BAB II
LANDASAN TEORI

2.1. PEMROGRAMAN LINEAR

2.1.1 PENGERTIAN

Pemrograman Linear (PL) merupakan suatu model umum yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah pengalokasian sumber-sumber yang terbatas secara optimal dengan menggunakan model matematika. Istilah linear menunjukkan bahwa seluruh fungsi matematika yang ada di dalam model harus merupakan suatu fungsi linear, sedangkan programming pada hakekatnya adalah sinonim dengan perencanaan. Jadi PL mencakup perencanaan kegiatan-kegiatan untuk mencapai suatu hasil yang optimal, yaitu suatu hasil yang mencerminkan tercapainya sasaran tertentu yang paling baik diantara alternatif-alternatif yang mungkin, dengan menggunakan fungsi linear.

2.1.2. UNSUR-UNSUR DASAR PL

Di dalam PL terdapat tiga unsur dasar yaitu :

1. Variabel putusan, adalah variabel yang akan

dicari dan memberi nilai yang terbaik bagi tujuan yang ingin dicapai.

2. Fungsi tujuan, adalah fungsi matematika yang harus dioptimalkan dan mencerminkan tujuan yang hendak dicapai.
3. Fungsi kendala, adalah fungsi matematika yang menjadi kendala bagi usaha mengoptimalkan fungsi tujuan dan mewakili kendala-kendala yang dihadapi.

2.1.3. BENTUK UMUM MODEL PL

Model PL adalah suatu model matematika yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut :

Mengoptimalkan : $$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

dengan syarat :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \quad \text{atau}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i \quad \text{atau}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$$

dan $X_j \geq 0$, untuk semua $i=1,2,.....,m$

$j=1,2,.....,n$ .... (2.1.)

Di mana :

Z : nilai fungsi tujuan atau nilai yang dioptimalkan.

C_j : sumbangan per unit kegiatan j, untuk kasus maksimum C_j menunjukkan keuntungan atau penerimaan per unit, dalam kasus minimum C_j menunjukkan biaya per unit.

X_j : banyaknya kegiatan ke j, jadi terdapat n variabel putusan.

b_i : banyaknya sumber daya ke i, jadi terdapat m jenis sumber daya.

a_{ij} : banyaknya sumber daya ke i yang dikonsumsi sumber daya ke j.

Pada prinsipnya, permasalahan-permasalahan di dalam PL dapat di pisahkan menjadi :

1. Masalah maksimum, yang mempunyai bentuk standar :

Memaksimumkan : $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

dengan syarat :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$$

dan $X_j \geq 0$

2. Masalah minimum, yang mempunyai bentuk standar :

Meminimumkan : $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j \, X_j$

dengan syarat :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, X_j \geqslant b_i$$

dan $X_j \geqslant 0$

Menurut Sri Mulyono [4], asumsi-asumsi PL adalah :

1. Linearity

   Linear menyatakan bahwa hubungannya proporsional (sebanding) yang berarti bahwa perubahan nilai variabel putusan akan mengakibatkan perubahan nilai fungsi dalam jumlah yang sama.

2. Aditivity

   Asumsi ini menyatakan bahwa nilai tujuan tiap kegiatan tidak saling mempengaruhi, maksudnya tidak ada korelasi antara variabel putusan.

3. Devisibility

   Asumsi ini berarti bahwa nilai hasil yang diperoleh variabel putusan tidak harus bilangan bulat.

4. Deterministik

   Asumsi ini menyatakan bahwa di dalam PL semua parameter model (C_j, a_{ij}, dan b_i) konstan.

2.1.4. PENYELESAIAN MASALAH PL

Di dalam menyelesaikan masalah-masalah PL terdapat tiga metode penyelesaian, yaitu :

1. Metode grafik

   Metode ini biasanya digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah PL dengan dua variabel putusan. Untuk masalah-masalah yang mempunyai variabel putusan lebih dari dua akan mengalami kesulitan dalam menyelesaikan jika digunakan metode grafik ini.

2. Dualitas / Primal Dual

   Istilah dualitas menunjukkan pada suatu kenyataan bahwa setiap PL terdiri dari dua bentuk, yaitu bentuk yang pertama/asli dinamakan primal, sedangkan bentuk yang ke dua dinamakan dual.

   Suatu masalah PL diselesaikan lewat dualnya disebabkan oleh :

   - Masalah primal merupakan masalah minimum, sedang dualnya merupakan masalah maksimum.
   - Dualnya hanya memiliki dua variabel sehingga dapat diselesaikan dengan metode grafik, dalam hal ini primalnya hanya mempunyai dua kendala.
   - Ingin menunjukkan bahwa masalah tersebut tidak fisibel yaitu dengan menunjukkan bahwa kasus dualnya merupakan masalah yang tidak dapat diselesaikan (unbounded).

3. Metode Simplek

Sesuai dengan metodologi yang telah disebutkan terdahulu, uraian selanjutnya akan ditekankan mengenai metode simpleknya.

Langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah-masalah PL dengan metode simplek adalah :

a. Membuat model matematika berdasarkan permasalahan yang ada, kemudian diubah kedalam bentuk standar.

b. Dari bentuk standar diubah kebentuk kanonik dengan menambahkan atau mengurangi dengan variabel slack (S) dengan ketentuan :

   - Untuk kasus maksimum S nya positif
   - Untuk kasus minimum S nya negatif

   Nilai koefisien biaya (cost koefisien) dari variabel slack (S) adalah nol.

c. Memeriksa apakah setelah diberi variabel slack di dalam matrik koefisien terbentuk suatu matrik identitas. Jika belum, ditambahkan variabel semu (V) sampai terdapat matrik identitas.

   Koefisien biaya untuk variabel semu (V) :

   - Untuk kasus maksimum : -M
   - Untuk kasus minimum : M

   Di mana M adalah bilangan positif yang cukup besar.

   Jika di dalam matrik koefisien sudah terdapat matrik identitas, maka disusun tabel awal seperti tabel 2.1.

Tabel 2.1.: Simplek

	C_j			
C_i	X_i \ X_j		b_i	R_i
		a_{11} a_{12} ... a_{1n} : : : : : : a_{m1} a_{m2} ... a_{mn}		
	Z_j $Z_j - C_j$			

Pengisian tabel tersebut adalah :

baris X_j : diisi dengan nama-nama variabel

C_j : diisi dengan koefisien biaya sesuai dengan variabel yang ada

$$Z_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_i \, a_{ij}$$

kolom X_i : diisi dengan nama-nama variabel basis (yang membentuk matrik identitas)

kolom C_i : diisi dengan koefisien biaya dari variabel -variabel yang menjadi basis

d. Memeriksa nilai $Z_j - C_j$, dengan ketentuan :

- Untuk kasus maksimum,syarat optimal adalah :

$$Z_j - C_j \geq 0, \text{ di mana } j = 1,2, \ldots , n$$

- Untuk kasus minimum, syarat optimal adalah :

$$Z_j - C_j \leq 0, \text{ di mana } j = 1,2, \ldots , n$$

Jika syarat optimal sudah dipenuhi, diadakan pemeriksaan ada atau tidak adanya variabel semu

(V). Jika ada berarti soal/kasus tidak layak (tidak fisibel). Jika tidak ada, diadakan pemeriksaan terhadap slack (S).

Baik ada atau tidaknya variabel slack tersebut, nilai optimal tetap dicapai dengan ketentuan :

- Jika ada variabel slack berarti ada syarat yang berlebihan (redundant)
- Jika tidak ada berarti tidak ada syarat yang berlebihan

Jika syarat-syarat optimal tidak dipenuhi, disusun tabel baru dengan mengganti variabel basis.

e. Untuk menentukan variabel basis dicari terlebih dahulu kolom kunci, yaitu :

- Untuk kasus maksimum, dipilih :

$$Z_k - C_k = \min (Z_j - C_j)$$

di mana $j = 1, 2, \ldots , n$

- Untuk kasus minimum, dipilih :

$$Z_k - C_k = \text{mak} (Z_j - C_j)$$

di mana $j = 1, 2, \ldots , n$

maka kolom ke-k sebagai kolom kunci, dan variabel pada kolom ke-k tersebut merupakan variabel yang akan masuk menjadi basis.

f. Untuk menentukan baris kunci, diisi kolom R_i dengan b_i / a_{ik}, di mana $a_{ik} > 0$ dan $i = 1, 2, \ldots m$.

Jika R_r = min R_i, maka baris ke r sebagai baris kunci, sehingga didapat a_{rk} sebagai elemen kunci, dan variabel pada baris ke-r tersebut merupakan variabel yang keluar dari basis.

g. Disusun tabel baru dengan pedoman :

- Nilai dari X_i diganti dengan X_r dan C_i diganti dengan C_k.
- Baris r baru = baris r lama / elemen kunci
- Baris i baru ($i \neq r$) = baris i lama - a_{ik} x baris r baru

Kemudian memeriksa $Z_j - C_j$, jika syarat optimal belum terpenuhi, kembali ke langkah d sampai syarat optimal terpenuhi.

CONTOH 1 :

Suatu sistem produksi menghasilkan dua macam barang yaitu X_1 dan X_2. Kedua produk ini diproses melalui dua macam fasilitas yaitu A dan B. Kapasitas maksimum yang tersedia untuk fasilitas A adalah 60 jam dan B 40 jam. Setiap unit X_1 diproses 20 jam pada fasilitas A dan 10 jam pada fasilitas B. Unit X_2 diproses 10 jam pada fasilitas A dan 10 jam pada fasilitas B. Laba satuan untuk produk tersebut adalah Rp. 40,00 dan Rp. 80,00. Tujuan yang diinginkan adalah memaksimumkan keuntungan.

Penyelesaian :

1. Kasus tersebut di atas disederhanakan kedalam bentuk tabel sebagai berikut :

	Waktu Proses		
Fasilitas	X_1	X_2	Kapasitas
A	20	10	60
B	10	10	40
Laba Sat	40	80	

2. Dari tabel di atas dibentuk model matematikanya, yaitu:

   Memaksimumkan : $Z = 40\ X_1 + 80\ X_2$

   dengan syarat : $20\ X_1 + 10\ X_2 \leqslant 60$

   $10\ X_1 + 10\ X_2 \leqslant 40$

   dan $X_1, X_2 \geqslant 0$

3. Dari model matematika di atas diubah kebentuk kanonik yaitu :

   Memaksimumkan : $Z = 40\ X_1 + 80\ X_2 + 0\ S_1 + 0\ S_2$

   dengan syarat : $20\ X_1 + 10\ X_2 + S_1 = 60$

   $10\ X_1 + 10\ X_2 + S_2 = 40$

   dan $X_1, X_2 \geqslant 0$

   Kemudian dibentuk tabel awal simplek, yaitu :

	C_j	40	80	0	0		
C_i	$X_i \backslash X_j$	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i	R_i
0	S_1	20	10	1	0	60	6
0	S_2	10	10	0	1	40	4
	Z_j	0	0	0	0	0	
	$Z_j - C_j$	-40	-80	0	0		

Tabel belum optimal, karena masih ada $Z_j - C_j < 0$

Untuk kolom kunci diambil kolom 2 karena $Z_2 - C_2$ merupakan nimimum dari $Z_j - C_j$

Untuk menentukan baris kunci diisi kolom R_i dengan

$R_1 = b_1/a_{12} = 60/10 = 6$

$R_2 = b_2/a_{22} = 40/10 = 4$

Baris kunci diambil untuk R_i yang minimum, sehingga baris ke 2 adalah baris kunci, sehingga elemen kuncinya adalah 10 dan S_2 merupakan variabel yang diganti dengan X_2.

Operasi baris :

baris ke 2 baru = 1/10 (10 10 0 1 40)

= (1 1 0 1/10 4)

baris ke 1 baru = (20 10 1 0 60) -

(10 10 0 1 40)

= (10 0 1 -1 20)

Kemudian disusun tabel baru, yaitu :

	C_j	40	80	0	0		
C_i	X_i \ X_j	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i	R_i
0	S_1	10	0	1	-1	20	
80	X_2	1	1	0	1/10	4	
	Z_j	80	80	0	8	320	
	$Z_j - C_j$	40	0	0	8		

Karena tidak ada $Z_j - C_j < 0$,maka tabel sudah optimal dengan penyelesaian optimalnya adalah :

$Z = 320$ untuk $X_1 = 0$ $S_1 = 20$

$X_2 = 4$ $S_2 = 0$

2.2. LINEAR GOAL PROGRAMMING

Di dalam model PL terdapat suatu kelemahan yaitu mempunyai keterbatasan untuk menyelesaikan masalah-masalah yang memiliki lebih dari satu tujuan atau sasaran yang diinginkan. Karena itu untuk menangani masalah tersebut dikembangkan suatu model Linear Goal Programming (LGP) dengan menghadirkan variabel simpangan yang berfungsi untuk menampung penyimpangan hasil penyelesaian terhadap tujuan atau sasaran yang diinginkan dalam fungsi kendala dan selanjutnya variabel simpangan tersebut diminimumkan di dalam fungsi tujuannya.

Karena LGP merupakan perluasan/pengembangan dari PL maka konsep dasar dari PL akan melandasi pembahasan mengenai LGP.

Jadi di dalam PL tujuannya bisa memaksimumkan atau meminimumkan, sedangkan dalam LGP tujuannya adalah meminimumkan penyimpangan-penyimpangan dari tujuan-tujuan yang diinginkan.

Di dalam LGP selain istilah-istilah dan lambang yang biasa digunakan dalam LP juga ada beberapa istilah atau lambang yang lain yaitu :

1. Tujuan/goal, adalah keinginan untuk meminimumkan angka penyimpangan dari suatu sasaran atau tujuan yang ingin dicapai pada suatu kendala tertentu.
2. Kendala tujuan, yaitu suatu tujuan yang

diekspresikan dalam persamaan matematika dengan memasukkan variabel simpangan.

3. Prioritas, adalah suatu sistem urutan yang memungkinkan tujuan-tujuan disusun secara ordinal dalam model LGP. Dilambangkan dengan P_k, di mana $k=1,2,\ldots,q$ dan q menunjukkan banyaknya tujuan dalam model.

4. Variabel simpangan, adalah variabel-variabel yang menunjukkan penyimpangan positif atau negatif dari suatu sasaran atau tujuan yang hendak dicapai. Variabel simpangan tersebut dibedakan menjadi dua yaitu :

   a. Variabel simpangan untuk menampung penyimpangan yang berada di bawah sasaran atau tujuan yang hendak dicapai, atau variabel variabel ini berfungsi untuk menampung penyimpangan negatif. Karena itu akan selalu berkoefisien +1 pada tiap kendala tujuan. Variabel ini dinotasikan dengan d^-, sehingga bentuk umum fungsi kendalanya adalah :

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + d_i^- = b_i \quad \ldots\ldots\ldots (\ 2.2.1.\ )$$

   di mana $i = 1,2, \ldots ,m$ dan $j = 1,2, \ldots ,n$

   b. Variabel simpangan untuk menampung penyimpangan yang berada di atas sasaran atau tujuan yang hendak dicapai, atau variabel ini berfungsi untuk menampung penyimpangan positif. Karena itu akan selalu berkoefisien -1 pada tiap kendala tujuan. Variabel ini dinotasikan dengan d^+, sehingga bentuk umum dari fungsi kendalanya adalah :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - d_i^+ = b_i \quad \ldots\ldots\ldots \ (\ 2.2.2.\ )$$

di mana i = 1,2, ... ,m dan j = 1,2, ... ,n

5. Bobot, adalah timbangan matematik yang diekspresikan dengan angka kardinal dan digunakan untuk membedakan variabel simpangan i di dalam suatu tingkat prioritas k.
   Dilambangkan dengan W_{ki}.

2.2.1. UNSUR UNSUR LGP

Setiap model LGP paling sedikit terdiri dari tiga unsur yaitu sebuah fungsi tujuan, kendala-kendala tujuan dan kendala non negatif. Selain itu di dalam LGP kadang-kadang terdapat unsur kendala struktural, artinya kendala-kendala lingkungan yang tidak berhubungan langsung dengan tujuan-tujuan masalah yang dihadapi. Kendala ini tidak dimasukkan dalam fungsi tujuan, karena variabel simpangan tidak dimasukkan dalam kendala ini.
Dari persamaan (2.2.1.) dapat ditulis menjadi :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i - d_i^-$$

Sedangkan dari persamaan (2.2.2.) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i + d_i^+$$

Dengan demikian dapat dilihat bahwa kedua variabel simpangan tersebut akan mendekati kendala tujuan dari dua arah yang berlawanan, dapat ditulis sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i + d_i^+ - d_i^- \quad \text{atau}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - d_i^+ + d_i^- = b_i \quad \ldots\ldots\ldots \text{(2.2.3.)}$$

Dari persamaan (2.2.3.) diketahui bahwa tujuan atau sasaran yang telah ditetapkan (b_i) akan tercapai jika d_i^- dan d_i^+ bernilai nol. Oleh karena itu d_i^- dan d_i^+ harus diminimumkan di dalam fungsi tujuan, sehingga model fungsi tujuan model LGP adalah :

Meminimumkan :

$$Z = \sum_{i=1}^{m} d_i^- + d_i^+ \quad \ldots\ldots\ldots \text{(2.2.4.)}$$

fungsi tujuan tersebut digunakan jika variabel simpangan dalam suatu masalah tidak dibedakan menurut prioritas atau bobot.

Selain fungsi tujuan pada persamaan (2.2.4.) ada dua jenis fungsi tujuan yang lain, yaitu :

1. Fungsi tujuan yang digunakan dalam suatu masalah di mana urutan tujuan (prioritas) diperhatikan, tetapi variabel simpangan dalam setiap tingkat prioritas memiliki kepentingan (bobot) yang sama.

   Fungsi tujuan tersebut adalah :

   Meminimumkan :

   $$Z = \sum_{i=1}^{m} P_k \ (d_i^- + d_i^+) \quad \ldots\ldots \ (2.2.5.)$$

   di mana P_k : simbol yang menunjukkan bahwa suatu tujuan diberi tingkat prioritas ke k

   k : 1,2, ... ,q

   q : banyaknya tujuan dalam model

   Dengan hubungan $P_1 >>> P_2 >>> \ldots >>> P_k$, dimana " >>> " berarti jauh lebih diutamakan.

2. Fungsi tujuan yang digunakan dalam suatu masalah di mana tujuan-tujuan diurutkan dan variabel simpangan pada setiap tingkat prioritas dibedakan dengan menggunakan bobot yang berlainan, yaitu W_{ki}.

   Fungsi tujuan tersebut adalah :

Meminimumkan :

$$Z = \sum_{i=1}^{m} W_{ki}\ P_k\ (d_i^- + d_i^+) \quad .... \ (\ 2.2.6.\ )$$

Untuk menyatakan fungsi tujuan kuncinya adalah memilih variabel simpangan yang benar untuk dimasukkan ke dalam fungsi tujuan.

Untuk memilih variabel simpangan tersebut dikelompokkan menjadi empat yaitu :

1. Untuk suatu sasaran dengan nilai tertentu

   Agar sasaran atau tujuan yang dikehendaki tercapai, maka penyimpangan di atas dan di bawah b_i harus diminimumkan. Sehingga yang dibutuhkan di sini adalah d^+ dan d^-, sehingga fungsi tujuannya adalah :

   Meminimumkan :

$$Z = \sum_{i=1}^{m} d_i^- + d_i^+$$

2. Untuk suatu sasaran di bawah nilai tertentu

   Berarti sasaran tersebut tidak boleh dilampaui, sehingga penyimpangan di atas b_i harus diminimumkan. Sehingga yang dibutuhkan di sini adalah d^+, sehingga fungsi tujuannya adalah :

   Meminimumkan :

$$Z = \sum_{i=1}^{m} d_i^+$$

3. Untuk suatu sasaran di atas nilai tertentu

Berarti sasaran tersebut tidak boleh lebih kecil dari b_i, sehingga penyimpangan di bawah b_i harus diminimumkan. Sehingga yang dibutuhkan di sini adalah d^-, sehingga fungsi tujuannya adalah :

Meminimumkan :

$$Z = \sum_{i=1}^{m} d_i^-$$

4. Untuk suatu sasaran yang berada pada suatu interval tertentu, misalnya :

$$a_i \leqslant a_{ij} X_j \leqslant b_i$$

Berarti sasaran atau tujuan tidak boleh lebih kecil dari a_i dan tidak boleh lebih besar dari b_i sehingga yang dibutuhkan di sini adalah d^- untuk membatasi penyimpangan di bawah a_i dan d^+ untuk membatasi penyimpangan di atas b_i, sehingga fungsi tujuannya adalah :

Meminimumkan :

$$Z = \sum_{i=1}^{m} d_i^- + d_i^+$$

Dalam LGP terdapat tiga perumusan kendala tujuan yang berlaian, yaitu seperti yang terdapat pad tabel 2.2.

Tabel 2.2. : Jenis Kendala Tujuan

Tipe	Kendala tujuan	Var. simp fs. tujuan
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_j \leq b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$	d_i^+
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_j \geq b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$	d_i^-
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_j = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$	$d_i^- + d_i^+$

Sumber : Linear Programming in Single & Multiple - Objective Systems, James P. Ignizio [2]

Kendala non negatif dalam LGP adalah X_j, d_i^-, $d_i^+ \geq 0$

Karena d_i^- dan $d_i^+ \geq 0$, maka nilai minimum dari d_i^- dan d_i^+ adalah nol. Sehingga kendala tujuan akan terpenuhi jika :

1. $d_i^- = d_i^+ = 0$, maka :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_j = b_i$$

yang dapat diartikan bahwa sasaran tercapai.

2. $d_i^- = 0$ dan $d_i^+ > 0$, maka :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j > b_i$$

yang berarti bahwa sasaran terlampaui.

3. $d_i^- > 0$ dan $d_i^+ = 0$, maka :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j < b_i$$

dengan demikian sasaran tidak tercapai.

2.2.2. PERUMUSAN MASALAH LGP

Perumusan suatu masalah LGP sangat mirip perumusan masalah LP. Tahap-tahap perumusan masalah LGP tersebut adalah :

1. Menentukan variabel putusan.
2. Menentukan sistem kendala.

   Kuncinya adalah menentukan nilai-nilai b_i dan menentukan a_{ij} yang cocok dan variabel putusan yang diikut sertakan dalam kendala.

   Di sini harus diperhatikan jenis penyimpangan yang diperbolehkan dari nila-nilai b_i.
3. Menentukan prioritas utama.

   Jika masalah tidak mempunyai urutan tujuan, tahap ini bisa dilewati.

4. Menentukan bobot.
   Jika tidak diperlukan lewati langkah ini.
5. Menyatakan fungsi tujuan.
   Kuncinya adalah memilih variabel simpangan yang benar untuk dimasukkan dalam fungsi tujuan, dengan melihat tabel 2.2.
6. Menyatakan kendala non negatif.

2.2.3. PENYELESAIAN MASALAH LGP

Beberapa metode untuk menyelesaikan masalah model LGP antara lain adalah : metode grafik, sequential LGP, algoritma LGP (multiphase simplek) dan dualitas.
Dalam penulisan ini hanya akan dibahas mengenai penyelesaian masalah LGP dengan menggunakan algoritma LGP yang merupakan modifikasi dari metode simplek pada penyelesaian masalah PL.

Menurut James P. Ignizio [3] tabel awal simplek untuk masalah LGP adalah seperti tabel 2.3.
di mana :

P_k = Tingkat prioritas ke-k, k = 1,2, ... , q

V = variabel permasalahan yang terdiri atas variabel putusan dan variabel deviasi.
Disebelah kanan V adalah seperangkat variabel-variabel non basis sedangkan di bawah V adalah seperangkat variabel-variabel basis.

b_i = vektor yang komponen-komponennya (b_1, ... , b_m)

merupakan tetapan ruas kanan sasaran.

$a_{i,s}$ = unsur dari baris ke-i dan kolom ke-s.

Pada tabel awal $a_{i,s}$ merupakan koefisien dari variabel non basis ke-s pada sasaran ke-i, dengan $i = 1, \ldots, m$ dan $s = 1, \ldots, n+m$, di mana m adalah banyaknya sasaran dan n adalah banyaknya variabel putusan.

$W_{k,i}$ = faktor pembobotan pada prioritas ke-k yang ber - kaitan dengan variabel non basis ke-i.

$U_{i,k}$ = faktor pembobotan pada prioritas ke-k yang ber - kaitan dengan variabel basis ke-i

$R_{k,s}$ = bilangan indikasi untuk prioritas ke-k di bawah variabel non basis ke-s

$$R_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} (a_{i,s} U_{i,k}) - W_{k,s} \quad \ldots\ldots(2.2.7.)$$

a_k = hasil dari prioritas ke-k

$$a_k = \sum_{i=1}^{m} (b_i U_{i,k}) \quad \ldots\ldots(2.2.8.)$$

dan langkah-langkah penyelesaian (algoritma LGP) adalah sebagai berikut :

1. Menyusun tabel awal simplek, mulai dengan k=1
2. Cek Optimalisasi

   Hitung nilai $R_{k,s}$. Selidiki apakah ada $R_{k,s} > 0$ dengan nilai $R_{l,s}$ tidak negatif di mana $l < q$. Jika tidak ada, lakukan langkah 6. Bila ada, sebut $R_{k,s'} = \text{mak} (R_{k,s} , R_{k,s} > 0 , s = 1, \ldots,$ $n+m$ dengan $R_{l,s} > 0$ untuk $l < q$) dengan syarat tidak terdapat harga indikasi yang negatif pada kolom s′ untuk prioritas yang lebih tinggi.

3. Menentukan variabel masuk basis.

   Variabel non basis berkaitan dengan kolom s′ merupakan variabel yang masuk menjadi basis.

4. Menentukan variabel yang keluar dari basis.

   Sebut $b_{i'} / Y_{i,s'} = \min (b_i / Y_{i,s'}, Y_{i,s'} > 0,$
   $$i = 1, \ldots , m)$$
   Maka variabel basis yang berkaitan dengan baris i′ adalah basis yang keluar dari basis.

5. Penyusunan tabel baru.

   a. Sediakan tabel kosong, menukar posisi untuk variabel di baris i′ dengan variabel pada kolom s′

   b. Baris i′ untuk tabel baru = baris i′ / $Y_{i',s'}$

   c. Kolom s′ untuk tabel baru = kolom s′ / $-Y_{i',s'}$

   d. Yang lain diisi dengan :

   $$b_i = b_i - (b_i Y_{i,s'}) / Y_{i',s'}$$
   $$Y_{i,s} = Y_{i,s} - (Y_{i',s} Y_{i,s'}) / Y_{i',s'}$$
   $$R_{k,s} = R_{k,s} - (Y_{i',s} R_{k,s'}) / Y_{i',s'}$$
   $$a_k = a_k - (b_{i'} R_{k,s'}) / Y_{i',s'}$$

   e. Kembali ke langkah 2.

6. Tetapkan $k = k + 1$.

   Bila $k > q$ solusi optimal diperoleh dan selesai.

   Bila $k \leq q$, kembali ke langkah 3.

Tabel 2.3. TABEL AWAL SIMPLEK DALAM LGP
DENGAN PRIORITAS DAN BOBOT

	P_k	$W_{k,1}$	...	$W_{k,n}$	$W_{k,n+1}$	...	$W_{k,n+m}$	
	:	:		:	:		:	
	:	:		:	:		:	
	P_1	$W_{1,1}$	...	$W_{1,n}$	$W_{1,n+1}$	...	$W_{1,n+m}$	
P_k ... P_1	V	X_1	...	X_n	d_1^+		d_m^+	b_i
$U_{1,k}$ ... $U_{1,1}$	d_1^-	$a_{1,1}$	...	$a_{1,n}$	$a_{1,n+1}$	...	$a_{1,n+m}$	b_1
: :	:	:		:	:		:	:
: :	:	:		:	:		:	:
: :	:	:		:	:		:	:
$U_{m,k}$ ... $U_{m,1}$	d_m^-	$a_{m,1}$	...	$a_{m,n}$	$a_{m,n+1}$	...	$a_{m,n+m}$	b_m
	P_1	$R_{1,1}$	...	$R_{1,n}$	$R_{1,n+1}$	...	$R_{1,n+m}$	a_1
	:	:		:	:		:	:
	:	:		:	:		:	:
	P_k	$R_{m,1}$	...	$R_{m,n}$	$R_{m,n+1}$	...	$R_{m,n+m}$	a_k

Sedangkan menurut Nesa Wu dan Richard Coppins [5], Siswanto [8] dan Ari W.[1] tabel awal simplek untuk LGP seperti pada tabel 2.4.

di mana :

Baris X_j = semua variabel, yang terdiri dari variabel putusan dan variabel simpangan.

Baris C_j = koefisien variabel pada fungsi tujuan. C_j diwakili oleh $W^-_{i,k}P_k$ dan $W^+_{i,k}P_k$, di mana $W^-_{i,k}$ adalah bobot dari d_i^- pada prioritas ke-k dan $W^+_{i,k}$ adalah bobot dari d_i^+ pada prioritas ke-k.

k = 1, ... , q

Kolom X_i = variabel yang menjadi basis.

Kolom C_i = koefisien yang sesuai dengan X_i.

$(Z_j-C_j)P_k$ = harga $Z_j - C_j$ pada tingkat prioritas ke-k, di mana

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} (a_{i,j} \; W^-_{i,k})$$

dan langkah-langkah penyelesaiannya sebagai berikut :

1. Menyusun tabel awal.
2. Meninjau baris $(Z_j - C_j)P_1$. Jika $(Z_j - C_j)P_1 < 0$ untuk semua j, maka dilanjutkan meninjau $(Z_j - C_j)P_2$. jika masih ada $(Z_j - C_j)P_1 > 0$ maka dipilih yang maksimum, misalnya kolom ke-h. Kolom ke-h tersebut disebut kolom kunci,

sedangkan X_h merupakan variabel yang akan masuk menjadi basis. Untuk pengambilan kolom kunci pada prioritas selanjutnya perlu diperhatikan bahwa pada kolom kunci tersebut tidak boleh ada nilai $Z_j - C_j < 0$ untuk prioritas yang lebih tinggi.

3. Hitung $R_i = b_i / a_{i,h}$, dengan $a_{i,h} > 0$. Kemudian pilih R_i yang minimum, misal baris ke-t, maka X_t adalah variabel yang keluar dari basis. Baris ke-t disebut baris kunci, dan $a_{t,h}$ disebut elemen kunci.
4. Susun tabel baru, setelah terjadi penggantian basis. Elemen-elemen pada baris baru diisi dengan melakukan operasi elementer terhadap baris, dengan rumus :

   baris t baru = baris t lama / elemen kunci

   baris i baru (i $\neq$ t) = baris i lama - $a_{i,h}$ x baris t baru
5. Kembali ke langkah 2 dan seterusnya sampai dicapai hasil yang paling memuaskan untuk tiap prioritas.

Tabel 2.4. TABEL AWAL SIMPLEK DALAM LGP DENGAN PRIORITAS DAN BOBOT

$\bar{C}i$	Cj	0	....	0	W_1^-,kPk	W_1^+,kPk	....	W_m^-,kPk	W_m^+,kPk		
	$\bar{X}i$ \ Xj	X1	....	Xn	d_1^-	d_1^+		d_m^-	d_m^+	bi	Ri
W_1^-,kPk	d_1^-	a1,1	....	a1,n	1	−1	....	0	0		
:	:	:		:	:	:		:	:		
:	:	:		:	:	:		:	:		
:	:	:		:	:	:		:	:		
W_m^-,kPk	d_m^-	am,1	....	am,n	0	0	....	1	−1		
(Zj − Cj)Pk										Zk	
(Zj − Cj)Pk−1										Zk−1	
:										:	
:										:	
:										:	
(Zj − Cj)P1										Z1	

2.2.4. PENGEMBANGAN TABEL SIMPLEK UNTUK LGP

Di dalam sub bab 2.2.3. dapat dilihat bahwa terdapat dua macam tabel awal simplek yaitu tabel 2.3. dan tabel 2.4.

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai tabel simplek yang baru untuk memperjelas / mempermudah dalam perhitungan dan pengecekan seperti terlihat pada tabel 2.5., di mana pengisian tabel tersebut adalah :

$W_{k,p}$ = koefisien dari variabel yang terdapat pada fungsi tujuan pada prioritas ke-k

= C_j untuk PL

p = 1,2,3,....,n+2m

$U_{i,k}$ = koefisien dari variabel yang menjadi basis ke-i pada prioritas ke-k

= C_i untuk PL

$a_{i,p}$ = koefisien dari kendala-kendala tujuan

$R_{k,p}$ = Pengisian $R_{k,p}$ ini menggunakan rumus 2.2.7. dimana s = 1,2, ... , n+m diganti dengan p = 1,2, ... , n+2m , seperti terlihat di bawah ini :

$$R_{k,p} = \sum_{i=1}^{m} (a_{i,p} U_{i,k}) - W_{k,p} \quad ...(3.1.)$$

= $Z_j - C_j$ untuk PL

a_k = pengisian a_k ini menggunakan rumus 2.2.8.

dengan langkah langkah penyelesaian sebagai berikut :

1. Dari model LGP dimasukkan dalam tabel awal seperti pada tabel 2.5.
2. Setelah itu memeriksa apakah penyelesaian sudah optimal, syarat optimal adalah $R_{k,p} \leqslant 0$
Untuk pemeriksaan $R_{k,p}$ ini harus diperhatikan tingkat prioritasnya, maksudnya jika $R_{1,p} \leqslant 0$ untuk semua p, maka dilanjutkan untuk prioritas selanjutnya, jika masih ada $R_{1,p} > 0$ dipilih

$$R_{1,p'} = \max R_{1,p}$$

dimana kolom ke p′ digunakan sebagai kolom kunci, sedang variabel pada kolom ke p′ tersebut merupakan variabel yang masuk menjadi basis.
Untuk pengambilan kolom kunci pada prioritas selanjutnya perlu diperhatikan bahwa pada kolom kunci tersebut tidak boleh ada nilai $Z_p - C_p < 0$ untuk prioritas yang lebih tinggi.
3. Selanjutnya menentukan baris kuncinya dengan cara menghitung :

$$R_i = b_i \;/\; a_{i,p'}, \text{ di mana } a_{i,p'} > 0$$

kemudian dipilih baris ke i′ yang merupakan minimum dari R_i sebagai baris kunci, sehingga didapat $a_{i',p'}$ sebagai elemen kunci, sedang variabel pada baris ke i' tersebut merupakan variabel yang keluar dari basis.

4. Setelah itu disusun tabel baru dengan pedoman sebagai berikut :

   - baris i' baru = baris i' lama / elemen kunci
   - baris i baru ($i \neq i'$) = baris i lama − $a_{i,p'}$ x baris i' baru

   kemudian kembali ke langkah 2 dan seterusnya, sampai didapat penyelesaian yang optimal atau yang dianggap paling memuaskan.

Untuk selanjutnya tabel baru inilah yang akan digunakan dalam menyelesaikan masalah LGP.

Tabel 2.5. TABEL AWAL SIMPLEK DALAM LGP DENGAN PRIORITAS DAN BOBOT

(Cp)	Pk	Wk,1	Wk,n	Wk,n+1	Wk,n+2	....	Wk,n+2m−1	Wk,n+2m		
	:	:	:	:	:		:	:		
	:	:	:	:	:		:	:		
	P1	W1,1	W1,n	W1,n+1	W1,n+2	....	W1,n+2m−1	W1,n+2m		
Pk ... P1	V	X1	Xn	$d1^-$	$d1^+$		dm^-	dm^+	bi	Ri
U1,k ... U1,1	$d1^-$	a1,1	a1,n	a1,n+1	a1,n+2	....	a1,n+2m−1	a1,n+2m	b1	R1
: :	:	:	:	:	:		:	:	:	:
: :	:	:	:	:	:		:	:	:	:
: :	:	:	:	:	:		:	:	:	:
Um,k ... Um,1	dm^-	am,1	am,n	am,n+1	am,n+2	....	am,n+2m−1	am,n+2m	bm	Rm
(Zp − Cp)	P1	R1,1	R1,n	R1,n+1	R1,n+2	....	R1,n+2m−1	R1,n+2m	a1	
	:	:	:	:	:		:	:	:	
	:	:	:	:	:		:	:	:	
	Pk	Rm,1	Rm,n	Rm,n+1	Rm,n+2	....	Rm,n+2m−1	Rm,n+2m	ak	

CONTOH 2 :

Di sini menggunakan soal pada contoh 1, dan disamping tujuan keuntungan juga diinginkan paling sedikit dua unit dari setiap jenis barang harus diproduksi, dengan ketentuan mengenai prioritas dari kedua tujuan tersebut yaitu :

- Prioritas 1 (P_1) adalah mencapai tujuan produksi dua unit untuk setiap jenis barang
- Prioritas 2 (P_2) adalah memaksimumkan keuntungan

Penyelesaian :

Untuk memaksimumkan keuntungan ditetapkan target minimumnya misal 1000, sehingga penyimpangan di bawah target harus diminimumkan, yang berarti bahwa yang dibutuhkan adalah d_1^-.

Sedangkan untuk mencapai tujuan produksi dua unit untuk tiap jenis barang, maka :

* $X_1 = 2$, sehingga penyimpangan di bawah dan diatas target harus diminimumkan, yang berarti bahwa yang dibutuhkan adalah d_2^- dan d_2^+.
* $X_2 = 2$, sehingga penyimpangan di bawah dan diatas target harus diminimumkan, yang berarti bahwa yang dibutuhkan adalah d_3^- dan d_3^+.

Karena prioritas pertama (P_1) adalah mencapai tujuan produksi dua unit untuk setiap jenis barang dan prioritas kedua adalah memaksimumkan keuntungan, maka didapat fungsi tujuan sebagai berikut :

Meminimumkan :

$$Z = P_2\ d_1^- + P_1\ d_2^- + P_1\ d_2^+ + P_1\ d_3^- + P_1\ d_3^+$$

Dengan mengingat kendala-kendala yang ada, maka didapat model matematikanya sebagai berikut :

Meminimumkan :

$$Z = P_2\ d_1^- + P_1\ d_2^- + P_1\ d_2^+ + P_1\ d_3^- + P_1\ d_3^+$$

dengan syarat :

$$40\ X_1 + 80\ X_2 + d_1^- - d_1^+ = 1000$$
$$X_1 + d_2^- - d_2^+ = 2$$
$$X_2 + d_3^- - d_3^+ = 2$$
$$20\ X_1 + 10\ X_2 \leq 60$$
$$10\ X_1 + 10\ X_2 \leq 40$$

dan X_1, X_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-,d_2^+, d_3^-, $d_3^+ \geq 0$

Kemudian dibuat tabel awal simplek seperti dapat dilihat pada tabel C.2.1.

Tabel C.2.1.

(Cp)	P2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
	P1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0		
P2 P1	V	X1	X2	$d1^-$	$d1^+$	$d2^-$	$d2^+$	$d3^-$	$d3^+$	S1	S2	bi	Ri
1 0	$d1^-$	40	80	1	−1	0	0	0	0	0	0	1000	25
0 1	$d2^-$	1	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	2	2
0 1	$d3^-$	0	1	0	0	0	0	1	−1	0	0	2	–
0 0	S1	20	10	0	0	0	0	0	0	1	0	60	3
0 0	S2	10	10	0	0	0	0	0	0	0	1	40	4
(Zp)	P1	1	1	0	0	1	−1	1	−1	0	0	4	
	P2	40	80	1	−1	0	0	0	0	0	0	1000	
(Zp−Cp)	P1	1	1	0	0	0	−2	0	−2	0	0		
	P2	40	80	0	−1	0	0	0	0	0	0		

Untuk menghitung $Z_p - C_p$ seperti pada tabel di atas digunakan rumus (3.1.)

sehingga didapat :

$$Z_1 - C_1 \text{ dengan } R_{1,1} = (\;0\;\;1\;\;1\;\;0\;\;0\;) \begin{pmatrix} 40 \\ 1 \\ 0 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} - 0$$

$$= 0 + 1 + 0 + 0 + 0$$

$$= 1$$

$$R_{2,1} = (\;1\;\;0\;\;0\;\;0\;\;0\;) \begin{pmatrix} 40 \\ 1 \\ 0 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} - 0$$

$$= 40 + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$= 40$$

Maksudnya nilai $Z_1 - C_1$ = 1 untuk prioritas pertama

= 40 untuk prioritas kedua

Selanjutnya dengan cara yang sama didapat nilai dari $Z_2 - C_2$ sampai dengan $Z_{10} - C_{10}$ sehingga didapatkan tabel seperti di atas.

Tabel tersebut belum optimal, karena masih ada $Z_p - C_p$ yang bernilai positif untuk prioritas pertama (P_1).

Untuk kolom kunci karena ada dua kolom yang nilainya sama dan merupakan maksimum dari $Z_p - C_p$ untuk prioritas yang pertama, maka dipilih salah satu misal diambil kolom ke 1

Untuk menentukan baris kunci di hitung $R_i = b_i / a_{i,1}$

Baris kunci diambil untuk R_i yang minimum dan positif, yaitu baris ke 2, sehingga didapat elemen kuncinya 1 dan d_2^- merupakan variabel yang diganti dengan X_1.

Selanjutnya untuk operasi barisnya adalah sebagai berikut

- baris 2 baru = brs 2 lama / elemen kunci
- baris 1 baru = brs 1 lama - (40 x brs 2 baru)
- baris 3 baru = brs 3 lama - (0 x brs 2 baru)
- baris 4 baru = brs 4 lama - (20 x brs 2 baru)
- baris 5 baru = brs 5 lama - (10 x brs 2 baru)

Kemudian dibuat tabel baru seperti terlihat pada tabel C.2.2.

Tabel C.2.2.

(Cp)	P2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
	P1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0		
P2 P1	V	X1	X2	$d1^-$	$d1^+$	$d2^-$	$d2^+$	$d3^-$	$d3^+$	S1	S2	bi	Ri
1 0	$d1^-$	0	80	1	–1	–40	40	0	0	0	0	920	11,5
0 0	X1	1	0	0	0	1	–1	0	0	0	0	2	–
0 1	$d3^-$	0	1	0	0	0	0	1	–1	0	0	2	2
0 0	S1	0	10	0	0	–20	20	0	0	1	0	20	2
0 0	S2	0	10	0	0	–10	10	0	0	0	1	20	2
(Zp)	P1	0	1	0	0	0	0	1	–1	0	0	2	
	P2	0	80	1	–1	–40	40	0	0	0	0	920	
(Zp–Cp)	P1	0	1	0	0	–1	–1	0	–2	0	0		
	P2	0	80	0	–1	–40	40	0	0	0	0		

Tabel tersebut belum optimal, karena masih ada $Z_p - C_p$ yang bernilai positif untuk prioritas pertama (P_1). Langkah selanjutnya sama dengan di atas, sehingga sampai didapatkan tabel seperti pada tabel C.2.3.

Tabel C.2.3.

(Cp)	P2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
	P1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0		
P2 P1	V	X1	X2	$d1^-$	$d1^+$	$d2^-$	$d2^+$	$d3^-$	$d3^+$	S1	S2	bi	Ri
1 0	$d1^-$	0	0	1	−1	−40	40	−80	80	0	0	760	
0 0	X1	1	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	2	
0 0	X2	0	1	0	0	0	0	1	−1	0	0	2	
0 0	S1	0	0	0	0	−20	20	−10	10	1	0	0	
0 0	S2	0	0	0	0	−10	10	−10	10	0	1	0	
(Zp)	P1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	P2	0	0	1	−1	−40	40	−80	80	0	0	760	
(Zp−Cp)	P1	0	0	0	0	−1	−1	−1	−1	0	0		
	P2	0	0	0	−1	−40	40	−80	80	0	0		

Dari tabel C.2.3. dapat dilihat bahwa untuk prioritas pertama (P_1) sudah optimal, karena $Z_p - C_p \leqslant 0$.

Pandang $Z_p - C_p$ untuk prioritas yang kedua, ternyata ada $Z_p - C_p > 0$, akan tetapi :

* d_3^+ tidak dapat masuk sebagai basis, karena terdapat $Z_p - C_p < 0$ untuk prioritas yang pertama (prioritas yang lebih tinggi)
* d_2^+ tidak dapat masuk sebagai basis, karena terdapat $Z_p - C_p < 0$ untuk prioritas yang pertama (prioritas yang lebih tinggi)

Dengan demikian maka hasil yang paling memuaskan adalah :

$Z = 760$ dengan $X_1 = 2$ $\qquad d_1^- = 760$

$X_2 = 2$ $\qquad d_1^+ = 0$

$S_1 = 0$ $\qquad$ $d_2^- = 0$

$S_2 = 0$ $\qquad$ $d_2^+ = 0$

$d_3^- = 0$

$d_3^+ = 0$

Dari hasil tersebut dapat diambil kesimpulan, yaitu :

- Tujuan 1 (P_1) tercapai yaitu dua unit untuk masing-masing jenis barang diproduksi
- Tujuan 2 (P_2) tidak tercapai

Keuntungan yang didapat adalah :

1000 - 760 = 240