatu teorema.

3. Sistem aksioma adalah kumpulan dari unsur-unsur tak terdefinisikan bersama aksioma-aksioma yang diungkapkan dengan unsur tak terdefinisikan tersebut. Dari sistem aksioma dapat diturunkan teorema-teorema, sehingga teorema merupakan konsekuensi logis dari aksioma.
4. Teorema adalah konsekuensi logis dari aksioma. Dalam model aksiomatik teorema-teorema harus dapat dibuktikan kebenaranya secara logis bahwa tidak bertentangan satu dengan yang lain.
5. Teori adalah kumpulan dari sistem aksioma, teorema dan definisi.

Suatu model logik dapat dibangun dari suatu sistem aksioma Σ, apabila pernyataan-pernyataan yang diturunkan dari sistem aksioma tersebut adalah benar dan merupakan suatu fakta yang dapat dibuktikan kebenaranya.

Sebelum dibahas masalah hubungan antara model logik dengan model real maupun model aksiomatik, terlebih dahulu diberikan contoh penyusunan sistem aksioma.

2.2.1. CONTOH MODEL AKSIOMATIK

Ambil Σ adalah suatu sistem aksioma dengan unsur-unsur tak terdefinisikan adalah pohon dan kebun, dan aksioma-aksiomanya sebagai berikut :

A_1 : Setiap kebun adalah himpunan pohon-pohon yang me-

memuat paling sedikit 2 pohon.

A_2 : Terdapat paling sedikit 3 pohon.

A_3 : Jika diberikan 2 pohon T_1 dan T_2 maka ada satu dan hanya satu kebun yang memuat kedua pohon tersebut.

A_4 : Diberikan suatu kebun F dan pohon T di luar F, maka ada satu dan hanya satu kebun F^c yang memuat T dan disjoint dengan F (yaitu $F \cap F^c = \phi$).

Dapat dibuktikan bahwa keempat aksioma di atas tidak saling bertentangan, sebagai berikut :

Aksioma A_1, untuk membuat permasalahan menjadi sederhana.

Aksioma A_2, agar permasalahan dapat dirumuskan dengan baik, dan tidak bertentangan dengan aksioma A_1.

Aksioma A_3, agar permasalahan dapat dirumuskan dengan baik, dan tidak bertentangan dengan aksioma A_1 maupun dengan aksioma A_2.

Aksioma A_4, diberikan kebun F (paling sedikit memuat dua pohon sesuai aksioma A_1) dan pohon T diluar F (berarti aksioma A_2 terpenuhi), maka ada satu dan hanya satu kebun F' yang memuat T dan disjoint dengan F (berarti aksioma A_3 terpenuhi).

Terlihat aksiom-aksioma A_1, A_2, A_3 dan A_4 tidak saling bertentangan.

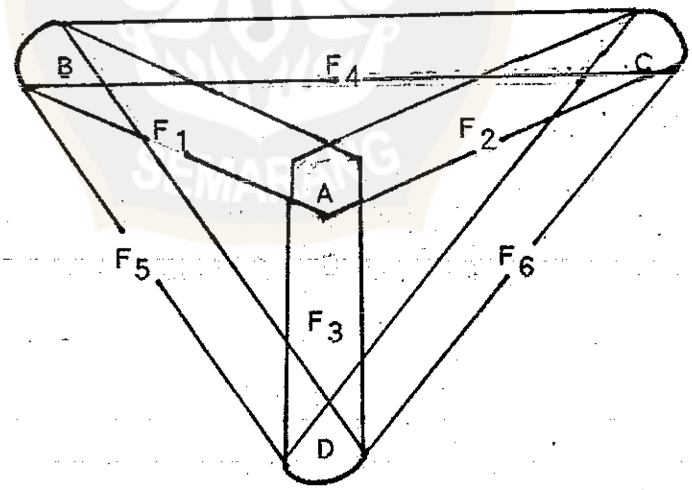
MODEL LOGIK DARI Σ :

1. Model logik 1

Pohon mempunyai arti dunia real biasa. Serumpun tiga pohon akan membentuk model logik dari Σ. Bila hanya ada tiga pohon, maka hanya ada satu kebun yang memuat ketiga pohon tersebut. Dengan model ini dapat dilihat bahwa keempat aksioma di atas berlaku dan tidak saling bertentangan.

2. **Model logik 2**

Pohon mempunyai arti dunia real biasa. Dalam hal ini, kita mempunyai kumpulan dari empat pohon A, B, C, dan D, sehingga dapat didefinisikan enam kebun yang masing-masing memuat dua dan hanya dua pohon : $F_1 = \{A,B\}$, $F_2 = \{A,C\}$, $F_3 = \{A,D\}$, $F_4 = \{B,C\}$, $F_5 = \{B,D\}$, $F_6 = \{C,D\}$. Dengan definisi kebun dan pohon seperti tersebut diatas, dapat dibuktikan kebenaran aksioma tersebut diatas.



gambar 2.1

Buktinya, terlebih dahulu dibuat diagram yang menggambarkan keenam kebun dan posisi keempat pohon, seperti yang terlihat pada gambar 2.1.

1. Aksioma A_1 benar, berdasarkan definisi keenam kebun F_i, $i=1,2,3,4,5,6$.
2. Aksioma A_2 benar, karena diketahui adanya empat pohon A, B, C, dan D.
3. Aksioma A_3 benar, dari gambar di atas terlihat untuk tiap dua pohon hanya termuat pada satu kebun.
4. Aksioma A_4 benar, karena $F_1=\{A,B\}$ dan $F_1^c=F_6=\{C,D\}$, $F_2=\{A,C\}$ dan $F_2^c=F_5=\{B,D\}$, $F_3=\{A,D\}$ dan $F_3^c=F_4=\{B,C\}$, sehingga berlaku $F \cap F^c = \emptyset$.

3. Model logik 3.

Pohon didefinisikan sebagai titik, sedang kebun didefinisikan sebagai garis dalam geometri Euclidean, maka sistem aksioma Σ dapat ditafsirkan ke dalam geometri Euclidean.

Misal sistem aksioma β dengan unsur-unsur tak terdefinisikan titik dan garis, dan aksioma-aksiomanya sebagai berikut :

A_1': Setiap garis lurus adalah kumpulan titik-titik yang berisi paling sedikit dua titik.

A_2': Terdapat paling sedikit tiga titik.

A_3': Jika diberikan dua titik T_1 dan T_2, maka ada satu dan hanya satu garis lurus yang melalui kedua titik tersebut.

A_4': Diberikan suatu garis F dan titik T berada di luar F maka ada satu dan hanya satu garis lurus F' yang sejajar dengan F.

Model logik 3 terlihat berbeda terlihat berbeda dengan model logik 1 dan model logik 2, yaitu sistem aksioma yang berlaku pada ilmu ukur Euclidean.

Pembahasan selanjutnya hanya didasarkan pada model logik 1 dan model logik 2 saja, selanjutnya diungkapkan pernyataan-pernyataan yang merupakan suatu teorema-teorema.

TEOREMA 2.1:

Misal diberikan sistem lebih dari dua kebun.

Apabila terdapat dua buah kebun berbeda maka terdapat tiga buah kebun berbeda.

Sebelum membuktikan kebenaran teorema 2.1, didefinisikan terlebih dahulu pengertian dua buah kebun berbeda.

DEFINISI 2.1:

Dua buah kebun F_1 dan F_2 dikatakan berbeda apabila $F_1 \neq F_2$ dengan F_1 dan F_2 dipandang sebagai himpunan elemen pohon-pohon yang berada pada masing-masing kebun.

BUKTI TEOREMA 2.1:

Ambil dua buah kebun berbeda F_1 dan F_2. Berdasarkan aksioma A_1 dan A_3 serta definisi di atas, dapat ditemukan sebuah pohon pada masing-masing kebun yang tidak berada pada kebun yang lain.

Andaikan $T_1 \in F_1$ tapi $T_1 \notin F_2$ dan $T_2 \in F_2$ tapi $T_2 \notin F_1$, menurut aksioma A_3 terdapatlah satu dan tidak lebih dari satu kebun yang memuat T_1 dan T_2, namakan kebun tersebut F_3.

Berarti $F_1 \neq F_3$ mengingat $T_2 \notin F_1$ dan $F_2 \neq F_3$ mengingat $T_1 \in F_2$, ini berarti F_3 adalah kebun yang berbeda dengan F_1 maupun F_2, jadi terbukti ada tiga kebun berbeda F_1, F_2 dan F_3.

TEOREMA 2.2:

Misal diberikan sistem lebih dari tiga kebun.

Apabila terdapat tiga buah kebun yang berbeda akan terdapat empat buah kebun yang berbeda.

BUKTI TEOREMA 2.2:

Andaikan F_1, F_2 dan F_3 tiga buah kebun yang berbeda, maka berdasarkan definisi 2.1 diperoleh:

F_1 dan F_2 dua buah kebun yang berbeda, berarti terdapat T_1 dimana $T_1 \in F_1$ dan $T_1 \notin F_2$.

F_2 dan F_3 dua buah kebun yang berbeda, berarti terdapat T_2 dimana $T_2 \in F_2$ dan $T_2 \notin F_3$.

F_3 dan F_1 dua buah kebun yang berbeda, berarti terdapat T_3 dimana $T_3 \in F_3$ dan $T_3 \notin F_1$.

Berdasarkan aksioma A_3, pasti ada satu dan tidak lebih dari satu kebun yang memuat T_1 dan T_2, andaikan kebun tersebut F_4 maka kebun F_4 ini pasti juga memuat T_3.

Dengan demikian diperoleh: $F_4=\{T_1,T_2,T_3\}$ dengan

$T_1 \in F_4-F_2$ berarti kebun F_4 dan F_2 berbeda,

$T_2 \in F_4-F_3$ berarti kebun F_4 dan F_3 berbeda,

$T_3 \in F_4-F_1$ berarti kebun F_4 dan F_1 berbeda.

Terbukti ada empat kebun yang berbeda, yaitu F_1,F_2,F_3

dan F_4.

Berdasarkan prinsip aplikasi logik, diperoleh hubungan antara teori dari suatu sistem aksioma dengan model logik dari sistem yang sama.

PRINSIP 2.1:

Setiap teorema dalam suatu teori yang diturunkan dari sistem aksioma Σ adalah berlaku benar untuk setiap model logik dari sistem aksioma Σ.

BUKTI PRINSIP 2.1:

a) Teorema 2.1 terhadap model logik 1 dan model logik 2.

Teorema 2.1 menyebutkan 'Jika ada dua kebun berbeda maka ada tiga kebun berbeda', apabila kalimat 'jika ada dua kebun berbeda' dinotasikan dengan A dan kalimat 'ada tiga kebun berbeda' dinotasikan dengan B maka teorema 2.1 dapat ditulis dengan kalimat A —> B.

(i) Pada model logik 1: karena hanya ada satu kebun berbeda maka A salah, akibatnya nilai logika dari A —> B adalah benar.

(ii) Pada model logik 2 : karena ada enam kebun berbeda, maka kalimat A —> B bernilai logika benar.

b) Teorema 2.2 terhadap model logik 1 dan model logik 2.

Teorema 2.2 menyebutkan, jika ada tiga kebun berbeda maka ada empat kebun berbeda. Apabila kalimat 'jika ada tiga kebun berbeda' dinotasikan dengan P dan kalimat 'ada empat kebun berbeda' dinatasikan dengan Q maka teorema 2.2 dapat ditulis dengan menggunakan kalimat matematika P —> Q.

(i) Pada model logik 1 : karena hanya ada satu kebun, maka P salah. Akibatnya nilai logika dari kalimat P —> Q bernilai benar.

(ii) Pada model logik 2 : karena ada enam kebun berbeda, maka kalimat P —> Q bernilai logika benar.

PRINSIP 2.2 :

Hukum kontradiksi berlaku untuk setiap model dari sistem aksioma Σ.

BUKTI PRINSIP 2.2 :

Perlu diketahui bahwa "Hukum Kontradiksi" menyatakan "Pernyataan S dan $\sim$S (negasi dari S) tidak dapat berlaku/benar secara bersama-sama".

Jika setiap model dari sistem aksioma Σ bernilai benar, maka negasi dari setiap model tersebut pasti bernilai salah dalam sistem aksioma Σ.

a) **Teorema 2.1 :**

Misal diberikan sistem lebih dari dua kebun.

Jika ada dua kebun berbeda maka ada tiga kebun berbeda.

Jadi teorema dapat ditulis :

$\forall F_1, F_2 \; . \; F_1 \neq F_2 \longrightarrow \exists F_3 \; . \; F_3 \neq F_1 \;\&\; F_3 \neq F_2$

Negasi dari teorema 1.1 adalah :

Ada dua kebun berbeda dan tidak dapat dibuat kebun ketiga yang berbeda dengan dua kebun semula, atau dengan kalimat matematik dapat ditulis :

$\exists F_1, F_2 \; . \; F_1 \neq F_2 \;\&\; (\forall F_3 \; . \; F_3 = F_1 \vee F_3 = F_2 \;)$

Pernyataan ini, menurut definisi 1 jelas salah karena tidak akan ditemukan dua kebun yang sama.

b) Teorema 2.2 :

Misal diberikan sistem lebih dari tiga kebun.

Jika ada tiga kebun berbeda maka ada empat kebun berbeda.

Teorema 2.2 dapat ditulis :

$\forall F_1, F_2, F_3 \; . \; F_1 \neq F_2 \neq F_3 \longrightarrow \exists F_4 \; . \; F_4 \neq F_1 \;\&\; F_4 \neq F_2 \;\&\; F_4 \neq F_3$

Negasi teorema 2.2 adalah :

Ada tiga kebun berbeda dan tidak dapat dibuat kebun keempat yang berbeda dengan tiga kebun semula, atau dengan kalimat matematik dapat ditulis :

$$\overline{\forall F_1, F_2, F_3 \; . \; F_1 \neq F_2 \neq F_3 \longrightarrow \exists F_4 \; . \; F_4 \neq F_1 \;\&\; F_4 \neq F_2 \;\&\; F_4 \neq F_3}$$

$$\exists F_1, F_2, F_3 \; . \; \overline{F_1 \neq F_2 \neq F_3 \longrightarrow \exists F_4 \; . \; F_4 \neq F_1 \;\&\; F_4 \neq F_2 \;\&\; F_4 \neq F_3}$$

$$\exists F_1, F_2, F_3 \; . \; (F_1 \neq F_2 \neq F_3) \;\&\; (\forall F_4 \; . \; F_4 = F_1 \vee F_4 = F_2 \vee F_4 = F_3) \quad ..(*)$$

Berdasarkan nilai kebenaran disjungsi pada pernyataan (*), diperoleh :

(1) $\exists F_1, F_2, F_3 . (F_1 \neq F_2 \neq F_3) \;\&\; (\forall F_4 . F_4 \neq F_1 \quad F_4 = F_2 \quad F_4 = F_3)$ atau

(2) $\exists F_1, F_2, F_3 . (F_1 \neq F_2 \neq F_3) \;\&\; (\forall F_4 . F_4 \neq F_1 \quad F_4 \neq F_2 \quad F_4 = F_3)$ atau

(3) $\exists F_1,F_2,F_3.(F_1 \neq F_2 \neq F_3)\ \&\ (\forall F_4.F_4=F_1\ \&\ F_4 \neq F_2\ \&\ F_4=F_3)$ atau

(4) $\exists F_1,F_2,F_3.(F_1 \neq F_2 \neq F_3)\ \&\ (\forall F_4.F_4=F_1\ \&\ F_4 \neq F_2\ \&\ F_4 \neq F_3)$ atau

(5) $\exists F_1,F_2,F_3.(F_1 \neq F_2 \neq F_3)\ \&\ (\forall F_4.F_4=F_1\ \&\ F_4=F_2\ \&\ F_4 \neq F_3)$ atau

(6) $\exists F_1,F_2,F_3.(F_1 \neq F_2 \neq F_3)\ \&\ (\forall F_4.F_4 \neq F_1\ \&\ F_4=F_2\ \&\ F_4 \neq F_3)$ atau

(7) $\exists F_1,F_2,F_3.(F_1 \neq F_2 \neq F_3)\ \&\ (\forall F_4.F_4=F_1\ \&\ F_4=F_2\ \&\ F_4=F_3)$ atau

Secara logika dan berdasarkan sistem aksioma Σ, maka ketujuh pernyataan diatas, masing-masing bernilai salah sehingga negasi teorema 2.2 diatas bernialai salah.

Kesimpulan :

Berdasarkan bukti-bukti prinsip 2.1 dan 2.2 dapat disimpulkan bahwa setiap model dari sistem aksioma Σ bernilai benar, arti-nya sistem aksioma Σ konsisten.

Dengan prinsip 2.1 dan prinsip 2.2 mudah untuk memeriksa konsistensi dari suatu sistem aksioma berdasarkan pembahasan di atas. Setiap sistem aksioma yang mempunyai suatu model logik adalah sistem yang konsisten. Sebagai contoh sistem aksioma Σ untuk pohon dan kebun yang telah disebutkan terlebih dahulu.

Langkah penting dalam membentuk suatu sistem aksioma adalah membentuk pernyataan-pernyataan yang diinginkan, untuk mengungkapkan prinsip-prinsip dasar dari dunia real yang dipelajari. Diharapkan sisten aksioma ini mempunyai model logik dalam dunia real tersebut. Proses pembentukan sistem aksioma ini disebut *Building Model*.

Dalam percobaan-percobaan dan pengamatan-pengamatan harus dapat memberikan fakta tentang dunia real yang sedang dipelajari. Kemudian mencoba untuk menjelaskan dan melukiskan fenomena tersebut. Hal ini bisa dilakukan dengan cara mengusulkan pernyataan-pernyataan tertentu yang mendasar dan terpenting. Seringkali pernyataan-pernyataan itu mengandung unsur-unsur tak terdefinisikan, yang dapat digunakan untuk membantu menjelaskan fakta-fakta yang teramati. Unsur-unsur bersama pernyataan-pernyataan tersebut menbangun suatu sistem aksioma, sistem aksioma inilah yang disebut dengan *model aksiomatik*. Langkah selanjutnya adalah menguji dan memodifikasi model aksiomatik, yaitu dengan meninjau konsekuensi-konsekuensi dari aksioma-aksioma yang menyusun model, dan menguji apakah konsekuensi-konsekuensi itu merupakan pernyataan-pernyataan yang benar tentang dunia real yang dipelajari.

Hubungan penggunaan istilah-istilah yang berbeda tersebut diatas, adalah sebagai berikut :

1. **Model real :**

   merupakan kumpulan pernyataan-pernyataan tentang objek real yang diperoleh dari suatu proses pada observasi, identifikasi dan aproximasi (pengamatan, pengenalan dan perkiraan).

2. **Model aksiomatik :**

   merupakan suatu sistem aksioma yang terdiri dari unsur-

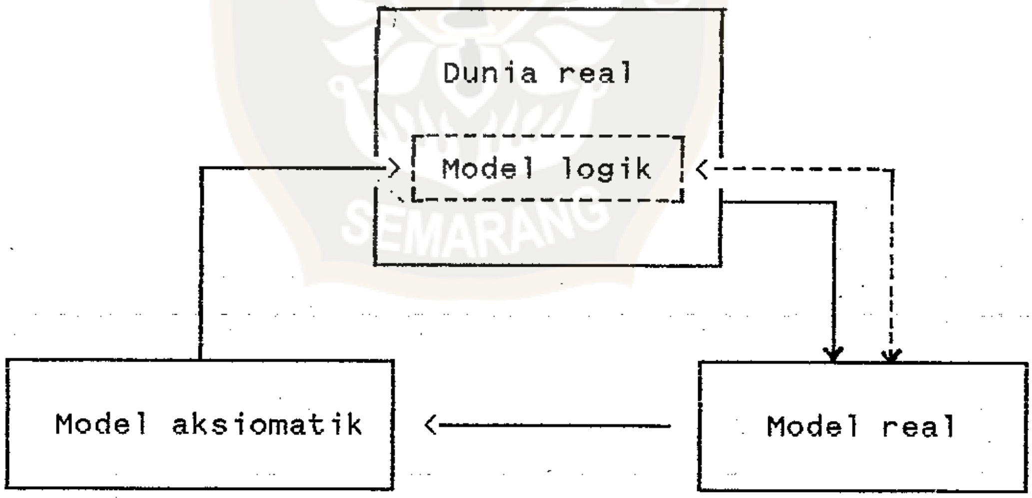
unsur tak terdefinisikan dan aksioma-aksioma yang didapatkan dengan jalan abstraksi dan kuantifikasi dari objek pada model real.

Model aksiomatik juga memuat definisi-definisi dan teorema-teorema yang diturunkan dari aksioma-aksioma.

3. Model logik :

merupakan kaitan antara objek real dengan unsur-unsur tak terdefinisikan dari aksioma, sehingga aksioma-aksioma itu menjadi persyaratan-persyaratan pada dunia real yang dapat diperiksa kebenarannya.

Pada gambar dibawah ini dilukiskan kaitan antara ketiga macam model diatas :



gambar 2.2

Keterangan :

1. Garis tebal menunjukkan hubungan biasa antara model-model yang berbeda. Model real didapatkan dari dunia real, model aksiomatik didapatkan dari model real dan model logik (bila ada) terdapat dalam masalah real.

2. Garis putus-putus antara model real dan model logik, menunjukkan bahwa seringkali susunan masalah real yang menyusun model real adalah merupakan model logik itu sendiri.

Misalnya pada dunia real diamati adanya empat pohon, dan ada kebun yang hanya berisi paling sedikit dua pohon. Pendataan tersebut di atas merupakan salah satu contoh dari inventarisasi masalah, data pengamatan dan lain-lain, diabstraksikan sehingga dapat ditentukan unsur-unsur tak terdefinisikan dan aksioma-aksiomanya, yang kemudian penggabungannya kita sebut sebagai model aksiomatik. Model aksiomatik juga memuat definisi-definisi dan teorema-teorema. Dari aksioma-aksioma yang dikaitkan dengan dunia real, membentuk model logik. Sebagai contoh misalkan terdapat empat pohon. Dari keempat pohon ini dapat didefinisikan enam kebun yang masing-masing tepat memuat dua pohon. Pemisalan ini sama dengan pernyataan fenomena real yang diamati dan didata sebagai model real di atas.

Jadi pernyataan dunia real yang menyusun model real merupakan model logik itu sendiri dan sebaliknya, sehingga hubungan antara model real dengan model logik saling terkait.

2.2.2. Independensi dan equivalensi

Dalam hal ini akan dibahas masalah relasi yang ada diantara sistem-sistem aksioma. Andaikan Γ suatu sistem aksioma, diketahui bahwa setiap aksioma pada sistem Γ merupakan unsur dalam membangun teori Γ. Dengan demikian tidak mungkin diambil suatu bagian dari sistem aksioma Γ secara keseluruhan. Sebaliknya, dimungkinkan beberapa aksioma dari suatu sistem aksioma menghasilkan/menurunkan suatu teorema yang sama. Mengingat masalah tersebut diatas, selanjutnya didefinisikan pengertian independen pada aksioma.

DEFINISI 2.2 :

Andaikan A merupakan sebuah aksioma dari sistem aksioma Γ.

A dikatakan independen dalam Γ apabila terdapat suatu model logik dari Γ dan model logik lain dari $(\Gamma \backslash A)+(\sim A)$.

Catatan :

$\Gamma \backslash A$: sistem aksioma yang diperoleh dari sistem aksioma Γ dengan meniadakan aksioma A.

$\sim A$: aksioma yang merupakan negasi dari aksioma A.

$(\Gamma \backslash A) + \sim A$: suatu sistem aksioma yang diperoleh dari sistem aksioma Γ dengan aksioma A diganti dengan negasinya.

Apabila aksioma A diketahui independen dalam Γ, maka dua model logik Γ dan $(\Gamma \backslash A) + (\sim A)$ harus dapat diturunkan. Terhadap salah satu model logik tersebut, setiap aksioma pada sistem aksioma Γ adalah benar, dengan demikian dari aksioma-aksioma pada Γ tidak mungkin diturunkan aksioma $\sim A$ (aksioma yang merupakan negasi dari aksioma A). Bila ini terjadi, berarti prinsip 2.1 dan prinsip 2.2 saling kontradiksi, karena A dan $\sim A$ keduanya benar di dalam model aksiomatik tersebut. Selanjutnya dalam model logik kedua, semua aksioma dari sistem Γ, kecuali A, adalah benar. Dengan demikian $\sim A$ juga benar. Juga berdasarkan prinsip 2.1 dan prinsip 2.2 diketahui bahwa dari aksioma-aksioma pada sistem Γ tidak dapat diturunkan aksioma A.

Dari uraian diatas dapat disimpulkan, apabila aksioma A independen dalam Γ, maka dari $\Gamma \backslash A$ secara logis tidak dapat diturunkan aksioma-aksioma A atau $\sim A$. Dengan kata lain aksioma A merupakan unsur nyata pada penyusunan teori yang dibangun oleh Γ.

Sebagai contoh, misalkan pada sistem aksioma Σ untuk pohon dan kebun, ditambahkan aksioma baru, yaitu :

Aksioma A_5 : ada tepat empat pohon.

Kemudian aksioma A5 independen didalam perluasan sistem aksioma Σ, namakan perluasan sistem aksioma Σ dengan sistem aksioma Γ. Independensi aksioma A5 mengikuti fakta bahwa dapat dijumpai suatu model logik dari sistem Σ yang mempunyai tepat empat pohon (model logik 2 dari sistem aksioma Σ merupakan model logik dari Γ), dan model lainnya yang tidak memiliki empat pohon (model logik 1 dari sistem Σ merupakan model logik dari $(\Gamma \backslash A) + (\sim A)$).

Dari pengertian aksioma independen, dapat disimpulkan bahwa penggantian suatu aksioma non independen dari suatu sistem aksioma tidak akan merubah teori darisistem tersebut. Jadi apabila suatu teori dibangun oleh suatu sistem aksioma yang masing-masing independen, maka teori tersebut tidak akan berubah dengan adanya penambahan aksioma non independen pada sistem aksioma bersangkutan. Tetapi apabila pada sistem aksioma tersebut ditambah atau dikurangi dengan aksioma independen, maka teori tersebut akan berubah.

Selanjutnya akan dibahas masalah perbandingan dua buah aksioma.

DEFINISI 2.3 :

Andaikan Σ_1 dan Σ_2 adalah dua buah sistem aksioma yang mempunyai unsur-unsur tak terdefinisikan sama, maka :

1. Σ_1 dikatakan lebih kuat dari Σ_2 ($\Sigma_1 \geq \Sigma_2$) apabila aksioma-aksioma pada Σ_2 terkandung dalam teori yang dibangun oleh Σ_1.
2. Σ_1 dikatakan ekuivalen dengan Σ_2 ($\Sigma_1 = \Sigma_2$) apabila dipenuhi $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$ dan $\Sigma_2 \geq \Sigma_1$.
3. $\Sigma 1$ dikatakan lebih kuat sempurna dari Σ_2 ($\Sigma_1 > \Sigma_2$) apabila dipenuhi $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$ tetapi Σ_2 tidak lebih kuat dari Σ_1.

Kegunaan definisi diatas pada masalah model matematika adalah pada masalah observasi. Misalnya, jika ada dua orang peneliti yang dalam pengamatannya masing-masing menyusun suatu sistem aksioma tentang suatu permasalahan yang sama, dan andaikan kedua sistem aksioma tersebut mempunyai unsur-unsur tak terdefinisikan yang sama pula. Maka dengan definisi tersebut di atas dapat dibandingkan kedua teori yang diturunkan dari kedua sistem aksioma tersebut. Bila ternyata kedua sistem aksioma equivalen berarti kedua teori yang dihasilkan sama dan saling melengkapi.

Dan jika ternyata suatu sistem aksioma lebih kuat tegas dari pada sistem aksioma yang lain, maka dapat disimpulkan :

1. Sistem aksioma yang lebih kuat memiliki struktur/susunan yang lebih lengkap, sehingga menjadi lebih sulit mendapatkan model logiknya.
2. Sistem aksioma yang lebih kuat mengandung semua teorema dari sistem yang lebih lemah. Dan teorema-teorema lain yang terdapat pada sistem yang lebih kuat tidak berlaku pada sistem yang lebih lemah, sehingga sistem tersebut menghasilkan teori yang lebih lengkap.

CONTOH 2.1 :

Misalnya ada dua sistem aksioma yang menggunakan unsur-unsur tak terdefinisikan sama, yaitu gerak dan penyelarasan. Maka disusunlah kedua sistem aksioma yang nantinya akan dibandingkan.

1. Sistem aksioma pertama diberi notasi μ, terdiri atas empat buah aksioma :

   A_1 : Ada paling sedikit satu gerakan.

   Definisi : M adalah himpunan semua gerakan.

   A_2 : Penyelarasan merupakan suatu fungsi C yang didefinisikan pada $M \times M$ dengan range (daerah hasil) dalam M.

(ditulis $C(m_1,m_2) = m_1 \, C \, m_2$)

A_3 : Untuk setiap $m \in M$ terdapat $i(m) \in M$ sedemikian sehingga $m C i(m) = m$.

A_4 : Untuk setiap $m \in M$ terdapat $m^* \in M$ sedemikian hingga $m^* C m = i(m)$.

Pernyataan $C(m_1,m_2)$ disebut penyelarasan gerak m_1 dan m_2. Selanjutnyadisusun model logik untuk μ, yaitu :

Model logik untuk μ

Misal a dan b menyatakan dua lokasi phisik (menyatakan dua tempat), dimana a adalah New York dan b adalah Los Angeles. Gerakan-gerakannya dinyatakan sebagai berikut :

S_1 = Gerak dari a ke b

S_2 = Gerak dari b ke a

S_3 = Tinggal di tempat (sesaat)

Fungsi penyelarasan mengkombinasikan gerakan-gerakan itu dalam bentuk :

$S_1 \, C \, S_1 = S_1$	$S_2 \, C \, S_1 = S_3$	$S_3 \, C \, S_1 = S_1$
$S_1 \, C \, S_2 = S_3$	$S_2 \, C \, S_2 = S_2$	$S_3 \, C \, S_2 = S_2$
$S_1 \, C \, S_3 = S_1$	$S_2 \, C \, S_3 = S_2$	$S_3 \, C \, S_3 = S_3$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa dengan M dan C (seperti tersebut diatas) dapat didefinisikan aksioma-aksioma dari Γ merupakan pernyataan yang benar, sehingga sistem ini menghasilkan suatu model logik untuk Γ.

Ambil $S_1, S_2, S_3 \in M$

a) Aksioma A_1 benar, karena terdapat lebih dari satu gerakan yaitu tiga gerakan.

b) Aksioma A_2 benar, karena setiap kombinasi penyelarasan gerak akan menghasilkan gerakan yang merupakan gerakan dalam M.

c) Aksioma A_3 benar, dapat dijelaskan sebagai berikut :

Dari fungsi penyelarasan diatas kita dapatkan :

S_1 C $S_1 = S_1$ dan S_1 C $S_3 = S_1$ sehingga $i(S_1) = S_1$ atau $i(S_1) = S_3$.

S_2 C $S_2 = S_2$ dan S_2 C $S_3 = S_2$ sehingga $i(S_2) = S_2$ atau $i(S_2) = S_3$.

S_3 C $S_3 = S_3$ sehingga $i(S_3) = S_3$.

Dari sini terlihat bahwa untuk setiap $S_1, S_2, S_3 \in M$ dapat ditemukan $i(S_1)$, $i(S_2)$, $i(S_3) \in M$ sedemikian hingga S_1 C $i(S_1) = S_1$, S_2 C $i(S_2) = S_2$ dan S_3 C $i(S_3) = S_3$.

d) Aksioma A_4 juga benar, dapat dijelaskan sebagai berikut :

Harus dapat dibuktikan bahwa untuk setiap $m \in M$ dapat ditemukan $m^* \in M$ sedemikian hingga m^* C $(m) = i\ (m)$.

(i) Seperti telah diketahui $i(S_1) = S_1$ atau $i(S_1) = S_3$, sementara itu dari fungsi penyelarasan didapatkan S_3 C$(S_1) = S_1$, S_1 C $(S_1) = S_1$ dan S_2 C $(S_1) = S_3$, sehingga didapatkan $S_1{}^* = S_3$ atau $S_1{}^* = S_1$ atau $S_1{}^* = S_2$.

(ii) Diketahui $i(S_2) = S_2$ atau $i(S_2) = S_3$, juga S_2 C$(S_2) = S_2$, S_3 C$(S_2) = S_2$ dan S_1 C$(S_2) = S_3$. Jadi $S_2{}^* = S_2$ atau $S_2{}^* = S_3$ atau $S_2{}^* = S_1$.

(iii) Diketahui $i(S_3) = S_3$ juga

S_3 C$(S_3) = S_3$ jadi $S_3* = S_3$.

Sehingga A_4 benar, demikian juga A_1, A_2 dan A_3.

2. Sistem aksioma kedua dinotasikan dengan Δ , yang terdiri atas lima aksioma, dua diantaranya aksioma A_1' dan A_2' adalah sama untuk μ.

   A_1' : ada paling sedikit satu gerakan.

   A_2' : fungsi penyelarasan merupakan suatu fungsi C yang didefinisikan pada $M \times M$ dengan range dalam M.

   A_3' : ada $i \in M$ sedemikian hingga m C $i = i$ C$m = m$ untuk setiap $m \in M$.

   A_4' : untuk setiap $m \in M$ terdapat $m^* \in M$ sedemikian hingga m^*
   C $m = m$ C $m^* = i$.

   A_5' : m_1 C $(m_2$ C $m_3) = (m_1$ C $m_2)$ C m_3, untuk setiap m_1, m_2, $m_3 \in M$.

Mudah ditunjukkan bahwa jika aksioma A_3' benar, maka aksioma A_3 itupun benar. Dengan mengambil $i(m) = i$, karena A_3' benar, maka diperoleh m C $i(m) = m$ C $i = m$, $\forall m \in M$. Demikian juga jika aksioma A_4' berlaku, maka aksioma A_4 juga berlaku, dengan $i(m)=i$ seperti pada pengambilan diatas. Jadi aksioma-aksioma dari τ dapat dijadikan teorema-teorema pada teori Δ . Berdasarkan definisi (2.3) diatas, dikatakan bahwa Δ lebih kuat dari pada μ ($\Delta \geq \mu$).

Permasalahan selanjutnya adalah, apakah Δ itu juga ekuivalen dengan μ ?. Untuk menunjukkan bahwa keduanya ekuivalen, harus dibuktikan bahwa $\mu \geq \Delta$, yaitu dengan membuktikan bahwa model logik dari μ merupakan model logik untuk Δ . Namun ternyata dengan fungsi pada model μ, A_5' tidak berlaku, karena jika diambil S_1, S_2, $S_3 \in M$ dapat ditemukan $(S_1 \circ S_1) \circ S_2 = S_1 \circ (S_1 \circ S_2)$, yaitu $(S_1 \circ S_1) \circ S_2 = S_1 \circ S_2 = S_3$ dan $S_1 \circ (S_1 \circ S_2) = S_1 \circ S_3 = S_1$. Karena aksioma A_5' tidak berlaku dalam μ, maka model logik dari μ bukan merupakan model logik untuk Δ , sehingga pernyataan $\mu \geq \Delta$ salah. Jadi sistem aksioma lebih kuat sempurna dari pada akasioma μ atau $\Delta > \mu$.