BAB II

KONSEP DASAR

2.1 HIMPUNAN

Dalam buku ini pengertian himpunan secara intuitif dapat ditangkap, yaitu dapat dimengerti demikian saja.

Jika elemen (obyek) a menjadi anggota suatu himpunan H, ditulis $a \in H$. Sedangkan ingkarannya yaitu a bukan anggota H ditulis $a \notin H$.

Jika banyaknya anggota anggota didalam suatu himpunan tersebut berhingga maka disebut himpunan berhingga dan penulisan himpunan tersebut dapat disajikan dengan membuat daftar anggota-anggotanya di antara tanda kurung { dan }. Misalkan H = { 1,2,3 } adalah himpunan yang anggotanya adalah bilangan 1, bilangan 2 dan bilangan 3.

Jika banyaknya anggota suatu himpunan adalah tak berhingga maka himpunan tersebut disebut himpunan tak berhingga. Anggota himpunan demikian disajikan dengan menggunakan syarat-syarat keanggotaannya. Jika P adalah syarat keanggotaan dari himpunan H, maka setiap angggota (dimisalkan ditulis dengan x) dari H ditulis sebagai

$$H = \{ x \mid P(x) \}$$

dibaca H adalah himpunan semua x dimana x mempunyai sifat P. Misalkan syarat keanggotaan dari himpunan A adalah lebih besar dari 3, maka dapat ditulis

$$A = \{ x \mid x > 3 \}$$

Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong, ditulis { } atau ϕ.

Definisi 2.1

Dua himpunan H dan K disebut sama atau berimpit jika dan hanya jika setiap anggota H menjadi anggota K dan sebaliknya setiap anggota K menjadi anggota H. Ditulis H = K.

Definisi 2.2

Himpunan H disebut himpunan bagian (subset) dari himpunan K, ditulis $H \subseteq K$, jika dan hanya jika setiap anggota H menjadi anggota K tetapi tidak sebaliknya.

2.1.1 Operasi Himpunan

Definisi 2.3

Gabungan dari dua himpunan H dan K, ditulis $H \cup K$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen yang sekurang-kurangnya menjadi anggota dari salah satu himpunan H atau K.

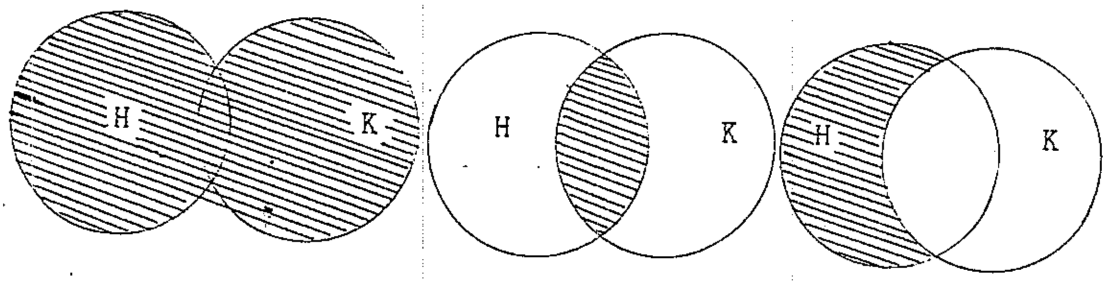
Definisi 2.4

Irisan dari dua himpunan H dan K, ditulis $H \cap K$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen-elemen yang sekaligus menjadi anggota H dan K.

Definisi 2.5

Selisih dari dua himpunan H dan K, ditulis $H - K$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen-elemen dalam H yang tidak berada dalam K.

Untuk ketiga operasi himpunan diatas dapat digambarkan dengan gambar di bawah ini. Gambar tersebut disebut diagram Venn-Euler.



$H \cup K$ $\quad$ $H \cap K$ $\quad$ $H - K$

Gambar 1.1

Definisi 2.6

Jika I adalah suatu himpunan jumlah sedemikian sehingga A_i adalah suatu himpunan untuk setiap $i \in I$,

$I = \phi \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ bhb $(\exists i).i \in \phi \; \& \; x \in A_i$

$I = \phi \Longrightarrow \bigcap_{i \in I} A_i = S$

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ bhb $(\forall i).i \in \phi \Longrightarrow x \in A_i$

Contoh 2.1

$\bigcup_{i > 2} A_i = A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \ldots$

Definisi 2.7

Himpunan kuasa (Power Set) dari himpunan A, ditulis 2^A adalah himpunan semua himpunan bagian dari A.

Definisi 2.8

Produk Kartesius dari himpunan A dan B ditulis $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan berurutan dari anggota-anggota A dan B.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Contoh 2.2

$A = \{ 1,2,3 \}$ $B = \{ 2,3,4,5,6 \}$

maka :

$A \cup B = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$ $A \cap B = \{ 2,3 \}$

$A - B = \{ 1 \}$

$2^A = \{ \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,5),(2,2),(2,3),$
$(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(3,3),(3,4), (3,5),$
$(3,6)\}$

2.1.2 Relasi

Definisi 2.9

Suatu relasi adalah himpunan dari suatu perkawanan (pasangan) dari suatu anggota himpunan Suatu relasi R dari A ke B ditulis aRb dan (a,b) dalam R, untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. A disebut domain, dan B disebut kodomain.

Definisi ini khusus untuk pembahasan yang digunakan dalam buku ini.

Contoh 2.3

A dalah himpunan bilangan bulat. Relasi < adalah $\{ (a,b) \mid$ a **lebih kecil dari b** $\}$. Maka ditulis $a < b$.

Definisi 2.10

Misalkan R adalah suatu relasi pada himpunan A. Maka R dikatakan :

(1). Refleksif yaitu aRa untuk setiap $a \in A$

(2). Simetris yaitu jika aRb maka bRa untuk $a,b \in A$.

(3). Transitif yaitu jika aRb dan bRc maka aRc untuk $a,b,c \in A$

Definisi 2.11

Suatu relasi yang sekaligus refleksif, simetris dan transitif disebut relasi ekwivalensi.

Contoh 2.4

Relasi kongruensi antara bilangan-bilangan bulat modulo m adalah relasi ekwivalensi. Bilangan bulat modulo m didefinisikan $a \equiv b \bmod m$ bhb $a - b = km$ ($k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$)

Bukti :

1. Refleksif : $a \equiv a \bmod m$ jelas dipenuhi sebab :

   $a - a = 0.m$. Maka aRa

2. Simetris : diketahui aRb maka berlaku $a \equiv b \bmod m$

   jadi $a - b = km$

   Maka $b - a = -km$ adalah suatu kelipatan negatif dari m. selanjutnya $b \equiv a \bmod m$ jadi bRa.

3. Transitif : aRb maka $a \equiv b \bmod m$

   bRc maka $b \equiv c \bmod m$

   karena $a \equiv b \bmod m$ maka $a - b = k_1 m$

   karena $b \equiv c \bmod m$ maka $b - c = k_2 m$

$$\begin{array}{l} a - b = k_1 m \\ \underline{b - c = k_2 m} \quad + \\ a - c = (k_1 + k_2)m \\ a - c = km \end{array}$$

Sehingga $a \equiv c \mod m$

Jadi aRc.

Theorema 2.1

Suatu relasi ekuivalensi antara anggota - anggotanya suatu semesta S mengakibatkan penggolongan ke dalam kelas-kelas yang saling asing.

Bukti :

Misalkan relasi tersebut adalah R, maka R bersifat refleksif, simetris dan transitif.

Semua elemen-elemen yang berada dalam relasi dengan a dikumpulkan dalam himpunan S_a. Jadi $S_a = \{ x \mid xRa \}$. S_a tidak kosong sebab R refleksif, jadi aRa, sehingga sekurang-kurangnya a menjadi anggota S_a. Jadi setiap anggota pasti berada dalam sekurang-kurangnya satu kelas.

Kini akan dibuktikan bahwa apabila dua kelas itu berserikat satu elemen saja maka kedua kelas tersebut berimpit .... (I)

Andaikan S_a dan S_b berserikat pada elemen c. Maka karena $c \in S_a$ jadi cRa. Karena R simetris maka didapayt aRc. Karena juga $c \in S_b$ maka cRb.

Dari sifat transitif aRc dan cRb maka aRb. Selanjutnya untuk setiap $p \in S_a$ maka berlaku pRa, dan karena aRb maka pRb. Jadi $p \in S_b$. Terbukti setiap anggaota S_a menjadi anggota S_b. Maka $S_a \subseteq S_b$.... (1)

Karena aRb dan R simetris maka bRa. Selanjutnya untuk setiap $q \in S_b$ maka berlaku qRb. Dan karena bRa maka qRa. maka terbukti setiap anggota S_b menjadi anggota S_a. Maka didapat $S_b \subseteq S_a$..........................(2)

Dari (1) dan (2) didapat $S_a = S_b$.

Kontraposisi dari dari pernyataan I maka apabila kelas-kelas itu tidak berimpit satu maka kelas-kelas itu saling asing(tidak berserikat satu elemenpun).

Contoh 2.5

Relasi kongruensi bilangan modulo 4 dari bilangan-bilangan bulat menghasilkan kelas-kelas yang saling asing yaitu kelas 0 ditulis $\bar{0}$, kelas 1 ditulis $\bar{1}$, kelas 2 ditulis $\bar{2}$, kelas 3 ditulis $\bar{3}$.

Jika $a \in \bar{2}$ maka aR2 maka $a \equiv 2 \bmod 4$ atau

$$a - 2 = k.4 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

maka $-2, 2, 6, 10 \in \bar{2}$

$-1, 3, 7, 11 \in \bar{3}$

dan seterusnya.

Definisi 2.12

Produk k-lipat dari suatu relasi R pada himpunan A, ditulis R^k adalah :

(1) aR^1b jika dan hanya jika aRb.

(2) aR^ib jika dan hanya jika ada $c \in A$, sehingga aRc dan $cR^{i-1}b$ untuk $i > 1$.

Contoh 2.6

Produk 4-lipat dari R ditulis R^4. Misalkan aR^4b maka dengan 2) ada suatu c_1, sehingga aRc_1 dan c_1R^3b. Dengan menggunakan aturan 2) lagi didapat c_2 sehingga

$c_1 R c_2$ dan $c_2 R^2 b$. Satu kali lagi penggunaan 2), maka ada c_3 sehingga $c_2 R c_3$ dan $c_3 R^1 b$. Maka dengan 1) didapat $c_3 R b$.

Maka jika $aR^4 b$, ada suatu barisan elemen c_1, c_2, c_3 dalam A sehingga $aRc_1, c_1 R c_2, c_2 R c_3, c_3 R b$.

Definisi 2.13

1. Tutupan transitif dari relasi R pada himpunan A, ditulis R^+, aR^+b jika dan hanya jika $aR^i b$, $i \geq 1$.
2. Tutupan refleksif-transitif dari R pada himpunan A, ditulis R^* adalah :

   a) aR^*a, untuk semua $a \in A$.

   b) aR^*b, jika aR^+b.

   c) Tak ada yang lain dalam R^* selain a) dan b).

   Relasi $aR^0 b$ adalah jika dan hanya jika $a = b$.

   Jadi aR^*b jika dan hanya jika $aR^i b$, untuk $i \geq 0$.

Theorema 2.2

Jika R^+ dan R^* ada maka :

a) R^+ adalah transitif. Jika R' suatu relasi transitif lain sedemikian sehingga $R \subseteq R'$, maka $R^+ \subseteq R'$.

b) R^* adalah refleksif dan transitif. Jika R' suatu relasi refleksif-transitif lain sedemikian sehingga $R \subseteq R'$, maka $R^* \subseteq R'$.

Bukti :

a) Akan dibuktikan bahwa jika aR^+b dan bR^+c maka aR^+c.

Karena aR^+b, maka ada suatu barisan elemen d_1, d_2,

$\dots, d_n$ sehingga $d_1Rd_2, \dots, d_{n-1}Rd_n$, dimana $d_1 = a$ dan $d_n = b$. Karena bR^+c, maka ada barisan elemen $e_1, \dots, e_m$ sehingga $e_1Re_2, \dots, e_{m-1}Re_m$ dimana $e_1 = b = d_n$ dan $e_m = c$. Dengan menggunakan definisi R^+ $(m + n)$ kali maka didapat aR^+c.

Kini akan dibuktikan R^+ adalah relasi transitif terkecil yang memuat R. Misal R' adalah relasi transitif lain sehingga $R \subseteq R'$. Maka akan ditunjukkan bahwa $R' \subseteq R'$. Misal $(a,b) \in R^+$, maka aR^+b. Maka ada suatu barisan $c_1, c_2, \dots, c_n$ sehingga $a = c_1$, $b = c_n$, dan c_iRc_{i+1} untuk $1 \le i \le n$. Kaena $R \subseteq R'$, didapat $c_i R' c_{i+1}$ untuk $1 \le i \le n$. Karena R' transitif, dengan mengulang penggunaan definisi didapat $c_1 R' c_n$, atau $aR'b$ atau $(a,b) \in R'$ Karena (a,b) adalah anggota R^+, maka diperlihatkan bahwa setiap anggota R^+ juga anggota R'.
Maka $R^+ \subseteq R'$.

b) Akan dibuktikan R^* adalah refleksif dan transitif. Langkah transitif sama dengan langkah a). Maka tinggal membuktikan bahwa R^* refleksif.

Akan dibuktikan aR^*a. Karena aR^*b bhb aR^ib untuk $i \ge 0$, maka didapat aR^0b atau $a = b$. Karena $a = b$ maka $aR^*b = aR^*a$.

Kini akan dibuktikan R^* adalah relasi refleksif dan transitif terkecil yang memuat R. MIsal R' adalah relasi refleksif-transitif lain sehingga $R \subseteq R'$. Maka akan ditunjukkan $R^* \subseteq R'$.

Misalkan $(a,b) \in R^*$ yaitu aR^*b. Maka aR^*a dan aR^+b. Jadi ada suatu barisan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sedemikian sehingga $a = c_1$, $b = c_n$ dan $c_i R c_{i+1}$ untuk $1 \le i \le n$. Karena $R \subseteq R'$ dan R' juga refleksif-transitif, didapat $aR'a$ dan $c_i R' c_{i+1}$ untuk $1 \le i \le n$. Karena R' transitif maka $c_1 R' c_n$ adalah $aR'b$ atau $(a,b) \in R'$. Karena $(a,b) \in \overset{*}{R}$ maka ditunjukkan bahwa tiap anggota R^* adalah juga anggota R'. Maka $R^* \subseteq R'$.

Contoh 2.7

$R = \{(1,2),(2,2),(2,3)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{1,2,3\}$.

Maka

$R^+ = \{(1,2),(2,2),(2,3),(1,3)\}$

$R^* = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

1.1.3 Pemetaan

Definisi 2.14

Suatu pemetaan dari himpunan S ke T adalah suatu relasi dari setiap anggota S menentukan dengan tunggal satu anggota T.

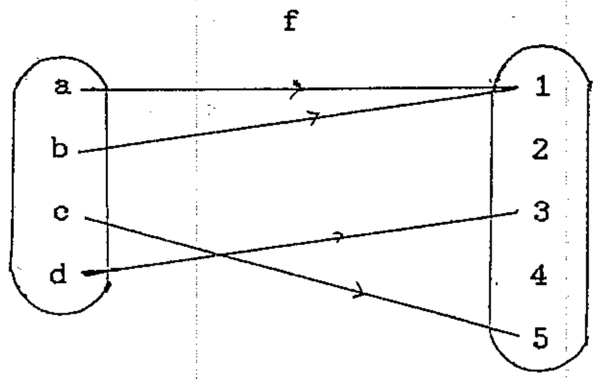
Himpunan S disebut daerah asal (domain) dan himpunan T disebut daerah kawan (kodomain).

Contoh 2.8

$A = \{a,b,c,d\}$

$B = \{1,2,3,4,5\}$

Suatu pemetaan f dari A ke B adalah relasi (a,1), (b,1),(c,5),(d,3). Maka pemetaan f dapat digambarkan sebagai berikut :



gb. 1.2

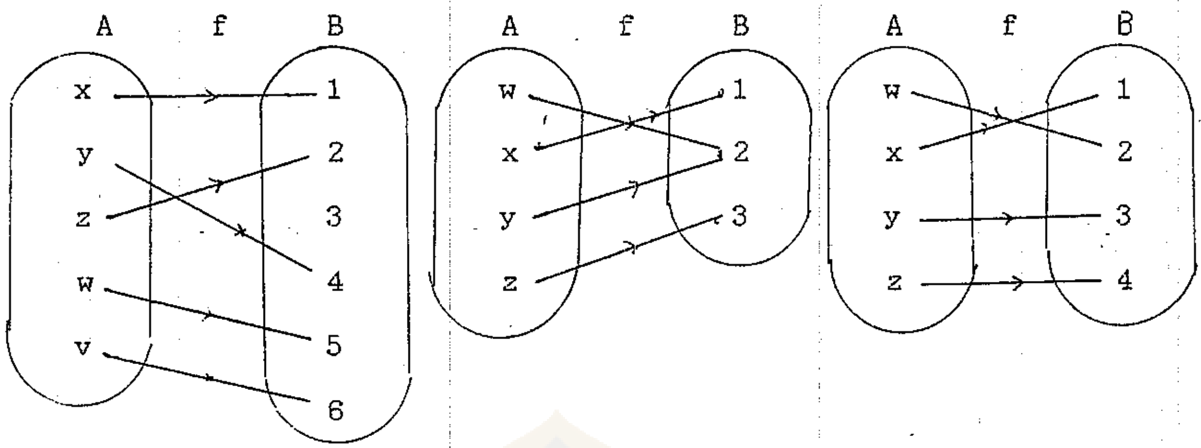
Jika (a,b) ada dalam pemetaan f, sering ditulis f(a) = b. Dalam bentuk lain pemetaan f dari A ke B sering ditulis $f : A \longrightarrow B$

Apabila $f : A \longrightarrow B$ adalah suatu pemetaan dimana untuk $b \in B$ ditentukan oleh paling banyak satu $a \in A$ sedemikian sehingga f(a) = b, maka f disebut pemetaan injektif.

Apabila $f : A \longrightarrow B$ adalah suatu pemetaan dimana untuk setiap $b \in B$ ditentukan oleh minimal satu $a \in A$ sedemikian sehingga f(a) = b maka f disebut pemetaan surjektif.

Apabila $f : A \longrightarrow B$ adalah pemetaan yang surjektif dan injektif maka disebut pemetaan yang bijektif.

Dibawah ini adalah gambaran pemetaan yang injektif, surjektif dan bijektif.



gb. 2.3

2.2 ALPHABET, STRING DAN BAHASA

Disini simbol tidak dapat didefinisikan secara formal seperti halnya titik dan garis pada geometri.

Definisi 2.15

Alphabet adalah suatu himpunan berhingga dari simbol.

String atas alphabet A adalah barisan berhingga dari simbol dalam A yang dirangkai.

Contoh 2.9

a,b,c adalah suatu simbol

A = {a,b,c} adalah suatu alphabet.

abc, bac,baaac adalah suatu string atas alphabet A.

Panjang dari suatu string w, ditulis $|w|$ adalah banyaknya simbol yang membentuk suatu string w. String kosong, ditulis ε, adalah string yang tanpa memuat simbol. Jadi $|\varepsilon| = 0$.

Prefik dari suatu string adalah sejumlah simbol yang mengawali suatu string. Sedangkan sufik adalah sejumlah simbol yang mengakhiri suatu string. Suatu prefik atau sufik yang merupakan string itu sendiri disebut prefik / sufik sebenarnya.

Contoh 2.10

abc adalah suatu string.

Prefiknya adalah : ε, a, ab, abc

Sufiknya adalah : ε, c, bc, abc

Definisi 2.16

Operasi-operasi untuk string yaitu :

a. Konkatenasi (rangkaian)

Jika $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ dan $y = b_1 b_2 \cdots b_m$ dan $z = c_1 c_2 \cdots c_p$ adalah string-string dari alphabet Σ, maka

(i) $xy = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m$

(ii) $x(yz) = (xy)z$

(iii) $x\varepsilon = \varepsilon x$

(iv) $|x||y| = |x| + |y|$

(v) $xy \neq yx$

b. Multiplikasi adalah digunakan untuk rangkaian yang diulang.

$x^3 = xxx$

$(xy)^2 = xyxy$

c. Untuk x, y suatu string, maka

(i) $x^0 = \varepsilon$

(ii) $|x^n| = n\ |x|$

(iii) $x^{n+m} = x^n x^m$ untuk suatu bilangan bulat non negatif n dan m.

Definisi 2.17

Misalkan Σ adalah suatu alphabet. Σ^* adalah himpunan yang memuat semua string dari Σ termasuk ε.

Definisi 2.18

Suatu bahasa L dari alphabet Σ adalah suatu himpunan string atas alphabet Σ.

Contoh 2.11

$\Sigma = \{0,1\}$

$\Sigma^* = \{\varepsilon,0,1,00,01,10,11,000, \ldots \}$

$L = \{0^i1^i \mid i \geq 0\}$ adalah suatu bahasa atas alphabet Σ.

Definisi 2.19

Misal L_1 adalah bahasa atas alphabet Σ_1 dan L_2 adalah bahasa atas alphabet Σ_2. Maka L_1L_2 disebut konkatenasi dari L_1 dan L_2 adalah suatu bahasa yaitu $\{xy \mid x \in L_1 \text{ dan } y \in L_2\}$.

Definisi 2.20

Tutupan dari L, ditulis L^* didefinisikan sebagai berikut :

(1) $L^0 = \{\varepsilon\}$

(2) $L^n = LL^{n-1}$ untuk $n \geq 1$

(3) $L^* = \bigcup_{n\geq 0} L^n$

Tutupan positif dari L, ditulis L^+ adalah $\bigcup_{n\geq 1} L^n$

Jadi $L^+ = LL^* = L^*L$ dan $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$

1.3 GRAPH DAN TREE

1.3.1 Graph

Definisi 2.21

Suatu graph G = (V,E) terdiri dari himpunan berhingga dari titik (vertek) V dan himpunan dari pasangan vertek yaitu E yang disebut edge.

Contoh 2.12

$G = (\{1,2,3,4\},\{(n,m) \mid n + m = 4 \vee n + m = 7\})$

Graph tersebut dapat ditunjukkan seperti pada gambar di bawah ini

gb.2.4

Definisi 2.22

Graph berarah (directed graph/digraph) G = (V,E) adalah graph dimana pasangan vertek E dihubungkan dengan memberikan arah. Jika (a,b) suatu edge maka a disebut titik asal dan b disebut titik pengganti, dan (a,b) menunjukkan garis $a \longrightarrow b$.

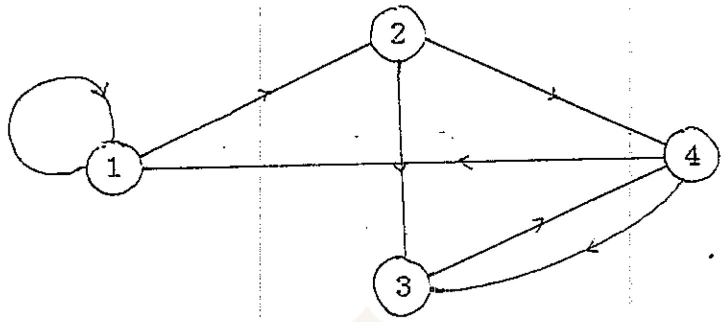
Contoh 2.13

G = (V,E) dimana

$V = \{1,2,3,4\}$

$E = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,1),(4,3)\}$

Maka graph berarahnya dapat digambarkan seperti pada gambar dibawah ini.



gb.2.5

Definisi 2.23

Suatu barisan vertek $a_o a_1 \ldots a_n$, $n \geq 1$ disebut suatu lintasan (path) dengan panjang n dari vertek a_o ke a_n jika ada suatu garis berarah dari a_{i-1} ke a_i untuk $1 \leq i \leq n$. Jika $a_o = a_n$ maka path tersebut disebut cicle (sirkuit).

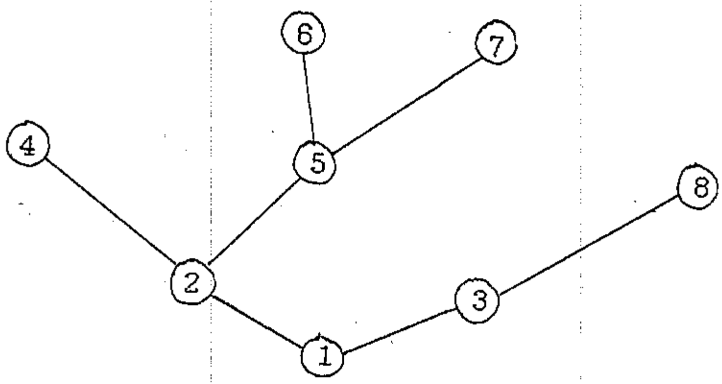
1.3.2 Tree

Definisi 2.24

Tree adalah suatu directed graph dengan tanpa mempunyai cicle,sehingga semua verteks kecuali satu verteks mempunyai 1 titik asal.

Karena suatu tree tidak mempunyai cicle maka terdapat suatu vertek yang tidak mempunyai titik asal. Titik yang tidak mempunyai titik asal ini disebut **akar (root)**. Ada istilah khusus yang membedakan tree dengan graph pada umumnya, yaitu titik asal disebut **moyang** dan titik pengganti disebut **keturunan**. Suatu vertek yang tanpa mempunyai keturunan disebut **daun** dan yang lainnya disebut vertek interior.

Contoh 2.14



gb.2.6

Akar (root) = 1

Daun = 4,6,7,8

Vertek interior = 2,3,5

Catatan :

Tanda anak panah dalam hal ini tidak dituliskan. Untuk selanjutnya root diletakkan diatas.