BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. VEKTOR

DEFINISI 2.1.

Himpunan berhingga $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dari n vektor dikatakan bebas linier jika dan hanya untuk skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang memenuhi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, maka

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots. = \alpha_n = 0$

Contoh :

Pandang himpunan vektor $\{v_1, v_2, v_3\}$ dimana $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ dan $v_3 = (0,0,1)$.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

$$(\alpha_1,0,0) + (0,\alpha_2,0) + (0,0,\alpha_3) = 0$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 0 = (0,0,0)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

DEFINISI 2.2.

Himpunan berhingga vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dikatakan bergantung linier bila terdapat skalar - skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bukan nol yang memenuhi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$

Contoh :

Pandang himpunan vektor $\{v_1, v_2, v_3\}$ dimana

$v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, dan $v_3 = (3,4,0)$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(3,4,0) = 0$

terdapat skalar bukan nol yang memenuhi, misal

$\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$ dan $\alpha_3 = -1$ memenuhi.

DEFINISI 2.3.

Suatu vektor v dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\{ u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ bila terdapat skalar-skalar $\{ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ sedemikian hingga

$$v = u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + \ldots + u_n\lambda_n$$

DEFINISI 2.4.

Suatu himpunan vektor $\{ u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ disebut sistem pembentuk dari ruang vektor V, ditulis dengan $V = L\{ u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ bila setiap vektor $v \in V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\{ u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

2.2. MATRIKS

DEFINISI 2.5.

Matriks adalah himpunan skalar yang disusun secara empat persegi panjang.

Secara umum matriks dapat dituliskan

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris } 1 \\ \longrightarrow \text{baris } 2 \\ \\ \longrightarrow \text{baris } m \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{kol } 1 & \text{kol } 2 & \text{kol } 3 & & \text{kol } n \end{array} & \end{array}$$

Matriks A dikatakan mempunyai m baris dan n kolom, dapat dituliskan dengan $(a_{ij})_{mxn}$

DEFINISI 2.6.

Matriks resiprokal adalah matriks bujur sangkar yang elemen di atas diagonal utama nilainya berkebalikan dengan elemen di bawah diagonal utama sedang elemen pada diagonal utama nilainya satu.

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \quad \text{dan} \quad a_{ii} = 1 \qquad i \neq j$$

2.3. NORM VEKTOR

Norm suatu vektor dinotasikan dengan $\| \ \|$, dan memenuhi 3 syarat berikut :

Jika vektor x, y berada dalam ruang vektor V :

(i) $\| x \| \geq 0$, $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\| ax \| = | a | \, \| x \|$, $a \in R$

(iii) $\| x+y \| \leq \| x \| + \| x \|$

DEFINISI 2.7.

p-norm dari vektor x dalam ruang vektor V ditulis dengan $\| x \|_p$, dan didefinisikan dengan :

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Untuk $p = \infty$, $\| x \|_p = \text{maks} | x_i |$.

Contoh :

$$x^T = (1, 2, 3)$$

$$\| x \|_1 = \left(\sum_{i=1}^{3} | x_i |^1 \right)^1 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{3} | x_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\| x \|_\infty = \text{maks} | x_i | = 3$$

2.4. EIGENVALUE DAN EIGENVECTOR

Jika A matriks bujursangkar berukuran n , suatu skalar λ disebut *eigenvalue* dari A jika ada vektor kolom $v \neq 0$ sedemikian hingga $A v = \lambda v$. Vektor v disebut *eigenvector* yang berhubungan dengan λ.

Persamaan $A\ v = \lambda\ v$ dapat ditulis sebagai

$$A\ v = \lambda\ I\ v$$

$$A\ v - \lambda\ I\ v = (\ A - \lambda I\ )\ v = 0$$

Merupakan susunan persamaan linier homogen yang jika diinginkan penyelesaian nontrivial $v \neq 0$ maka harus memenuhi syarat $|\ A - \lambda I\ | = 0$

Contoh :

Hitung eigenvalue dan eigen vector dari matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Misalkan λ skalar dan $v = [\ v_1,\ v_2,\ v_3\ ]^T$ vektor yang memenuhi :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.4.1)$$

merupakan susunan persamaan linier homogen, jika diinginkan jawab nontrivial $v \neq 0$, maka

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

$$1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 3 + 3\lambda = 0$$

$$3\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \longrightarrow \lambda^2(3-\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = 0 \;,\; \lambda_3 = 3$$

Untuk mencari eigenvector, harga-harga eigenvalue dimasukkan ke persamaan (2.4.1).

Untuk $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau :

$$\begin{aligned} v_1 + \tfrac{1}{2} v_2 + \tfrac{1}{4} v_3 &= 0 \\ 2 v_1 + v_2 + \tfrac{1}{2} v_3 &= 0 \\ 4 v_1 + 2 v_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Rank dari persamaan diatas adalah 1, maka dapat diambil

1 persamaan dan (n - r) = 2 parameter sebarang, ambil $v_1 = \alpha$ dan $v_2 = \beta$.

Misal persamaan yang dipilih $v_1 + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{4} v_3 = 0$, akan didapat $v_3 = -4 (\alpha + \frac{1}{2} \beta)$

$$\text{jadi : } v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau :

$$-2 v_1 + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{4} v_3 = 0 \qquad (2.4.2)$$

$$2 v_1 - 2 v_2 + \frac{1}{2} v_3 = 0 \qquad (2.4.3)$$

$$4 v_1 + 2 v_2 - 2 v_3 = 0 \qquad (2.4.4)$$

Rank dari persamaan diatas adalah 2, maka dapat diambil 2 persamaan dan (n - r) = 1 parameter sebarang, ambil $v_3 = \gamma$. Misal persamaan yang dipilih adalah persamaan (2.4.2) dan (2.4.3) maka :

$$\begin{array}{r} -2 v_1 + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{4} \gamma = 0 \\ 2 v_1 - 2 v_2 + \frac{1}{2} \gamma = 0 \\ \hline -\frac{3}{2} v_2 + \frac{3}{4} \gamma = 0 \end{array} +$$

$$v_2 = \frac{1}{2}\gamma \qquad (2.4.5)$$

kemudian persamaan (2.4.5) dimasukkan ke persamaan (2.4.2) didapat

$$-2\,v_1 + \frac{1}{4}\gamma + \frac{1}{4}\gamma = 0$$

$$v_1 = \frac{1}{4}\gamma$$

$$\text{jadi : } v = \gamma \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.1.

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ eigenvalue yang berlainan dari matriks bujursangkar A yang berukuran n dengan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eigenvector yang bersesuaian dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, maka $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ akan bebas linier.

BUKTI :

Pembuktian menggunakan induksi matematik.

Untuk n = 1 karena $v_1 \neq 0$ maka himpunan $\{ v_1 \}$ adalah bebas linier.

Misal untuk n-1 eigenvector yang bersesuaian dengan n - 1 eigenvalue yang berlainan adalah bebas linier.

Pandang $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ dari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

eigenvalue yang berlainan, ambil :

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = \emptyset \tag{2.4.6}$$

Jika (2.4.6) dikalikan dengan matriks A didapat :

$$c_1Av_1 + c_2Av_2 + \dots + c_nAv_n = \emptyset$$

$$c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \dots + c_n\lambda_nv_n = \emptyset \tag{2.4.7}$$

Kemudian kalikan (2.4.6) dengan λ_1 didapat :

$$c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_1v_2 + \dots + c_n\lambda_1v_n = \emptyset \tag{2.4.8}$$

Jika (2.4.7) dikurangi dengan (2.4.8) akan didapat :

$$c_2(\lambda_2-\lambda_1)v_2 + c_3(\lambda_3-\lambda_1)v_3 + \dots + c_n(\lambda_n-\lambda_1)v_n = \emptyset$$

Himpunan { v_2 , v_3, ... , v_n } adalah bebas linier sesuai dengan permisalan n - 1 eigenvector adalah bebas linier, sehingga :

$$c_2(\lambda_2-\lambda_1) = c_3(\lambda_3-\lambda_1) = \dots = c_n(\lambda_n-\lambda_1) = \emptyset$$

Karena λ_1, λ_2, ... , λ_n berlainan maka $(\lambda_2-\lambda_1)$, $(\lambda_3-\lambda_1)$, ... , $(\lambda_n-\lambda_1)$ hasilnya bukan nol, sehingga $c_2 = c_3 = \dots = c_n = \emptyset$

Kemudian dari (2.4.6) maka $c_1v_1 = \emptyset$, dan karena $v_1 \neq \emptyset$ maka haruslah $c_1 = \emptyset$, sehingga { v_1, v_2, ... , v_n} adalah bebas linier. ■ Terbukti

DEFINISI 2.8.

Eigenvalue dari matriks A dikatakan *eigenvalue dominan* jika nilai mutlaknya lebih besar dari nilai-nilai mutlak dari eigenvalue yang selebihnya.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

Sedangkan eigenvector yang bersesuaian dengan eigenvalue dominan dinamakan *eigenvector dominan.*

2.5. METODA POWER

Merupakan metoda yang digunakan untuk mencari eigenvalue dan eigenvector dominan dari suatu matriks bujursangkar.

Ambil A suatu matriks berukuran n x n mempunyai eigenvalue λ_1, λ_2, ... , λ_n yang dapat dibawa kedalam bentuk :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0 \qquad (2.5.1)$$

Kemudian v_1, v_2, ... , v_n merupakan eigenvector yang bersesuaian dengan eigenvalue λ_1, λ_2, ... , λ_n .

Menurut Teorema 2.1. maka { v_1, v_2, ... , v_n } bebas linier sehingga untuk vektor sebarang dalam ruang vektor V yang dibentuk oleh eigenvector v_1, v_2, ... , v_n maka vektor sebarang tersebut dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ambil vektor $u_o \in V$ maka u_o dapat ditulis dengan :

$$u_o = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$$

Apabila kedua ruas dikalikan dengan matriks A maka akan didapatkan :

$$\begin{aligned} A\,u_o &= A\,(\,c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n\,) \\ &= c_1(Av_1) + c_2(Av_2) + \ldots + c_n(Av_n) \\ &= c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \ldots + c_n\lambda_nv_n \end{aligned}$$

Dengan mengalikannya sekali lagi dengan matriks A akan didapatkan :

$$\begin{aligned} A^2u_o &= A\,(\,c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \ldots + c_n\lambda_nv_n\,) \\ &= c_1\lambda_1(Av_1) + c_2\lambda_2(Av_2) + \ldots + c_n\lambda_2(Av_n) \\ &= c_1\lambda_1^2\,v_1 + c_2\lambda_2^2\,v_2 + \ldots + c_n\lambda_n^2\,v_n \end{aligned}$$

Apabila cara seperti di atas diteruskan, maka setelah p perkalian dengan matriks A akan didapatkan :

$$A^pu_o = c_1\lambda_1^p\,v_1 + c_2\lambda_2^p\,v_2 + \ldots + c_n\lambda_n^p\,v_n \qquad (2.5.2)$$

Karena $\lambda_1 \neq \emptyset$ maka (2.5.2) dapat dituliskan menjadi

$$A^pu_o = \lambda_1^p\left\{\,c_1v_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p v_2 + \ldots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p v_n\right\} \qquad (2.5.3)$$

Kemudian dari (2.5.1) didapatkan :

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

yang mempunyai nilai lebih kecil dari satu, sehingga $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p, \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p, \ldots, \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p$ nilainya akan mendekati nol untuk p yang besar, sehingga (2.5.3) menjadi

$$A^p u_o \approx \lambda_1^p c_1 v_1 \qquad (2.5.4)$$

$\lambda_1^p c_1 v_1$ merupakan kelipatan skalar dari eigenvector dominan v_1, sehingga $\lambda_1^p c_1 v_1$ adalah juga eigenvector dominan. Maka menurut (2.5.4), $A^p u_o$ merupakan perkiraan yang semakin baik dari eigenvektor dominan jika p semakin besar.

Adapun algoritma dari metoda power diberikan sebagai berikut :

$$z_{p+1} = A\, u_p$$

$$\alpha_{p+1} = \| z_{p+1} \|_\infty \qquad p \geq 1$$

$$u_{p+1} = \frac{z_{p+1}}{\alpha_{p+1}}$$

Untuk vektor awal u_o biasanya diambil vektor satuan yaitu $u_o = [\ 1,\ 1,\ \ldots\ ,\ 1\ ]^T$

Contoh :

Hitung eigenvalue dan eigenvector dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Ambil vektor awal $u_o = [\ 1,\ 1,\ 1\ ]^T$

$$A\ u_o = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,00000 \\ 1,00000 \\ 1,00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,00000 \\ 12,00000 \\ 18,00000 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 6,00000 \\ 12,00000 \\ 18,00000 \end{bmatrix} \times \frac{1}{18,00000} = \begin{bmatrix} 0,33333 \\ 0,66667 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$$

$$A\ u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,33333 \\ 0,66667 \\ 1,00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,66667 \\ 8,66667 \\ 12,66667 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 4,66667 \\ 8,66667 \\ 12,66667 \end{bmatrix} \times \frac{1}{12,66667} = \begin{bmatrix} 0,36842 \\ 0,68421 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$$

$$A\ u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,36842 \\ 0,68421 \\ 1,00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,73684 \\ 8,84211 \\ 12,94737 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 4,73684 \\ 8,84211 \\ 12,94737 \end{bmatrix} \times \frac{1}{12,94737} = \begin{bmatrix} 0,36585 \\ 0,68293 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$$

$$A\ u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,36585 \\ 0,68293 \\ 1,00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,73171 \\ 8,82927 \\ 12,92683 \end{bmatrix}$$

$$u_4 = \begin{bmatrix} 4,73171 \\ 8,82927 \\ 12,92683 \end{bmatrix} \times \frac{1}{12,92683} = \begin{bmatrix} 0,36604 \\ 0,68302 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$$

$$A\ u_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,36604 \\ 0,68302 \\ 1,00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,73208 \\ 8,83019 \\ 12,92830 \end{bmatrix}$$

$$u_5 = \begin{bmatrix} 4,73208 \\ 8,83019 \\ 12,92830 \end{bmatrix} \times \frac{1}{12,92830} = \begin{bmatrix} 0,36602 \\ 0,68301 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$$

$$A\ u_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,36602 \\ 0,68301 \\ 1,00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,73205 \\ 8,83012 \\ 12,92820 \end{bmatrix}$$

$$u_6 = \begin{bmatrix} 4,73205 \\ 8,83012 \\ 12,92820 \end{bmatrix} \times \frac{1}{12,92820} = \begin{bmatrix} 0,36603 \\ 0,68301 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$$

$$A\ u_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,36603 \\ 0,68301 \\ 1,00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,73205 \\ 8,83013 \\ 12,92820 \end{bmatrix}$$

$$u_7 = \begin{bmatrix} 4,73205 \\ 8,83013 \\ 12,92820 \end{bmatrix} \times \frac{1}{12,92820} = \begin{bmatrix} 0,36603 \\ 0,68301 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$$

Nilai dari $u_7 \approx u_6$ sehingga proses dihentikan, maka :

eigenvector dominan adalah $\begin{bmatrix} 0,36603 \\ 0,68301 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$ dan eigenvalue dominan adalah 12,92820.

Untuk lebih jelasnya proses diatas disusun dalam bentuk tabel 2.1 berikut.

TABEL 2.1

Langkah p	0	1	2	3	4	5	6	7
Aproksimasi terhadap v_1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,33333 \\ 0,66667 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,36842 \\ 0,68421 \\ 1,00900 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,36585 \\ 0,68293 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,36604 \\ 0,68302 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,36602 \\ 0,68301 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,36603 \\ 0,68301 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,36603 \\ 0,68301 \\ 1,00000 \end{bmatrix}$
Aproksimasi terhadap λ_1	-	19,00000	12,66667	12,94737	12,92693	12,92830	12,92820	12,92820