BAB II

KONSEP-KONSEP DASAR

Himpunan merupakan sekelompok obyek yang berada dalam satu kesatuan. Lebih lanjut yang dimaksud himpunan semesta disini yaitu suatu himpunan darimana himpunan lainnya dibentuk.

Sedangkan himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian B jika dan hanya jika setiap unsur himpunan A juga merupakan unsur himpunan B (dinotasikan dengan $A \subset B$). Jika A suatu himpunan dan U himpunan semestanya maka yang dimaksud dengan himpunan komplemen A ialah himpunan $\{ x \mid x \notin A$ dan $x \in U \}$

Jika A,B merupakan himpunan, maka yang dimaksud dengan irisan (interseksi) A dan B ialah suatu himpunan yang unsur-unsurnya terdiri dari unsur-unsur himpunan A yang sekaligus merupakan unsur himpunan B, dengan kata lain $A \cap B : \{ x \mid x \in A$ dan $x \in B \}$.

Sedangkan yang dimaksud A gabungan (Union) B yaitu suatu himpunan yang unsur-unsurnya terdiri dari semua unsur himpunan A saja atau semua unsur B saja atau semua unsur himpunan A dan sekaligus di himpunan B, dinotasikan dengan $A \cup B = \{ x \in A$ atau $x \in B\}$.

Dalam penulisan ini akan disinggung juga pengertian vektor secara ilmu ukur. Vektor disini didefinisikan dengan suatu potongan garis yang mempunyai arah, dimana untuk menggambarkan dengan memberi tanda panah pada titik ujungnya.

Sedangkan untuk menuliskan dapat memakai salah satu notasi berikut $\bar{a}$, $\overrightarrow{a}$, a, $\bar{A}$, $\overrightarrow{A}$, $\underline{A}$ $\overrightarrow{AB}$ ataupun $\overline{AB}$. Panjang vektor a dituliskan dengan $|a|$. Untuk menjumlahkan vektor dapat digunakan metode jajaran genjang atau metode segitiga. Penjumlahan vektor bersifat komutatif, artinya untuk setiap vektor a & b berlaku a + b = b + a ; sedangkan untuk perkalian dengan skalar k, kalau k suatu skalar bilangan riil, a suatu vektor maka perkalian skalar ka menghasilkan suatu vektor yang panjangnya $|k|$ kali panjang a dan arahnya sama dengan a (bila k positif), atau berlawanan a bila k negatif. Bila k = 0 maka ka = 0 disebut vektor nol yaitu vektor yang titik awal dan titik ujungnya berimpit.

Untuk R^n (ruang berdimensi n) dapat diperluas sebagai berikut:

V_1 Vektor posisi dari titik $A(a_1,a_2,..,a_n)$ adalah $OA = [a_1,a_2,..,a_n]$

V_2 Vektor bertitik awal di $P(p_1,p_2,...,p_n)$ dan bertitik ujung di $Q(q_1,q_2,...,q_n)$ adalah $PQ = [q_1-p_1,q_2-p_2,...,q_n-p_n]$.

V_3 Panjang vektor $a = [a_1,a_2,..,a_n]$ adalah

$$|a| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+...a_n^2}.$$

Jarak 2 titik $P(p_1,p_2...,p_n)$ dan $Q(q_1,q_2,...,q_n)$ adalah panjang vektor PQ yaitu :

$$|PQ| = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+....+(q_n-p_n)^2}$$

V_4 Vektor $a = [a_1,a_2,...,a_n]$ dan $b = [b_1,b_2,$

$b_3, \ldots, b_n]$ sama jika $a_i = b_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$

V_5 Vektor-vektor satuan dari susunan koordinat adalah $e_1 = [1,0,\ldots,0]$ $e_2 = [0,1,\ldots,0]$, $\ldots$, $e_n = [0,0,\ldots,1]$ dan $a = [a_1,a_2,\ldots,a_n]$ maka $a = a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n$.

V_6 Penjumlahan vektor $a = [a_1,a_2,\ldots,a_n]$ dan $b = [b_1,b_2,\ldots,b_n]$ berlaku :

$$\begin{aligned} a+b &= [a_1,a_2,\ldots,a_n] + [b_1,b_2,\ldots,b_n]. \\ &= a_1e_1+a_2e_2+\ldots a_ne_n+b_1e_1+b_2e_2+\ldots+b_ne_n \\ &= (a_1+b_1)e_1+(a_2+b_2)e_2,\ldots,(a_n+b_n)e_n \\ &= [a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n] \end{aligned}$$

V_7 Perkalian Vektor $a = [a_1,a_2,\ldots,a_n]$ dengan skalar k berlaku :

$$\begin{aligned} ka &= k[a_1,a_2,\ldots,a_n] \\ &= k[a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n] \\ &= ka_1e_1+ka_2e_2+\ldots+ka_ne_n \\ &= [ka_1,ka_2,\ldots,ka_n] \end{aligned}$$

DEFINISI 1

Suatu Vektor v dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ bila terdapat skalar $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ sedemikian hingga $v = \lambda_1u_1+ \lambda_2u_2 + \lambda_3u_3+\ldots+\lambda_nu_n$

2.1. RUANG TOPOLOGI

Ditentukan himpunan sembarang S, terdiri atas elemen-elemen yang tidak didefinisikan (Undefined elements)

DEFINISI 2

Suatu σ yang anggota-anggotanya merupakan himpunan-himpunan bagian dari S [$\sigma \subset 2^S$ dimana 2^S adalah himpunan semua himpunan bagian dari S (Power Set dari S)] disebut suatu topologi untuk S bila dan hanya bila memenuhi aksioma dibawah ini:

RT 1 $\phi \in \sigma$

RT 2 $S \in \sigma$

RT 3 Apabila $G_i \in \sigma$ untuk setiap $i \in I$, dimana I suatu Index set yang berhingga atau tak berhingga, maka $\bigcup_i G_i \in \sigma$

RT 4 Apabila $G_i \in \sigma$ untuk setiap $i \in I$, dimana I suatu index set yang disyaratkan berhingga, maka $\bigcap_i G_i \in \sigma$, dengan kata lain setiap interseksi (disyaratkan finite) dari anggota σ menghasilkan anggota σ.

Anggota dari S disebut titik, sedangkan anggota dari σ disebut himpunan terbuka (open set). Pasangan (S,σ) disebut ruang topologi.

2.1.1 INTERIOR, EXTERIOR, BOUNDARY

Misalkan (X,σ) adalah ruang topologi dan $A \subset X$

DEFINISI 3

Union semua open sets yang termuat dalam A disebut interior dari A dengan notasi A_i

Karena A_i merupakan union semua open sets yang termuat dalam A maka A_i adalah open sets terbesar yang termuat dalam A. Selanjutnya himpunan A adalah terbuka bila dan hanya bila $A_i = A$

DEFINISI 4

Exterior A, ditulis ext(A) atau A_e interior dari komplemen A, yaitu $Int(A^c)$; Diberikan (X,σ) ruang topologi dan $A \subset X$ maka :A tertutup bila dan hanya bila A^c terbuka

DEFINISI 5

Perbatasan (Boundary) A, ditulis A_b adalah himpunan titik-titik yang bukan anggota interior maupun exterior.

Jadi $A_b = (A_i \cup A_e)^c$

CONTOH 1:

Misal (X,σ) adalah ruang topologi.

Pandang topologi berikut ini untuk $X = \{a,b,c\}$

$\sigma = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},S\}$ dan himpunan bagian $A = \{b,c\}$ dari X ; $A^c = \{a\}$

Maka himpunan terbuka (open sets) yang termuat dalam $A = \{\phi,\{b\}\}$

Jadi $A_i = \phi \cup \{b\} = \{b\}$

Sedang open sets yang termuat dalam $A^c = \{\phi,\{a\}\}$

jadi $A_e = \phi \cup \{a\} = \{a\}$

$H_b = (H_i \cup H_e)^c = (\{b\} \cup \{a\})^c = \{a,b\}^c = \{c\}$

CONTOH 2:

Misalkan $X = \{a,b,c\}$

dan $\sigma = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$ adalah topologi pada X. Maka : $\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$ adalah himpunan terbuka di (X,σ). dan komplemennya adalah :

$\{X,\{b,c\},\{a,c\},\{c\},\phi\}$ adalah himpunan tertutup di (X,σ)

DEFINISI 6

Jika p disebut titik limit (limit point) dari suatu himpunan $A \subseteq X$ jika dan hanya jika setiap himpunan terbuka yang memuat p (setiap persekitaran G_p) memuat suatu titik dari A yang berlainan dengan p, dengan symbolisma :

p titik limit dari A jika dan hanya jika :

$$(\forall G_p)\ G_p \cap A - \{p\} \neq \phi$$

Himpunan titik limit dari A disebut himpunan penurun (derived set) dari A ditulis dengan notasi : A' atau A^d

DEFINISI 7

Penutup himpunan A ditulis $\overline{A}$ adalah irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat A; dengan symbolisma :

$$\overline{A} = \bigcap_i F_i ;\ \{F \subset X \mid F \text{ tertutup dan } i \in N\}$$

atau

Closure (penutup) dari A (notasi $\overline{A}$) dengan rumus:

$$\bar{A} = df.\ A \cup A_b$$

CONTOH 3:

Jika $\sigma=\{\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},X\}$ adalah topologi untuk $X=\{a,b,c,d,e\}$. Maka himpunan-himpunan bagian tertutup dari X adalah X, $\{b,c,d,e\}$, $\{a,b,e\},\{b,e\},\{a\},\phi$. Jadi penutup dari himpunan-himpunan $A = \{b\}$ adalah $\bar{A}$ dengan

$\bar{A} = X \cap \{b,c,d,e\} \cap \{a,b,e\} \cap \{b,e\} = \{b,e\}$

$B = \{b,c\}$ adalah $\bar{B}$ dengan $\bar{B} = X \cap \{b,c,d,e\}$ $= \{b,c,d,e\}$

$C = \{a,b,c\}$ adalah $\bar{C}$ dengan $\bar{C}=X$

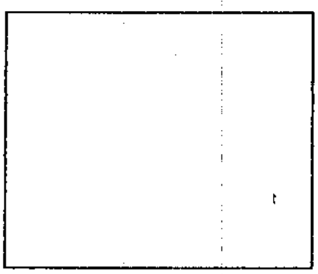
$D = \{a,c,d\}$ adalah $\bar{D}$ dengan $\bar{D}=X$

$E = \{b,c,d,e\}$adalah $\bar{E}$ dengan $\bar{E} = X \cap \{b,c,d,e\}$ $= \{b,c,d,e\}$

2.1.2 PERSEKITARAN, SYSTEM PERSEKITARAN

DEFINISI 8

Persekitaran (neighbourhood) dari titik $\varkappa$ didalam ruang topologi (S,σ) dimaksud himpunan yang memuat suatu himpunan terbuka $G_\varkappa$ yang memuat $\varkappa$



Suatu himpunan terbuka merupakan sekitar dari setiap titik yang terletak didalamnya. Selanjutnya himpunan semua sekitar dari titik $\varkappa$ disebut system persekitaran dari $\varkappa$

atau $\mathcal{N}(x)$.

Sebaliknya, apabila himpunan E merupakan sekitar dari setiap titik didalamnya maka E pastilah open sebab untuk $x \in E$ pastilah dapat ditemukan open set G_x dan termuat dalam E. Sebagai Union dari Open sets maka E adalah open.

Catatan diatas menghasilkan suatu karakteristik dari open sets yaitu himpunan $H \subseteq S$ adalah open (jadi $H \in \sigma$) bila dan hanya bila ia merupakan sekitar dari setiap titik didalamnya.

H terbuka $\Leftrightarrow (\forall x \in H)(\exists G_x),\ x \in G_x \subseteq H$

DEFINISI 9

Misal (X,σ) ruang topologi dan $t \in X$.

Himpunan $\varphi \subset \mathcal{N}(t)$ disebut System fundamental (fundamental System) dari t bila untuk setiap $V \in \mathcal{N}(t)$ dapat ditemukan $W \in \varphi$ sedemikian hingga $W \subset V$; dengan symbolisma;

$(\ \forall\ V \in \mathcal{N}(t)\ )\ (\ \exists\ W \in \varphi\ ),\ W \subset V,$

Jika φ adalah system fundamental dari $t \in X$ maka setiap himpunan $W \in \varphi$ adalah persekitaran dari t.

Tetapi system fundamental dari t tidak harus memuat semua persekitaran dari t.

Ruang topologi (X,σ) dimana untuk setiap titik $x \in X$, koleksi $\mathfrak{B}(x)$ dari himpunan-himpunan bagian dari X maka aksioma dibawah ini dipenuhi

NB 1 Jika $W \subset X$ dan W memuat himpunan $V \in \mathfrak{B}(x)$ maka $W \in \mathfrak{B}(x)$.

NB 2 Interseksi dari koleksi berhingga himpunan-himpunan dalam $\mathfrak{B}(x)$ termasuk $\mathfrak{B}(x)$.

NB 3 Jika $V \in \mathfrak{B}(x)$ maka $x \in V$

NB 4 Jika setiap $V \in \mathfrak{B}(x)$ terdapat $W \in \mathfrak{B}(x)$ sedemikian hingga untuk setiap $y \in W$ maka $V \in \mathfrak{B}(y)$

CONTOH 4 :

Misal (X,σ) adalah ruang topologi, $X=\{a,b,c,d\}$ dan $\sigma=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\},X\}$, maka

$N(a) = \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},$
$\{a,c,d\},X\}$

Jika diambil φ adalah semua himpunan bagian terbuka dari X yang memuat a, yaitu $\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},x\}$ maka φ adalah system fundamental dari a, sebab:

$(\forall\ V \in N(a))\ (\exists W \in \varphi), W \subset V$

2.1.3 BASIS

DEFINISI 10

1. Ditentukan ruang (S,σ). Maka sub keluarga $\beta \subseteq \sigma$ disebut basis untuk σ bila dan hanya bila setiap anggota σ (yaitu open set) dapat "dicapai" sebagai $U_i \beta_i$ dimana setiap $\beta_i \in \beta$ dan dimana index i berjalan pada suatu index set I.

dengan symbolisma :

$(\forall G \in \sigma)(\exists$ index set $I).G = \bigcup\{\beta_i \mid i \in I\}$ dimana setiap $\beta_i \in \beta$ atau dengan kata lain

2. β basis untuk σ <u>bila dan hanya bila</u> untuk setiap $G \in \sigma$ dan setiap $x \in G$ dapat ditemukan suatu $\beta_i \in \beta$ sedemikian hingga $x \in \beta_i \subseteq \beta$, dimana indeks i berjalan pada suatu indeks set I .

<u>CONTOH 5:</u>

Diberikan ruang topologi (S,σ)

$S=\{a,b,c\}$

$\sigma=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},S\}$

Buktikan bahwa:

$\beta=\{\{a\},\{b\},S\}$

$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3$

Bukti :

1. Anggota β merupakan anggota $\sigma \longrightarrow$ terpenuhi
2. $\{a\} = \beta_1 \cup \beta = \{a\} \cup \{a\}$

$\{b\} = \beta_2 \cup \beta_2 = \{b\} \cup \{b\}$

$S = \beta_3$

$\{a,b\} = \beta_1 \cup \beta_2$

$\phi = \bigcup \beta_i$ dengan $i \in \phi$

<u>DEFINISI 11</u>

Jika X merupakan ruang topologi maka himpunan β akan merupakan basis dari topologi X bila hanya bila untuk setiap $x \in X$, himpunan $V \in \beta$

sedemikian hingga $\varkappa \in V$ merupakan system fundamental dari X.

2.2 FIELD

DEFINISI 12

Suatu field ialah suatu himpunan K yang tidak kosong yang memenuhi:

I. Terhadap Jumlahan.

1. Untuk semua a,b dalam K dapat ditemukan dengan tunggal elemen c dalam K juga, sedemikian hingga a+b=c.
2. Untuk semua a,b,c dalam K berlakulah : (a+b)+c = a+(b+c)
3. Didalam K terdapat elemen 0 sedemikian hingga untuk setiap a dari K berlaku : 0+a = a+0 = a
4. Untuk setiap a∈K dapat ditemukan elemen -a∈K, sedemikian hingga -a+a = a+(-a) = 0
5. Untuk setiap a,b∈K berlakulah a+b = b+a

II. Terhadap Pergandaan

1. Untuk semua a,b dalam K dapat ditemukan dengan tunggal elemen c dalam K juga sedemikian hingga a.b = c
2. Untuk semua a,b dalam berlakulah : ab.c = a.bc
3. Ada elemen e elemen K sedemikian hingga a.e = e.a = a
4. Untuk setiap a,b dalam K berlakulah :

$a.b = b.a$

5. Setiap a dalam K yang $a \neq 0$ mempunyai invers a^{-1} dalam R, yaitu $a^{-1}a = a.a^{-1} = e$

III. Distributivitas

1. Untuk semua a,b,c dalam K berlakulah :

$a.(b+c) = ab+ac$ dan $(b+c).a = ba+ca$

2.3 RUANG VEKTOR

DEFINISI 13

Himpunan E dikatakan ruang vektor atas field K, dibatasi dengan dua pemetaan yaitu :

1. Pemetaan $(x,y) \longrightarrow x + y$ dari E X E into E disebut penjumlahan
2. Pemetaan $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda x$ dari K X E into E disebut perkalian dengan skalar .

dan jika untuk $\bar{x},\bar{y},\bar{z} \in E$ dan $a,b \in K$ dipenuhi kondisi sebagai berikut:

i. $\bar{x}+\bar{y} \in E$

ii. $\bar{x}+\bar{y} = \bar{y}+\bar{x}$

iii. $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z} = \bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})$

iv. ada elemen $\bar{0} \in E$, sehingga $\bar{x}+\bar{0} = \bar{x}$

v. ada elemen $-\bar{x} \in E$, sehingga $\bar{x}+(-\bar{x})=\bar{0}$

vi. $a\bar{x} \in E$

vii. $a(\bar{x}+\bar{y}) = a\bar{x}+a\bar{y}$

viii. $(a+b)\bar{x} = a\bar{x}+b\bar{x}$

ix. $(ab)\bar{x} = a(b\bar{x})$

x. $1.\bar{x} = \bar{x}$

Dalam pembahasan selanjutnya field K adalah himpunan bilangan real.

2.4 FUNGSI

DEFINISI 14

Suatu fungsi S ke T atau S sebagai daerah sumber (domain) dan T daerah kawan (co-domain) ialah aturan pada setiap anggota dari S menentukan dengan tunggal satu anggota dalam T .

Setiap fungsi (pemetaan) dari S ke T itu disebut fungsi S into T .

Jika elemen-elemen dari T juga dihabiskan, jadi jika setiap t dalam T mempunyai kawan didalam S, atau dengan perkataan lain jika setiap t dalam T berasal dari suatu s dalam S, maka fungsi itu disebut fungsi dari S onto T . Pemetaan yang onto disebut juga surjektif .

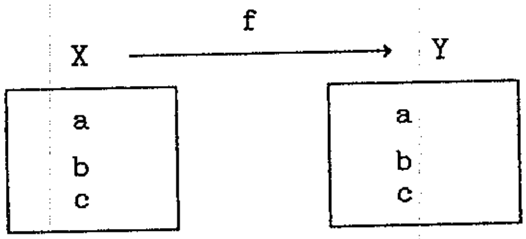
Jika suatu fungsi dengan sifat bahwa setiap $t \in T$ yang mempunyai kawan, hanya mempunyai satu kawan saja, maka fungsi tersebut disebut Injektif .

Suatu fungsi yang sekaligus surjektif dan injektif dinamakan Bijektif .

DEFINISI 15

Diberikan X dan Y adalah ruang Topologi . Suatu fungsi $f : X \longrightarrow Y$ dikatakan kontinu jika untuk setiap himpunan bagian terbuka (tertutup) V dari Y, maka himpunan $f^{-1}(V)$ adalah suatu himpunan bagian terbuka (tertutup) dari X .

CONTOH 6 :



$\sigma' = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, S\}$ $\quad$ $\sigma = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, S\}$

$f^{-1}\phi = \phi \qquad \in \sigma'$ ....(1)

$f^{-1}\{a\} = \{b,c\} \qquad \in \sigma'$ ....(2)

$f^{-1}\{b\} = \{a\} \qquad \notin \sigma'$ ....(3)

$f^{-1}\{a,b\} = \{a,b,c\} \qquad \in \sigma'$ ....(4)

$f^{-1}Y = X \qquad \in \sigma'$ ....(5)

Karena persamaan (3) tidak memenuhi definisi 19 diatas maka f tidak kontinu di X .

DEFINISI 16

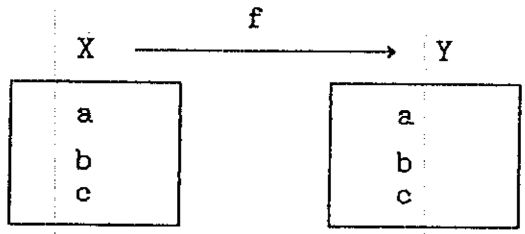
Diberikan X adalah suatu himpunan dan $d : X \times X \longrightarrow R$ adalah suatu fungsi .

Pasangan (X,d) disebut <u>ruang metrik</u> jika :

1. $d(x,y) \geq 0$, untuk semua pasangan $(x,y) \in X \times X$
2. $d(x,y) = 0 \longleftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, untuk semua $x, y, z \in X$
4. $d(x,y) = d(y,x)$,

   untuk semua $(x,y) \in X \times X$ d dinamakan <u>fungsi jarak</u> atau <u>metrik</u> pada X .

CONTOH 6 :



$\sigma' = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, S\}$ $\sigma = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, S\}$

$f^{-1}\phi = \phi$ $\in \sigma'$ ....(1)

$f^{-1}\{a\} = \{b,c\}$ $\in \sigma'$ ....(2)

$f^{-1}\{b\} = \{a\}$ $\notin \sigma'$ ....(3)

$f^{-1}\{a,b\} = \{a,b,c\}$ $\in \sigma'$ ....(4)

$f^{-1}Y = X$ $\in \sigma'$ ....(5)

Karena persamaan (3) tidak memenuhi definisi 19 diatas maka f tidak kontinu di X .

DEFINISI 16

Diberikan X adalah suatu himpunan dan $d : X \times X \longrightarrow R$ adalah suatu fungsi .

Pasangan (X,d) disebut <u>ruang metrik</u> jika :

1. $d(x,y) \geq 0$, untuk semua pasangan $(x,y) \in X \times X$
2. $d(x,y) = 0 \longleftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, untuk semua $x,y,z \in X$
4. $d(x,y) = d(y,x)$,

   untuk semua $(x,y) \in X \times X$ d dinamakan <u>fungsi jarak</u> atau <u>metrik</u> pada X .

bila dan hanya bila dipenuhi aksioma - aksioma berikut :

FB1 $\phi \notin \gamma$ dan $\gamma \neq \phi$

FB2 $(\forall_i)(\forall_j)\ A_i, A_j \in \gamma \longrightarrow (\exists k)(A \subset A_i \cap A_j)$ dan $A_k \in \gamma$ untuk $i,j,k \in I$ = indeks set yang berhingga.

CONTOH 7 :

Misal $X = \{a,b,c\}$, maka

$\gamma_1 = \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

$\gamma_2 = \{\{b\},\{b,c\}\}$

γ_1, γ_2 adalah filter-filter basis pada X, sebab semua aksioma dari filter basis telah terpenuhi .

DEFINISI 21

Pada semesta $X \neq \phi$ setiap system fundamental persekitaran dari sebarang titik $x \in X$ adalah filter pada X dan sekaligus filter basis pada X .

DEFINISI 22

Setiap filter $\mathcal{F}$ adalah merupakan topologi jika pada $\mathcal{F}$ tersebut dimasukkan himpunan kosong .

CONTOH 8 :

Misalkan (X,σ) adalah ruang topologi

Misal $X = \{a,b,c,d\}$

$\sigma = \{\phi,\{a,b\},\{a,b,d\},X\}$ topologi untuk X

$N(a) = \{\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},X\}$ persekitaran dari titik a

Jika para γ_i adalah system fundamental persekitaran dari titik a yaitu :

γ_1 = {{a,b},{a,b,c}} maka γ_1 adalah filter basis pada X.

γ_2 = {{a,b,c},X} maka γ_2 adalah filter basis pada X.

2.6 KOMPAK, DENSE

DEFINISI 23

Selimut terbuka (open cover) suatu himpunan E di dalam ruang metrik X dimaksudkan suatu keluarga himpunan-himpunan terbuka $\{G_\alpha\}$ yang merupakan himpunan bagian dari X sedemikian hingga :

$$E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$$

DEFINISI 24

Suatu himpunan bagian K dalam ruang metrik X disebut kompak jika setiap selimut terbuka untuk K memuat sub selimut berhingga yang masih menyelimuti K .

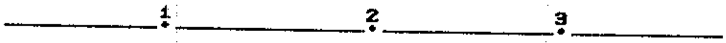
DEFINISI 25

i. Himpunan A dalam ruang metrik X adalah rapat (dense) didalam B jika $A \subset X$, $B \subset X$ dan $\bar{A} \supset B$.

ii. Himpunan A disebut everywhere dense bila hanya bila $\bar{A} = X$.

CONTOH 9 :

Pandang himpunan bilangan real terhadap usual topologi . Ambil $E = \{1,2,3\}$ dan $B = \{1,2\}$



$\notin E_i$	$\notin E_i$	$\notin E_i$
$\notin E_e$	$\notin E_e$	$\notin E_e$
$\in E_b$	$\in E_b$	$\in E_b$

Mengingat $\bar{E} = E \cup E_b$

Jadi $\bar{E} = \{1,2,3\}$

Sehingga $\bar{E} \supset B$ dan E dense di B

Jika sebagai B diambil E sendiri yaitu $B = E = \{1,2,3\}$, maka $\bar{E} = B = E$ everywhere dense di E.

2.7. BARISAN KONVERGEN

Diberikan N merupakan himpunan semua bilangan bulat positif , jadi $N = \{1,2,3,...\}$

Barisan titik-titikda dalam ruang metrik (X,d) adalah suatu fungsi dari N ke dalam X .

Jika $f(n) = s_n$ untuk semua $n \in N$, untuk menyatakan barisan f digunakan lambang $\langle s_n \rangle$ atau sering ditulis $s_1, s_2, s_3, \ldots$ nilai-nilai fungsi untuk f , dinamakan unsur atau suku barisan .

DEFINISI 26

Suatu barisan $\langle s_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $s \in X$ dengan sifat sebagai berikut ; untuk setiap $\epsilon > 0$

terdapat suatu bilangan bulat positif p sedemikian hingga untuk semua n $\geq$ p berlaku $d(s_n,s) < \varepsilon$. Dalam hal ini juga dikatakan bahwa barisan $\langle s_n \rangle$ konvergen ke s, atau s adalah limit barisan $\langle s_n \rangle$ dan dituliskan dengan :

$$s_n \longrightarrow s \quad \text{atau} \quad \lim_{n \to \infty} s_n = s$$

2.8 SUBSPACE

DEFINISI 27

Diberikan ruang topologi (X,σ) . $A \subset X$. A disebut <u>subspace</u> dari X jika A diberi topologi yang dihasilkan dari interseksi dari A dengan <u>open</u> <u>set</u> dari X .

CONTOH 10 :

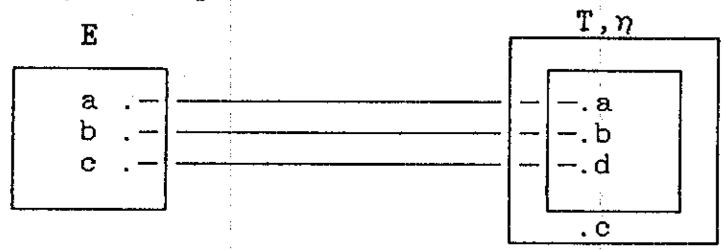
$T = \{a,b,c,d\}$

$\eta = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c,d\},T\}$

$E = \{a,b,d\}$

dilengkapi dengan subspace topologi .

Ditanyakan open set dari E



JAWAB :

$\eta = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c,d\},T\}$

$E = \{a,b,d\}$

$\phi \cap E = \phi$

$\{a\} \cap E = \{a\}$

$\{b\} \cap E = \{b\}$

$\{a,b\} \cap E = \{a,b\}$

$\{b,c,d\} \cap E = \{b,d\}$

$E \cap T = E$

Jadi $\xi = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,d\},E\}$

2.9 BARISAN CAUCHY, RUANG METRIK LENGKAP

DEFINISI 28

Diberikan barisan $\langle s_n \rangle$ didalam ruang metrik X dinamakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilagan bulat P sehingga untuk semua $m \geq P$ dan semua $n \geq P$ berlaku $d(s_m, s_n) < \varepsilon$.

CONTOH 11 :

Barisan $\langle s_n = 1/n \rangle$ didalam ruang metrik selang terbuka (0,2) dengan metrik biasa $d(x,y) = |x-y|$. Barisan ini adalah barisan Cauchy , sebab jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat P sehingga $1/p < \varepsilon$. Untuk semua m dan $n \geq P$ (diambil $m \leq n$) berlakulah $|s_m - s_n| < s_m = 1/m \leq 1/p < \varepsilon$
Jadi barisan $\langle s_n = 1/n \rangle$ merupakan barisan Cauchy.

TEOREMA 1

Didalam sembarang ruang metrik X , setiap barisan konvergen adalah barisan Cauchy .

BUKTI :

Diberikan barisan $\langle s_n \rangle$ didalam X dan lim $s_n = s$. Untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat P sedemikian hingga untuk semua $n \geq P$ berlaku $d(s,s_n) < \varepsilon/2$. Jadi jika n dan m keduanya lebih besar atau sama dengan P berlaku :

$d(s_m,s_n) \leq d(s_m,s) + d(s,s_n) < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$.

Terbukti $\langle s_n \rangle$ suatu barisan Cauchy .

DEFINISI 29

Suatu ruang metrik dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di dalam ruang metrik itu adalah barisan konvergen .

DEFINISI 30

Ruang vektor norm E disebut ruang Banach jika E adalah ruang metrik lengkap .

2.10 DERIVATIF PARSIAL

Turunan fungsi terhadap salah satu Independent variabel dengan menganggap variabel Independent lainnya sebagai konstanta disebut dengan derivatif parsial fungsi .

Derivatif parsial dari fungsi $f(x,y)$ terhadap x dan y dinotasikan dengan:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left[\text{atau } f_x, f_x(x,y), \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \right] \text{ dan}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left[\text{atau } f_y, f_y(x,y), \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \right] \text{ dan}$$

DEFINISI 31

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad \ldots\ldots(1)$$

Bila limit ini ada

Derivatif yang dihasilkan dari titik (x_o, y_o) ditu-liskan dengan

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_o, y_o)} = f_x(x_o, y_o), \text{dan}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_o, y_o)} = f_y(x_o, y_o),$$

Sedangkan derivatif kedua dinotasikan dengan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy} \qquad \ldots.(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

Dengan cara serupa, untuk derivatif order yang lebih tinggi

CONTOH 11 :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \ \partial y} = f_{yxx}$$

pertama f diderivatifkan ke y kemudian baru ke x.