BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 MATRIKS

Definisi 2.1

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan real atau komplex) yang disusun/dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

Skalar-skalar itu disebut elemen matriks.

Untuk batasnya, diberikan :

$$[\quad] \quad \text{atau} \quad (\quad) \quad \text{atau} \quad \|\quad\|$$

Contoh 2.1

Contoh matriks real :

$$\begin{array}{rc l} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & \sqrt{2} & 10 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris } 1 \\ \longrightarrow \text{baris } 2 \\ \longrightarrow \text{baris } 3 \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \text{kolom} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \end{array}$$

Matriks diberi nama dengan huruf besar A, B, C, D, dan lain-lain.

Secara lengkap ditulis matriks A = (a_{ij}), artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen tersebut.

Secara umum :

Pandang sebuah matriks :

$A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Boleh juga ditulis $A_{(m \times n)} = (a_{ij})$, dimana $(m \times n)$ disebut ukuran (ordo) dari matriks.

Matriks yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom saja disebut matriks baris atau matriks kolom.

Definisi 2.2

Dua buah matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dikatakan sama $A = B$, bila ukurannya sama $(m \times n)$ dan berlaku $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$).

Definisi 2.3

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ matriks berukuran sama, maka $A + B$ adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j.
Atau $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Definisi 2.4

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ matriks berukuran sama, maka pengurangan A dan B didefinisikan sebagai :
$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$.

Definisi 2.5

Jika λ suatu skalar dan $A = (a_{ij})$ maka matriks $\lambda A = (\lambda a_{ij})$; dengan kata lain matriks λA diperoleh dengan mengalikan semua elemen martiks A dengan λ.

Definisi 2.6

Pandang $A = (a_{ij})$ berukuran (m x n) dan $B = (b_{ij})$ berukuran (n x p).

Maka perkalian AB adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ berukuran (m x p), dimana :

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lj}$$

untuk setiap i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n.

Definisi 2.7

Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar ordo/ukuran n, maka B adalah inversi dari A (ditulis dengan A^{-1}) dan A adalah inversi dari B (ditulis dengan B^{-1}) jika dan hanya jika AB = I da BA = I, dimana I adalah matriks identitas.

2.2 VEKTOR PADA RUANG DIMENSI - n (R^n)

Definisi 2.8

Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai besar dan arah.

Jika vektor dinyatakan oleh suatu penggal garis berarah, maka panjang penggal garis merupakan besar vektor dan arah penggal garis merupakan arah vektor.

Suatu vektor $\bar{x}$ di dalam ruang dimensi n (R^n) adalah vektor yang berkomponen bilangan-bilangan real sejumlah n elemen yang ditulis dengan :

$$\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots).$$

Definisi 2.9

Dua vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ adalah sama jika dan hanya jika mempunyai besar dan arah yang sama.

Definisi 2.10

Ambil $\bar{x},\ \bar{y} \in R^n$ dan $\alpha \in R$.

Jumlahan $\bar{x} + \bar{y}$ didefinisikan sebagai :

$$\bar{x} + \bar{y} = (\ x_1+y_1,\ \ldots,\ x_n+y_n\ )$$

dan perkalian dengan bilangan real $\alpha\bar{x}$ didefinisikan dengan :

$$\alpha\bar{x} = (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \ldots,\ \alpha x_n).$$

Definisi 2.11

Perkalian skalar $\bar{x}.\bar{y}$ dari dua vektor $\bar{x},\ \bar{y} \in R^n$ didefinisikan dengan :

$$\bar{x}.\bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Definisi 2.12

Norma $\|\bar{x}\|$ dari suatu vektor $\bar{x} \in R^n$ didefinisikan dengan :

$$\|\bar{x}\| = (\bar{x}.\bar{x})^{1/2} = [(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2]^{1/2}$$

Theorema 2.1 (Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz)

Jika $\bar{x},\ \bar{y} \in R^n$, maka $|\bar{x}.\bar{y}| \le \|\bar{x}\|.\|\bar{y}\|$ dimana $|\bar{x}.\bar{y}|$

adalah nilai mutlak dari bilangan real.

Bukti :

$\bar{x}$, $\bar{y} \in R^n$, untuk sembarang $\alpha \in R$ berlaku :

$(\alpha\bar{x} + \bar{y})(\alpha\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x}.\bar{x}(\alpha)^2 + 2\bar{x}.\bar{y}\alpha + \bar{y}.\bar{y} \geq 0$

Karena akar persamaan kuadrat dalam α,

$$\bar{x}.\bar{x}(\alpha)^2 + 2\bar{x}.\bar{y}\alpha + \bar{y}.\bar{y} = 0$$

tidak ditemukan bilangan real yang berlainan, maka diskriminan dari pertidaksamaan tersebut adalah :

$$4(\bar{x}.\bar{y})^2 - 4(\bar{x}.\bar{x})(\bar{y}.\bar{y}) \leq 0$$

$$(\bar{x}.\bar{y})^2 \leq (\bar{x}.\bar{x})(\bar{y}.\bar{y})$$

Dari definisi norma di atas, maka :

$$|\bar{x}.\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|.\|\bar{y}\|$$

Definisi 2.13

Jika X, Y $\in R^n$, bilangan non negatif $\delta(X,Y) = \|X - Y\|$ disebut jarak antara titik X dan Y dalam R^n.

2.3 NORMA DAN METRIK

Norma merupakan ukuran besar vektor dan metrik merupakan ukuran jarak antara titik-titik dalam R^n.

2.3.1 Keluarga Norma L_p

Sesuai Definisi 2.12, untuk vektor $\bar{v}$ dan $\bar{w} \in R^n$ dan $k \in R$, maka :

1. $\|\bar{v}\| \geq 0$
2. $\|\bar{v}\| = 0$ jika dan hanya jika $\bar{v} = 0 \in R^n$
3. $\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$
4. $\|k\bar{v}\| = k\|\bar{v}\|$

Norma L_p dari $\bar{v} \in R^n$ diberikan oleh :

$$\|\bar{v}\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right]^{1/p}, \ p \in \{1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$$

Norma L_p dari $\bar{v} \in R^n$, jika $p = 1$, 2 dan ∞ adalah :

$$\|\bar{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|\bar{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

$$\|\bar{v}\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} \{|v_i|\}$$

Contoh 2.2

Ambil vektor $\bar{v} = (4, -5, 1)$

Norma L_1, L_2 dan L_∞ dari $\bar{v}$ adalah :

$$\|\bar{v}\|_1 = |4| + |-5| + |1|$$
$$= 10$$

$$\|\bar{v}\|_2 = \sqrt{|4|^2 + |-5|^2 + |1|^2}$$
$$= 6,48$$

$$\|\bar{v}\|_\infty = \max\{|4|, |-5|, |1|\}$$
$$= 5$$

Pembagian tiap-tiap komponen sebuah vektor oleh norma vektor, menormalkan sebuah vektor. Norma dari vektor yang dinormalkan, panjangnya adalah satu.

Contoh 2.3

Kenormalan vektor $\bar{v} = (2, -3, -7)$ menurut norma L_∞ adalah :

$$\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|_\infty} = \frac{(2,\ -3,\ -7)}{7} = \left(\frac{2}{7}\ ,\ -\frac{3}{7}\ ,\ -1\right)$$

dan norma L_∞ dari vektor yang dinormalkan adalah :

$$\max\left\{ \left|\frac{2}{7}\right|,\ \left|-\frac{3}{7}\right|,\ |-1| \right\} = 1$$

Kenormalan vektor $\bar{v} = (2,\ -3,\ -7)$ menurut norma L_1 adalah :

$$\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|_1} = \frac{(2,\ -3,\ -7)}{12} = \left(\frac{1}{6}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ -\frac{7}{12}\right)$$

dan norma L_1 dari vektor yang dinormalkan adalah :

$$\left|\frac{1}{6}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{7}{12}\right| = 1$$

2.3.2 Keluarga Metrik L_p

Sebuah metrik dalam R^n adalah sebuah fungsi jarak yang menetapkan sebuah skalar $\|X - Y\|$ jika dan hanya jika untuk semua X, Y, Z $\in R^n$, fungsi memenuhi aksioma :

1. $\|X - Y\| \geq 0$
2. $\|X - Y\| = \|Y - X\|$
3. $\|X - Y\| \leq \|X - Z\| + \|Z - Y\|$
4. Jika $X \neq Y$, maka $\|X - Y\| > 0$

Untuk metrik L_p, jarak antara dua titik X, Y $\in R^n$ diberikan oleh :

$$\|X - Y\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right]^{1/p},\ p \in \{\ 1,2,3,\ldots\ \} \cup \{\ \infty\ \}$$

Contoh 2.4

Diketahui 2 titik X(2,0,-1) dan Y(-7,3,-4).

Jarak antara X dan Y menurut metrik L_1, L_2, dan L_∞

adalah :

$$\|X - Y\|_1 = |2 + 7| + |0 - 3| + |-1 + 4|$$
$$= 15$$

$$\|X - Y\|_2 = \sqrt{|2 + 7|^2 + |0 - 3|^2 + |-1 + 4|^2}$$
$$= 9{,}949$$

$$\|X - Y\|_\infty = \max \{|2 + 7|, |0 - 3|, |-1 + 4|\}$$
$$= 9$$

Metrik L_∞ sering disebut metrik Tchebycheff.

2.3.3 Keluarga Metrik Pembobotan L_p

Ambil $X, Y \in R^n$. Untuk metrik pembobotan L_p, jarak antara X dan Y diberikan oleh :

$$\|X - Y\|_p^\lambda = \left[\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i |x_i - y_i|)^p\right]^{1/p}, \; p \in \{1,2,3,\ldots\} \cup \{\infty\}$$

dimana $\lambda \in R^n$ adalah vektor bobot non negatif.

Contoh 2.5. :

Ambil X(1,4,-3) dan Y(6,3,-4).

Dengan λ = (0,2, 0,3, 0,5), diperoleh :

$$\|X - Y\|_1^\lambda = 0{,}2|1 - 6| + 0{,}3|4 - 3| + 0{,}5|-3 + 4|$$
$$= 1{,}8$$

$$\|X - Y\|_2^\lambda = \sqrt{0{,}2|1 - 6|^2 + 0{,}3|4 - 3|^2 + 0{,}5|-3 + 4|^2}$$
$$= 1{,}158$$

$$\|X - Y\|_\infty^\lambda = \max \{0{,}2|1 - 6|, 0{,}3|4 - 3|, 0{,}5|-3 + 4|\}$$
$$= 1{,}0$$

Terlihat bahwa keluarga metrik L_p (bukan pembobotan) adalah keluarga metrik pembobotan L_p dengan $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$.

2.4 KOMBINASI LINIER DAN KOMBINASI KONVEKS DARI VEKTOR

Definisi 2.14

Pandang vektor-vektor $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \in R^m$ dan skalar $\lambda_i \in R$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Maka kombinasi linier dari vektor-vektor $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ didefinisikan sebagai :

$$\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{x}_n .$$

Ketergantungan nilai λ_i menyebabkan perbedaan sifat dari kombinasi linier.

Sebagai contoh, suatu kombinasi linier strictly positif dari vektor - vektor dibentuk oleh $\lambda_i > 0$ untuk semua i, sedangkan kombinasi linier non negatif dari vektor-vektor diperoleh bila $\lambda_i \geq 0$ untuk semua i.

Definisi 2.15

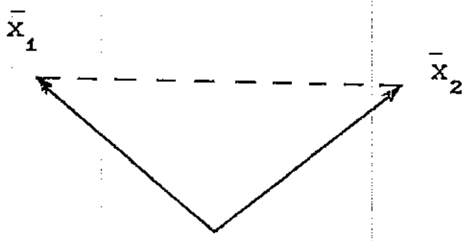
Kombinasi linier dari vektor-vektor $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \in R^m$ dikatakan kombinasi konveks jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{x}_i \text{ , dimana } \lambda_i \geq 0 \text{ dan } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$

Jika masing-masing dari $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, maka kombinasi liniernya disebut strictly positif kombinasi konveks.

Contoh 2.7

Kombinasi konveks dari $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ pada gambar 2.1 berikut adalah garis hubung antara $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$.



Gambar 2.1 Kombinasi konveks

Definisi 2.16

Suatu himpunan vektor $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ dimana $\bar{x}_i \in R^m$ untuk semua i adalah independen linier (bebas linier) jika dan hanya jika

$$\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{x}_n = 0$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$$

maka $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$

Kebalikan dari definisi di atas dinamakan dependent linier (bergantung linier).

Contoh 2.8

Pandang $\bar{x}_1 = (1,0,0)$, $\bar{x}_2 = (0,-1,0)$ dan $\bar{x}_3 = (0,9,-1)$

Himpunan $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ adalah bebas linier, karena untuk :

$$\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \lambda_3\bar{x}_3 = 0 \in R^3$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Contoh 2.9

Pandang $\bar{y}_1 = (1,2,3)$ dan $\bar{y}_2 = (0,0,0)$

Himpunan vektor $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2\}$ adalah bergantung linier, karena :

$$\lambda_1\bar{y}_1 + \lambda_2\bar{y}_2 = 0 \in R^3$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ dan } \lambda_2 \neq 0$$

Jadi, sebarang himpunan vektor yang memuat vektor nol adalah bergantung linier.

Jika suatu himpunan vektor $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ bergantung linier terdapat sekurang-kurangnya satu vektor yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari yang lain.

Theorema 2.2

Jika himpunan bagian dari n vektor bergantung linier, maka himpunan n vektor tersebut bergantung linier.

Bukti :

Misalkan p vektor $(p < n)$ $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p\}$ bergantung linier , akan dibuktikan bahwa $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ bergantung linier.

Karena $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p\}$ bergantung linier maka terdapat harga $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ yang tidak semuanya sama dengan nol, sedemikian sehingga :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{x}_i = 0$$

$$\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \ldots + \lambda_p\bar{x}_p = 0 \text{ dan } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{x}_i = 0$$

$$\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \ldots + \lambda_p\bar{x}_p + \lambda_{p+1}\bar{x}_{p+1} + \ldots + \lambda_n\bar{x}_n = 0$$

dimana $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \ldots = \lambda_n = 0$

Karena diketahui $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{x}_i = 0$$

maka $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ bergantung linier.

Theorema 2.3

Jika himpunan n vektor bebas linier, maka himpunan bagiannya bebas linier.

Bukti :

Ambil $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ bebas linier.

Andaikan himpunan bagiannya bergantung linier.

Menurut Theorema 2.2., jika himpunan bagiannya bergantung linier, maka himpunan n vektor bergantung linier.

Kontradiksi dengan $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ bebas linier.

Pengandaian harus diingkar.

Jadi, himpunan n vektor bebas linier, maka himpunan bagiannya bebas linier.

2.5 SIFAT-SIFAT HIMPUNAN DAN TITIK PADA R^n

2.5.1 Himpunan Konveks dan Titik Ekstrem

Definisi 2.17

Himpunan $S \in R^n$ konveks jika dan hanya jika untuk setiap titik x^1, $x^2 \in S$, titik $(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \in S$ untuk semua $\lambda \in [0,1]$.

Himpunan konveks tidak lain adalah jika semua titik pada garis hubung antara dua titik dalam himpunan S juga anggota S. Akibatnya adalah bahwa himpunan konveks di dalamnya tidak ditemukan lubang (hole). Dan himpunan yang hanya terdiri dari satu elemen adalah konveks.

Dengan demikian himpunan kosong (Ø) juga konveks.

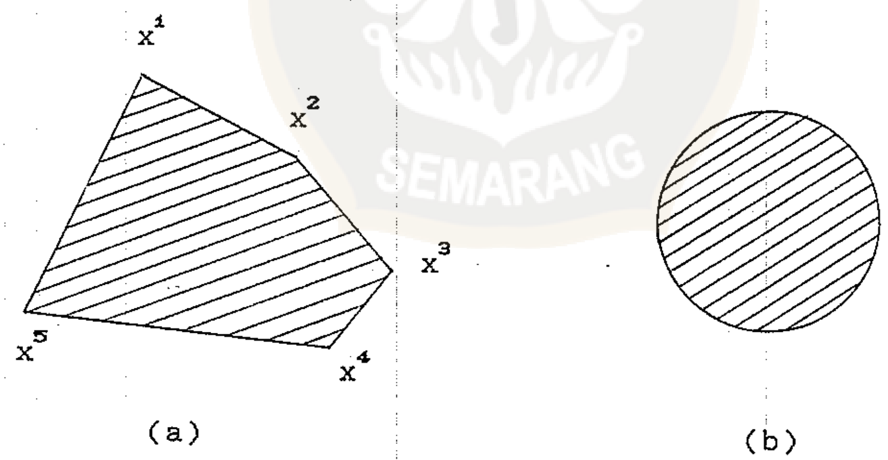
Definisi 2.18

$S \in R^n$, titik $x \in S$ dikatakan suatu titik ekstrem dari S jika dan hanya jika $x^1, x^2 \in S$, $x^1 \neq x^2$ tidak terdapat x sedemikian sehingga $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ untuk $\lambda \in [0,1]$.

Dengan kata lain, titik ekstrem adalah titik yang tidak bisa dinyatakan sebagai kombinasi konveks dari 2 titik lain yang berbeda.

Dari definisi tersebut maka titik ekstrem bukanlah titik interior. Oleh karena itu semua titik ekstrem adalah titik limit.

Contoh 2.10



Gambar 2.2

Gambar 2.2.a. adalah konveks dengan lima titik ekstrem.

Gambar 2.2.b. adalah konveks dengan tak berhingga titik ekstrem (titik ekstremnya sepanjang busur)

Dalam uraian ini digunakan γ sebagai operator kombinasi konveks, yaitu kombinasi konveks dari x^1, x^2, ..., x^q dan ditulis sebagai :

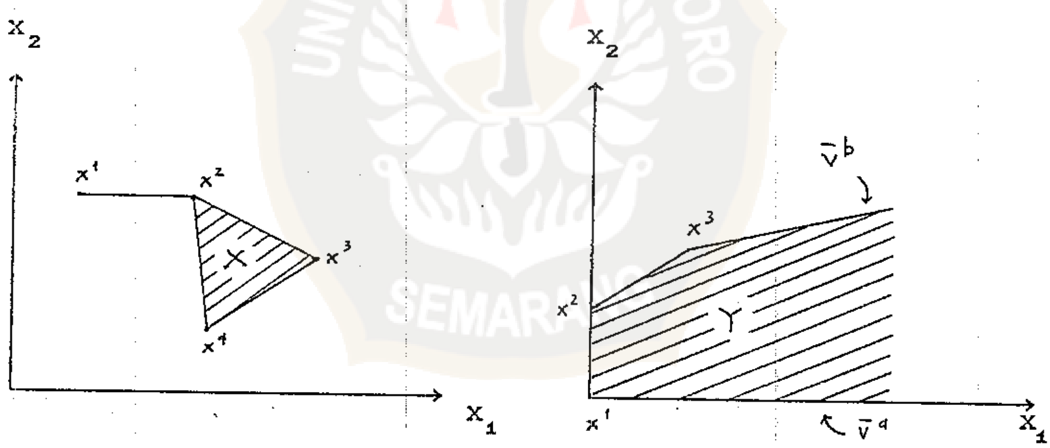
$$\gamma(x^1, x^2, \ldots, x^q) \quad \text{atau} \quad \overset{q}{\underset{i=1}{\gamma}}(x^i)$$

Operator segmen garis tak terbatas μ dari $x \in R^n$ dengan arah $\bar{v} \in R^n$ ditulis sebagai $\mu(x,\bar{v})$.

Catatan :

Himpunan konveks adalah himpunan semua kombinasi konveks dari titik-titik ekstremnya dan titik-titik sepanjang tepi tak terbatasnya.

Contoh 2.11



(a) (b)

Gambar 2.3

Pada Gambar 2.3.a dan 2.3.b di atas, himpunan non konveks X dan himpunan-himpunan konveks tak terbatas Y diberikan oleh :

$$X = \gamma(x^1,x^2) \cup \overset{4}{\underset{i=2}{\gamma}}(x^i) \quad \text{dan}$$

$$Y = \gamma(x^2,y,z)$$

dimana $y \in \mu(x\ ,\bar{v}^a)$ dan $z \in \mu(x^3,\bar{v}^b)$

Dengan himpunan konveks, titik - titik ekstrem yang dihubungkan oleh suatu tepi dikatakan adjacent.
Pada Gambar 2.3.b., lintasan adjacent titik-titik ekstrem dari x^1 ke x^3 adalah $\gamma(x^1,x^2)$ dan $\gamma(x^2,x^3)$.

2.5.2 Bayangan dari Himpunan Konveks

Definisi 2.19

Jika $M \subset R^n$, konveks hull dari M adalah irisan dari semua himpunan konveks dalam M.
Dengan kata lain, konveks hull dari $M \subset R^n$ adalah himpunan konveks terkecil yang berada dalam M.

Definisi 2.20

Himpunan polyhedral adalah konveks hull dari himpunan berhingga titik dan bilangan berhingga dari segmen garis tak terbatas.

Suatu himpunan polyhedral dikatakan polyhedron jika merupakan konveks hull dari himpunan berhingga titik. Suatu himpunan polyhedral tidak perlu terbatas, tetapi polyhedron adalah terbatas.

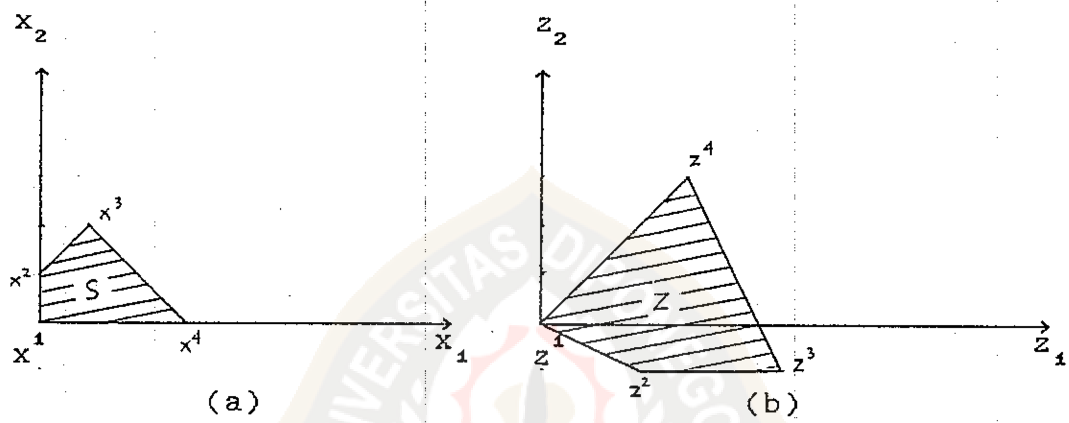
Definisi 2.21

Dengan $S \subset R^n$ dan $f : S \longrightarrow R^k$. Maka, jika S konveks dan f linier, daerah hasil f(s) yaitu bayangan S oleh f adalah konveks.

Jadi jika S polyhedral, bayangan S oleh f diberikan oleh semua kombinasi konveks dari bayangan dari titik-titik ekstrem dan titik-titik sepanjang tepi tak terbatas S.

Contoh 2.12

Jika $f : S \longrightarrow R^2$ didefinisikan dengan $Cx = \bar{z}$, dimana S adalah seperti pada Gambar 2.4.a dan $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$



Gambar 2.4

Maka, dengan $Cx^i = \bar{z}^i$, bayangan S oleh f (ditulis dengan Z) diberikan oleh :

$\gamma(z^1, z^2, z^3, z^4)$ seperti pada Gambar 2.4.b.

Theorema 2.4

Konveks hull dari himpunan konveks $S \subset R^n$ tidak lain adalah himpunan semua kombinasi konveks dari titik-titik dalam S.

Bukti :

Ambil $\Lambda = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{k} p_i a^i, \ p_i \in R, \ a^i \in S, \ p_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \ k \geq 1 \right\}$

Jika $x^1, x^2 \in \Lambda$, maka :

$$x^1 = \sum_{i=1}^{k} p_i a^i,\ p_i \in R,\quad a^i \in S,\ p_i \geq 0,\quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^{k} q_i b^i,\ q_i \in R,\quad b^i \in S,\ q_i \geq 0,\quad \sum_{i=1}^{k} q_i = 1$$

Karena $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda p_i a^i \quad \sum_{i=1}^{k} (1-\lambda) q_i b^i \text{ dan}$$

$$\lambda p_i \geq 0,\ (1-\lambda)q \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda p_i + \sum_{i=1}^{k} (1-\lambda) q_i = 1$$

Jadi $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in \Lambda$ dan Λ konveks.

Jelas bahwa $S \subset \Lambda$. Karena Λ konveks, maka konveks hull $\subset \Lambda$.

2.6 PROGRAM LINIER OBYEKTIF MULTIPEL

Pada persoalan optimasi dengan fungsi obyektif multipel, harus menyelesaikan lebih dari satu tujuan. Untuk menyelesaikan persoalan optimasi dengan banyak fungsi tujuan, harus dimengerti dulu konsep-konsep tentang fungsi utilitas, vektor kriteria non dominasi dan keefisienan.

Catatan :

- Ruang keputusan (R^n) adalah ruang untuk menggambarkan daerah fisibel S dan untuk menentukan titik optimal. S dibatasi oleh orthan non negatif dari R^n.
- Ruang kriteria (R^k) adalah ruang untuk menggambarkan daerah fisibel Z dan untuk menentukan vektor kriteria optimal. Z tidak perlu dibatasi oleh orthan negatif R^k.

Definisi 2.22

Jika R^k adalah ruang kriteria berdimensi k dan $\bar{z} \in R^k$ adalah vektor kriteria dengan :

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix}$$

maka :

Fungsi utilitas U adalah suatu fungsi yang memetakan $\bar{z}$ dari R^k ke R, atau $U : R^k \longrightarrow R$.

Contoh 2.13

Bentuk suatu program linier dengan fungsi obyektif multipel :

memaksimalkan $\{x_1 + x_2 = z_1\}$ ....(1)

memaksimalkan $\{x_1 \quad = z_2\}$ ....(2)

dengan syarat :

$4x_1 + 3x_2 \leq 12$ ....(3)

$x_1, x_2 \geq 0$ ....(4)

sedang $U = 2z_1z_2$ ....(5)

2.6.1 Daerah Fisibel dalam Ruang Kriteria

Definisi 2.23

S merupakan daerah fisibel dalam ruang keputusan, dengan :

$$S = \{\ x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0,\ b \in R^m\ \}$$

Definisi 2.24

Z merupakan daerah fisibel dalam ruang kriteria, dan ditulis dengan :

$$Z = \{ \bar{z} \in R^k \mid \bar{z} = Cx,\ x \in S \}$$

Dengan kata lain, Z adalah himpunan bayangan dari semua titik dalam S. Meskipun S dibatasi oleh orthan non negatif dari R^n, Z (himpunan semua vektor kriteria yang fisibel) tidak perlu dibatasi oleh orthan non negatif dari R^k.

Contoh 2.14

Pandang Gambar 2.5. di bawah ini yang merupakan daerah fisibel program linier obyektif multipel. Gambar 2.5.a menunjukkan daerah fisibel S : $\bar{c}^1 = (1,-1)$ dan $\bar{c}^2 = (-1,2)$.

Ruang kriteria merupakan bayangan invers dari ruang keputusan, sehingga titik-titik pada ruang kriteria merupakan bayangan dari titik-titik pada ruang keputusan.

Dengan menggunakan definisi 2.24, akan ditentukan vektor-vektor kriteria yang sesuai dengan titik-titik ekstrem dari S.

$$\left.\begin{aligned} \bar{c}^1 &= (1,-1) \\ \bar{c}^2 &= (-1,2) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = Cx$$

$$x^1 = (0,0) \longrightarrow \bar{z}^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z}^1 = (0,0)$$

$$x^2 = (1,2) \longrightarrow \bar{z}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

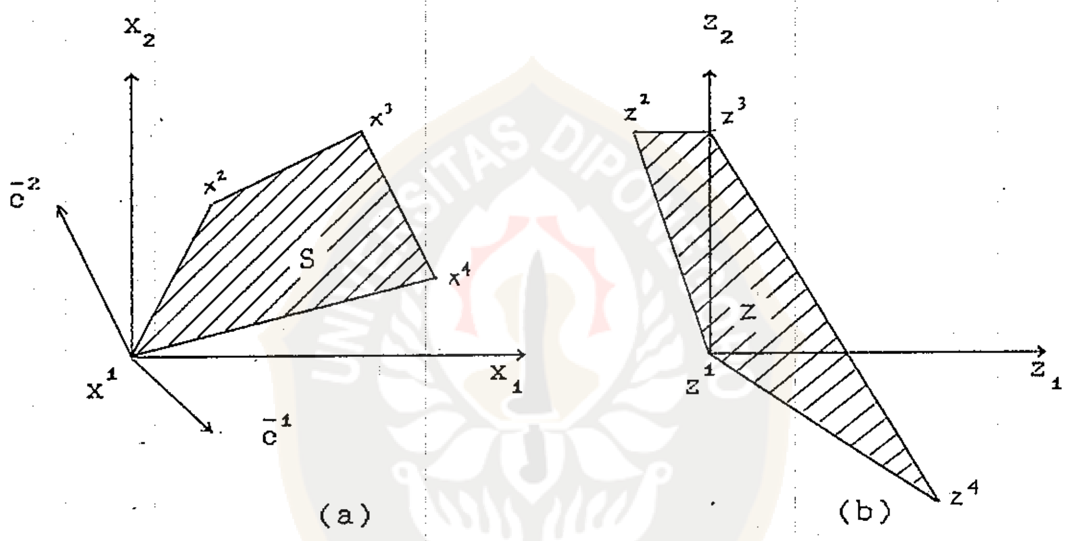
$$\bar{z}^2 = (-1,3)$$

$$x^3 = (3,3) \longrightarrow \bar{z}^3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z}^3 = (0,3)$$

$$x^4 = (4,1) \longrightarrow \bar{z}^4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z}^4 = (3,-2)$$



Gambar 2.5

Pada Gambar 2.5.b , terlihat bahwa Z konveks dan titik-titik ekstrem dari Z adalah bayangan dari titik-titik ekstrem S. Bagian dari Z yang berada pada orthan negatif adalah suatu kejadian ketika persoalan tersebut mempunyai fungsi-fungsi obyektif dengan koefisien negatif.

2.6.2 Vektor Kriteria Dominasi

Dengan vektor-vektor kriteria, diperoleh dua bentuk dominasi berikut ini :

Definisi 2.25

Jika $\bar{z}^1, \bar{z}^2 \in R^k$ adalah dua vektor kriteria, maka $\bar{z}^1$ mendominasi $\bar{z}^2$ jika dan hanya jika $\bar{z}^1$ $[\geq]$ $\bar{z}^2$ yaitu $z_i^1 \geq z_i^2$ untuk semua i dan $z_i^1 > z_i^2$ untuk sekurang-kurangnya satu i.

Jika $\bar{z}^1$ mendominasi $\bar{z}^2$, maka tidak ada komponen dari $\bar{z}^1$ yang kurang dari komponen $\bar{z}^2$ yang sesuai, dan paling sedikit satu komponen dari $\bar{z}^1$ lebih besar dari komponen $\bar{z}^2$ yang sesuai.

Definisi 2.26

Jika $\bar{z}^1, \bar{z}^2 \in R^k$ adalah dua vektor kriteria, maka $\bar{z}^1$ dikatakan mendominasi dengan kuat (strongly dominates) $\bar{z}^2$ jika dan hanya jika $z_i^1 > z_i^2$ untuk semua i.

Jika $\bar{z}^1$ mendominasi dengan kuat $\bar{z}^2$, masing-masing komponen $\bar{z}^1$ lebih besar dari komponen-komponen $\bar{z}^2$ yang sesuai.

Contoh 2.15

Vektor kriteria	Harga vektor			Didominasi oleh
	z_1	z_2	z_3	
$\bar{z}^1$	-1	3	4	$\bar{z}^2$ (dengan kuat)
$\bar{z}^2$	2	4	6	
$\bar{z}^3$	2	2	5	$\bar{z}^2$, $\bar{z}^4$
$\bar{z}^4$	3	2	5	
$\bar{z}^5$	8	3	-1	$\bar{z}^6$
$\bar{z}^6$	8	3	0	

Pada tabel di atas terdapat 6 vektor kriteria. Vektor-vektor kriteria $\bar{z}^1$, $\bar{z}^3$, dan $\bar{z}^5$ didominasi oleh vektor-vektor yang lain, seperti ditunjukkan pada tabel. Tidak ada domonasi antara $\bar{z}^2$, $\bar{z}^4$, dan $\bar{z}^6$.

2.6.3 Vektor Kriteria Non Dominasi

Setelah diketahui definisi dari dominasi, maka akan dibahas tentang vektor kriteria non dominasi. Suatu vektor kriteria dikatakan non dominasi jika vektor-vektor itu tidak didominasi oleh sebarang vektor fisibel lainnya.

Definisi 2.27

$\bar{\bar{z}} \in Z$ dikatakan vektor kriteria non dominasi jika dan hanya jika tidak terdapat sebarang $\bar{z} \in Z$ sedemikian sehingga $\bar{z}\ [\geq]\ \bar{\bar{z}}$.

Kebalikan dari Definisi 2.27., $\bar{\bar{z}}$ dikatakan vektor kriteria dominasi.

Dari definisi non dominasi di atas, akan dicari hubungan antara vektor kriteria non dominasi dengan keoptimalan suatu penyelesaian dari program linier multipel.

Theorema 2.5

Jika $U : R^k \longrightarrow R$ adalah fungsi utilitas yang naik koordinat demi koordinat, maka jika $\bar{z} \in Z$ optimal maka $\bar{z}$ adalah non dominasi.

Bukti :

Andaikan $\bar{z}$ adalah dominasi. Dari definisi 2.27 diperoleh suatu $\bar{\bar{z}} \in Z$ sedemikian sehingga $\bar{\bar{z}}\ [\geq]\ \bar{z}$.

Karena U adalah naik koordinat demi koordinat, ini berarti $U(\bar{\bar{z}}) > U(\bar{z})$ yang mana ini adalah kontradiksi dengan keoptimalan $\bar{z}$.

Maka pengandaian harus diingkar.

Jadi $\bar{z}$ adalah non dominasi.

Theorema tersebut menyatakan bahwa suatu vektor kriteria tidak akan optimal kecuali apabila vektor kriteria tersebut non dominasi.

Theorema 2.6

Jika $\bar{\bar{z}} \in Z$ adalah non dominasi, maka terdapat fungsi utilitas $U : R^k \longrightarrow R$ yang naik koordinat demi koordinat sedemikian sehingga $\bar{\bar{z}}$ optimal.

Bukti :

Karena $\bar{\bar{z}}$ non dominasi, maka untuk sebarang $\bar{z} \in Z$ berlaku $\bar{\bar{z}}$ [≥] z.

Oleh karena itu jika diberikan suatu fungsi utilitas $U : R^k \longrightarrow R$ pada $\bar{z}$, berlaku :

$U(\bar{\bar{z}}) \geq U(\bar{z})$.

Berdasarkan definisi, U merupakan fungsi naik (increasing).

Dan karena $\bar{z}$ adalah sebarang, maka $U(\bar{\bar{z}}) > U(\bar{z})$ berlaku untuk semua anggota Z.

Jadi $\bar{\bar{z}}$ adalah maksimal dari semua anggota Z.

Dengan demikian, maka $\bar{\bar{z}}$ optimal.

Theorema 2.6 menyatakan bahwa untuk setiap vektor kriteria non dominasi terdapat fungsi utilitas yang naik koordinat demi koordinat yang membuatnya optimal.

2.6.4 Efisiensi

Jika pada pembahasan masalah dominasi vektor - vektornya berkaitan dengan ruang kriteria, maka pada masalah efisiensi, ide-idenya berkaitan dengan titik-titik pada ruang keputusan. Vektor-vektor kriteria $\bar{z}$ dalam program linier multipel diberikan oleh Cx, maka didapat definisi seperti berikut :

Definisi 2.30

Suatu titik $x^1 \in S$ dikatakan efisien jika dan hanya jika tidak terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga $Cx \geq Cx^1$, dengan $Cx_i > Cx_i^1$ untuk sekurang-kurangnya satu i.

Kebalikan dari definisi di atas, $x \in S$ dinamakan inefisien.

Dengan kata lain, suatu titik $x^1 \in S$ adalah efisien jika vektor kriterianya tidak didominasi oleh vektor kriteria dari beberapa titik yang lain dalam S.

Contoh 2.16

Pada Gambar 2.6.,ditunjukkan daerah fisibel S.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$x^1 = (3,5)$; $x^2 = (6,4)$; $x^3 = (6,8)$;

$x^4 = (9,3)$; $x^5 = (0,7)$; $x^6 = (7,0)$

$$Cx^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad Cx^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

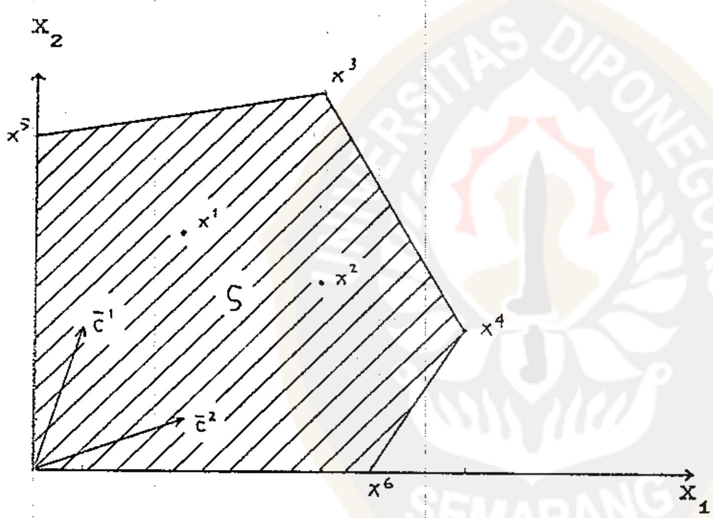
$$= \begin{pmatrix} 18 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$Cx^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad Cx^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 30 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$Cx^5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad Cx^6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \end{pmatrix}$$



Gambar 2.6.

Titik x^1 inefisien karena $Cx^1 \leq Cx^2$, yaitu vektor kriteria x^1 didominasi oleh x^2. Tetapi x^2 juga inefisien, karena vektor kriterianya didominasi oleh x^3, yaitu $Cx^2 \leq Cx^3$.

Dalam soal di atas, himpunan efisiennya adalah $\gamma(x^3,x^4)$.