BAB III

P E N U N J A N G

3.1. RUANG VEKTOR TOPOLOGI

DEFINISI 32

Ruang vektor E atas field K dan disertai topologi merupakan ruang vektor topologi jika :

TVS1 pemetaan $(x,y) \longrightarrow x + y$ dari E x E into E adalah kontinu.

TVS2 pemetaan $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ dari K x E into E adalah kontinu.

DEFINISI 33

Himpunan A dalam ruang vektor E pada field K adalah absorbing (atau radial pada 0). Jika untuk $x \in E$ terdapat $\alpha > 0$ sedemikian hingga $x \in \lambda A$ untuk semua $\lambda \in K$, sedemikian hingga $|\lambda| \geq \alpha$.

Ini berarti $\lambda x \in A$ untuk setiap $\lambda \ni |\lambda| \leq \alpha^{-1}$. Dari TVS2 maka setiap persekitaran dari 0 adalah absorbing.

DEFINISI 34

Himpunan A dalam ruang vektor E pada K adalah balanced (atau circle), jika $\lambda A \subset A$ untuk setiap $\lambda \in K$ sedemikian hingga $|\lambda| \leq 1$.

Jika A balanced dan untuk setiap $x \in E$ memuat $\mu \in K$ sedemikian hingga $x \in \mu A$, maka A absorbing.

Jika $|\lambda| \geq |\mu|$, maka $|\lambda^{-1}\mu| \leq 1$ dan $x \in \mu A = \lambda(\lambda^{-1}\mu)A \subset \lambda A$. Irisan dari sembarang keluarga dari himpunan-himpunan balanced adalah balanced.

Diberikan sembarang himpunan B dalam E, terdapatlah himpunan balanced terkecil A yang memuat B, himpunan A ini disebut <u>balanced hull</u> dari B dan merupakan interseksi dari semua himpunan balanced yang memuat B. Gabungan dari sembarang keluarga dari himpunan-himpunan balanced adalah balanced. $A \subset E$, terdapatlah himpunan balanced paling besar B dalam A. Himpunan B disebut <u>pusat balanced (balanced core)</u> dari A. Himpunan B tidak kosong jika dan hanya jika A memuat titik asal.

Himpunan $x \in E$ termasuk balanced core B dari A jika dan hanya jika $\lambda x \in A$ untuk semua $\lambda \in K$ sedemikian hingga $\lambda \leq 1$.

Himpunan $C(x) = \{ \lambda x \mid |\lambda| \leq 1 \}$, jelas balanced. Jika $C(x) \subset A$ maka $C(x) \subset B$ dan $x \in B$. Sebaliknya jika $x \in B$ maka $\lambda x \in B$ dan fortriori $\lambda x \in A$ untuk setiap $\lambda \in K$ dimana $|\lambda| \leq 1$.

<u>DEFINISI 35</u>

Diberikan X dan Y ruang topologi.

Suatu fungsi $h : X \longrightarrow Y$ dikatakan suatu homeomorphisma. Jika dan hanya jika h dan h^{-1} adalah kontinu dan h bijektif.

Diberikan ruang vektor E dan F pada field K dan

$f : E \longrightarrow F$ merupakan pemetaan linier.

Jika A merupakan himpunan Balanced di E maka f(A) merupakan himpunan balanced di F.

Jika B merupakan himpunan Balanced di F maka $f^{-1}(B)$ merupakan himpunan balanced di E.

TEOREMA 2

Dalam ruang vektor topologi E memuat $\mathfrak{R}$ yang merupakan system fundamental dari persekitaran- persekitaran dari 0 sedemikian hingga :

(NS1) Setiap $V \in \mathfrak{R}$ adalah Absorbing

(NS2) Setiap $V \in \mathfrak{R}$ adalah Balanced

(NS3) Untuk setiap $V \in \mathfrak{R}$ memuat $U \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $U + U \subset V$

Apabila Teorema diatas dibalik :

Diberikan Ruang Vektor E atas field K dan $\mathfrak{R}$ merupakan filter basis pada E yang memenuhi kondisi (NS1) sampai (NS3) maka terdapatlah topologi yang unik pada E, dimana E merupakan ruang vektor Topologi dan $\mathfrak{R}$ merupakan system fundamental persekitaran dari 0.

BUKTI :

E merupakan ruang vektor topologi dan $\mathfrak{R}$ System fundamental persekitaran dari 0, maka dalam topologi itu himpunan W merupakan persekitaran dari titik $a \in E$ $\leftrightarrow$ W memuat himpuan yang berbentuk V + a, dimana $V \in \mathfrak{R}$. Ini membuktikan bahwa topologi dan pastilah topologi yang unik. Lebih jelasnya jika $W_1 \supset W$ dan $W \supset V+a$, dimana $V \in \mathfrak{R}$, maka $W_1 \supset V+a$; itu berarti aksioma (NB1) dipenuhi.

Selanjutnya diberikan W_i $(1 \le i \le n)$ merupakan bilangan berhingga dari persekitaran-persekitaran dari a.

Maka masing-masing W_i memuat himpunan $V_i + a$, dimana $V_i \in \mathfrak{R}$. Sejak $\mathfrak{R}$ adalah filter basis, terdapatlah himpunan $V \in \mathfrak{R}$ yang termuat dalam $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$

Maka

$$\bigcap_{i=1}^{n} W_i \supset V + a ;$$

$\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ merupakan persekitaran dari a.

Ini membuktikan (NB2).

Untuk setiap $V \in \mathfrak{R}$ kita mempunyai $0 \in V$ dengan definisi dari filter basis tidak ada V yang kosong dan jika $x \in V$, maka dengan (NS2) $0.x \in V$. Jika $W \supset V + a$, $V \in \mathfrak{R}$, maka $a \in W$; (NB3) dipenuhi. Akhirnya, diberikan $W \supset V + a$, dimana $V \in \mathfrak{R}$. Dengan (NS3) terdapat $U \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $U + U \subset V$. Maka $U + a$ merupakan persekitaran dari a, dan jika $b \in U + a$, maka $U + b \subset U + U + a \subset V + a \subset W$; yaitu untuk setiap $b \in U + a$ himpunan W merupakan persekitaran dari b, demikian aksioma (NB4) terbukti.

Diberikan $a + b = c$ dan W merupakan persekitaran dari c, maka W memuat himpunan $V + c$, dimana $V \in \mathfrak{R}$ dan dengan (NS3) terdapatlah $U \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $U + U \subset V$ maka $U + a$ merupakan persekitaran dari a, $U + b$ merupakan persekitaran dari b, sehingga.

$$(U+a) + (U+b) \subset V + a + b = V + c \subset W \; ;$$

Yaitu aksioma (TVS1) dipenuhi.

Selanjutnya diberikan $V \in \mathfrak{R}$ dan $\lambda \in K$, terdapatlah $U \in \mathfrak{R}$.

Sedemikian hingga $\lambda U \subset V$. Dari (NS3) dan diberikan $V \in \mathfrak{R}$, untuk suatu $n \in N$ terdapatlah $U \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $2^{n}U \subset V$.

Diberikan n yang sangat besar sehingga $|\lambda| \le 2^{n}$. Jika $U \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $2^{n}U \subset V$, maka dengan (NS2) kita mempunyai $\lambda 2^{-n}U \subset U$ yaitu $\lambda U \subset 2^{n}U \subset V$. Diberikan $a \in E$, $\lambda \in K$ dan W merupakan persekitaran dari λa. Terdapatlah $V \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $W \supset V + \lambda a$ dan dengan (NS3) maka terdapatlah $U \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $U + U + U \subset V$. Karena dari (NS1) terdapatlah $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $|\eta| \le \varepsilon$ berarti $\eta a \in U$. Terdapatlah $T \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $\lambda T \subset U$. Lagipula Jika $|\eta| \le 1$ dan $\varkappa - a \in U$, maka dengan (NS2) $\eta(\varkappa-a) \in U$ diambil $S \in \mathfrak{R}$ sedemikian hingga $S \subset T \cap U$. Dari identitas

$$\xi\varkappa - \lambda a = (\xi-\lambda)a + \lambda(\varkappa-a) + (\xi-\lambda)(\varkappa-a).$$

Bahwa jika $|\xi-\lambda| \leq \min(1,\epsilon)$ dan $x \in S + a$ maka

$\xi x - \lambda a \in U + U + U \subset V$, yaitu $\xi x \in W$.

(TVS2) terbukti.

DEFINISI 36

Suatu ruang (S,σ) disebut Ruang Hausdorff (Hausdorff Space) bila hanya bila setiap dua titik yang berlainan mempunyai dua persekitaran - persekitaran yang saling asing.

TEOREMA 3

E merupakan ruang vektor pada K dan $\mathfrak{S}$ merupakan koleksi dari himpunan-himpunan bagian balanced, absorbing dari E sedemikian sehingga untuk setiap $V \in \mathfrak{S}$ terdapatlah $U \in \mathfrak{S}$ sedemikian hingga $U + U \subset V$. Maka terdapatlah Topologi unik pada E dimana E merupakan ruang vektor topologi dan interseksi berhingga dari elemen-elemen dari $\mathfrak{S}$ membentuk system fundamental dari persekitaran-persekitaran 0.

BUKTI :

Himpunan absorbing jelas tidak kosong; dan dari sini $V \in \mathfrak{S}$ memuat 0 dikarenakan V balanced. Sehingga interseksi berhingga dari elemen-elemen dari $\mathfrak{S}$ membentuk filter basis $\mathfrak{R}$ pada E. Jadi $\mathfrak{R}$ memenuhi kondisi-kondisi dari (NS1) sampai (NS3).

(Dari Teorema 2)

TEOREMA 4

Ruang vektor topologi merupakan ruang Hausdorff jika untuk setiap elemen $a \neq 0$ terdapatlah persekitaran V dari 0 yang tidak memuat a $(a \notin V)$

BUKTI :

Cukup dengan membuktikan bahwa jika $a \neq 0$ maka terdapatlah persekitaran U dari 0 dan persekitaran W sedemikian hingga $U \cap W = 0$. Jika $a \neq b$ maka $a - b = 0$.

U merupakan persekitaran dari 0 dan W dari $a - b$ sedemikian hingga $U \cap W = \phi$. Maka $W + b$ merupakan persekitaran dari a, $U + b$ merupakan persekitaran dari b, dan$(W + b) \cap (U + b) = \phi$.

Diberikan $a = 0$ dan diberikan V merupakan persekitaran dari 0 yang tidak memuat a. terdapatlah persekitaran balanced U dari 0 sedemikian hingga $U + U \subset V$. Maka U merupakan persekitaran dari 0 dan $U + a$ merupakan persekitaran dari a. Lagipula, $U \cap (U + a) = \phi$, sejak $x = y + a \in U$, $y \in U$ berarti $a = x - y \in U + U \subset V$

TEOREMA 5

Dalam ruang vektor topologi setiap persekitaran dari 0 memuat persekitaran tertutup dari 0

BUKTI :

Diberikan V merupakan persekitaran dari 0. Terdapatlah persekitaran balanced U dari 0 sedemikian hingga $U + U \subset V$. Akan ditunjukkan bahwa $\bar{U} \subset V$, maka $(x + U) \cap U \neq \phi$ yaitu terdapat $y \in U$ sedemikian hingga $x + y \in U$ akan tetapi,

$$x \in - y + U \subset U + U \subset V.$$

TEOREMA 6 (TEOREMA OSGOD)

Diberikan $(U_i)_{i \in I}$ merupakan keluarga fungsi-fungsi kontinu pada ruang metrik lengkap X. Untuk setiap $x \in E$, keluarga bilangan-bilangan $(U_i(x))_{i \in I}$ adalah terbatas. Maka terdapatlah suatu bola $B_\rho(z)$ dalam X dan suatu bilangan konstan $M > 0$ sedemikian hingga $|U_i(x))| \leq M$ untuk semua $x \in B_\rho(z)$, $i \in I$.

BUKTI :

Untuk $i \in I$ dan $n \in N$, G_{in} merupakan himpunan dari titik $x \in X$ yang mana $|U_i(x)| \leq n$. Karena U_i adalah kontinu maka himpunan G_{in} adalah tertutup. $F_n = \bigcap_{i \in n} G_{in}$ juga tertutup dan F_n memuat titik-titik $x \in X$ yang mana $|U_i(x)| \leq n$ untuk setiap $i \in I$. Hypotesa bahwa $(x_i(x))_{i \in I}$ adalah terbatas untuk setiap titik berarti $X = \bigcup_{n \in N} F_n$.
Maka terdapatlah bola $B\rho(z)$ yang termuat dalam F_n, dimana $|U_i(x)| \leq n$ untuk semua $x \in B\rho(z)$ dan $i \in I$.

TEOREMA 7 (TEOREMA BANACH-STEINHANUS)

Diberikan $(U_i)_{i \in I}$ merupakan keluarga dari bentuk-bentuk linier kontinu pada ruang banach E. Untuk setiap $x \in E$ keluarga dari skalar-skalar $(U_i(x))_{i \in I}$ adalah terbatas. Maka terdapat suatu konstanta $M > 0$ sedemikian hingga $|U_i(x)| \leq M \; \|x\|$. Untuk setiap $x \in E$ dan $i \in I$.

BUKTI :

(Dengan Teorema Osgod) terdapatlah suatu $B_\rho(z)$ dalam E dan $N > 0$ sedemikian hingga $|U_i(x)| \leq N$ untuk semua $x \in B_\rho(z)$ dan $i \in I$.

Jika x sembarang dalam E maka

$$\frac{x}{\|x\|}\rho + z \in B_\rho(z)$$

Dan selanjutnya

$$\left|U_i\left(\frac{x}{\|x\|}\rho + z\right)\right| \leq N \qquad , \forall i \in I$$

$$\left|U_i\left(\frac{x}{\|x\|}\rho\right)\right| = \left|U_i\left(\frac{x}{\|x\|}\rho + z - z\right)\right|$$

$$\leq \left|U_i\left(\frac{x}{\|x\|}\rho + z\right)\right| + |U_i(z)|$$

$$\leq 2N$$

dan

$$|U_i(x)| \leq \frac{2N}{\rho}\|x\| \quad \text{untuk } \forall x \in E \text{ dan } i \in I$$

$$M = \frac{2n}{\rho}$$

DEFINISI 37

E merupakan ruang vektor norm atas field K, dan ruang dual dari E dituliskan dengan E' merupakan himpunan dari semua bentuk-bentuk linier kontinu pada E sedemikian hingga E' merupakan ruang Banach atas field K.

3.2. RUANG KONVEK LOKAL

DEFINISI 38

Himpunan A dalam ruang vektor E adalah konvek, jika untuk $x \in A$, $y \in A$, $0 \le \alpha \le 1$ memenuhi $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$

CONTOH 13 :

Bola tertutup $B_\rho(a)$ dalam ruang vektor norm merupakan himpunan konvek karena untuk $x \in B_\rho(a)$ dan $y \in B_\rho(a)$ berarti $\|a-x\| \le \rho$, $\|a-y\| \le \rho$; diberikan $\beta = 1-\alpha$

$$\text{sehingga } \|a-\alpha x-\beta y\| = \|\alpha(a-x) + \beta(a-y)\|$$
$$\le \alpha\|a-x\| + \beta\|a-y\|$$
$$\le \alpha\rho + \beta\rho = \rho$$
$$\le \rho$$

jadi $\alpha x + \beta y \in \beta_\rho(a)$

Himpunan A adalah konvek jika untuk $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\alpha + \beta = 1$ memenuhi $\alpha A + \beta B \subset A$.

Jika A merupakan konvek dalam E, maka A + a adalah konvek untuk setiap $a \in E$, dan λA adalah konvek untuk setiap $\lambda \subset K$.

Himpunan A balanced dan konvek jika hanya jika untuk setiap $x, y \in A$ dan $\lambda, \mu \in K$ sedemikian hingga $|\lambda| + |\mu| \leq 1$

Diberikan dua ruang vektor E , F dan f merupakan pemetaan linier dari E into F

Jika A konvek dalam E, maka f(A) adalah konvek dalam F.

Jika B konvek dalam F, maka $f^{-1}(B)$ adalah konvek dalam E.

Interseksi dari sembarang keluarga himpunan konvek merupakan himpunan konvek. Diberikan himpunan sembarang B dalam E, maka terdapatlah himpunan konvek paling kecil A yang memuat B, yaitu irisan dari semua himpunan-himpunan konvek yang memuat B. Himpunan A disebut CONVEX HULL dari B.

CONTOH 14 :

Bola terbuka $B_\rho(a)$ dalam ruang vektor norm merupakan himpunan konvek, karena jika $x \in B_\rho(a)$ dan $y \in B_\rho(a)$ maka untuk $0 < t < 1$ berlaku,

$$\begin{aligned} \| tx + (1-t)y - a \| &= \| t(x-a) + (1-t)9y-a) \| \\ &\leq t\| x-a \| + (1-t)\| y-a \| \\ &< t\rho + + (1-t)\rho \\ &= \rho \end{aligned}$$

jadi $tx + (1-t)y \in B_\rho(a)$

DEFINISI 39

Ruang vektor topologi merupakan konvek lokal jika masing-masing titik mempunyai system fundamental persekitaran-persekitaran konvek.

Dengan kata lain ruang vektor topologi merupakan konvek lokal jika 0 merupakan system fundamental dari persekitaran-persekitaran konvek .

PROPOSISI 1

Dalam ruang konvek lokal persekitaran konvek dari 0 yang balanced dan tertutup, membentuk system fundamental persekitaran-persekitaran dari 0.

BUKTI :

Diberikan W merupakan persekitaran dari 0 dan memuat persekitaran tertutup dari 0 (teorema 5). Dengan V memuat persekitaran konvek U dari 0 dan $\bar{U}$ merupakan persekitaran dari 0 yang tertutup, balanced dan konvek yang termuat dalam W.

3.3. HIMPUNAN TERBATAS (BOUNDED SETS)

DEFINISI 40

E Merupakan ruang vektor atas field K dan A,B merupakan himpunan bagian dari E. A absorb B jika terdapat $\alpha > 0$ sedemikian hingga $B \subset \lambda A$ untuk setiap $\lambda \in K$ sedemikian hingga $|\lambda| \geq \alpha$.

$A \subset E$ absorbing jika A absorbs semua himpunan-himpunan bagian dari E, jika A balanced maka A absorbs, jika terdapat $\mu \in K$ sedemikian hingga $B \subset \mu A$. Jadi jika ini terpenuhi maka untuk $|\lambda| \geq |\mu|$, $|\lambda^{-1}\mu| \leq 1$ dan selanjutnya

$B \subset \mu A = \lambda(\lambda^{-1}\mu)A \subset \lambda A$

DEFINISI 41

Himpunan B dalam ruang vektor topologi adalah terbatas, jika B diabsorb oleh setiap persekitaran dari 0.

Untuk ruang vektor topologi E dan F, dan f merupakan pemetaan linier dari E into F maka bayangan (image) onto f dari himpunan terbatas dari E adalah himpunan terbatas di F. Diberikan A merupakan himpunan terbatas di E dan W persekitaran dari 0 di F, maka $f^{-1}(W)$ adalah persekitaran dari 0 di E dan absorbs A. Ini menunjukan bahwa W absorbs f(A). Himpunan yang termuat dalam himpunan terbatas jelas terbatas. Gabungan dari dua himpunan terbatas merupakan himpunan terbatas , gabungan berhingga dari himpunan-himpunan terbatas adalah terbatas. Diberikan A dan B merupakan himpunan terbatas.

Untuk persekitaran balanced V dari 0 terdapatlah $\alpha > 0, \beta > 0$ sedemikian hingga $A \subset \alpha V$ dan $B \subset \beta V$. Diberikan $\gamma = \max(\alpha,\beta)$, kita dapatkan $A \cup B \subset \gamma V$.

$\mathfrak{B}$ merupakan koleksi dari himpunan-himpunan terbatas dari E disebut system fundamental dari himpunan-himpunan terbatas jika untuk setiap himpunan terbatas B dari E terdapatlah $F \in \mathfrak{B}$ sedemikian hingga $B \subset F$.

Dalam ruang konvek lokal, himpunan-himpunan terbatas yang tertutup, konvek, balanced membentuk system fundamental dari himpunan-himpunan terbatas. Untuk memperlihatkan ini diberikan B merupakan himpunan terbatas dan F merupakan interseksi dari semua himpunan konvek, balanced, tertutup yang memuat B, maka F merupakan himpunan konvek, balanced, tertutup yang memuat B (yaitu convex hull dari B, balanced dan tertutup)

Jadi F terbatas.

Dengan proposisi 1 persekitaran-persekitaran konvek dari 0 yang balanced, tertutup membentuk system fundamental persekitaran dari 0, dan jika V merupakan persekitaran dan $B \subset \lambda V$ maka $F \subset \lambda V$. E merupakan ruang konvek lokal dengan topologi yang dibatasi oleh keluarga semi norm $(q_i)_{i \in I}$. $B \subset E$ adalah terbatas jika hanya jika setiap q_i terbatas di B.

Diberikan ruang vektor E dan semi norm q pada E. q membatasi topologi konvek lokal di E dan pada topologi ini E mempunyai system fundamental dari persekitaran terbatas dari 0 yang dibentuk oleh himpunan

$$V_\varepsilon = \{ x \mid q(x) \leq \varepsilon \}$$

<u>DEFINISI 42</u>

Diberikan E merupakan ruang vektor topologi dan A himpunan bagian dari E. Filter $\mathfrak{F}$ di A merupakan <u>filter Cauchy</u>, jika untuk setiap persekitaran V dari 0 di E terdapatlah himpunan $X \in \mathfrak{F}$ sedemikian hingga $X-X \subset V$; berarti bahwa, $x-y \in V$ untuk setiap $x,y \in X$.

Himpunan bagian A dari ruang vektor topologi adalah lengkap jika setiap filter Cauchy P konvergen ke titik dari A.

Ruang vektor topologi adalah Quasi-lengkap, jika setiap himpunan bagian tertutup adalah lengkap.