BAB II

DASAR-DASAR GRAPH

2.1. SIMPLE GRAPH DAN MULTIGRAPH

Definisi 2.1.1.

Suatu graph G(V,E) yang terdiri dari himpunan E yang elemenya berupa edge-edge dan himpunan V elemennya berupa vertek yang berhingga dan tak kosong .

Himpunan elemen edge dapat pula berbentuk pasangan (i,j) dimana i dan j merupakan elemen V.

Secara geometri vertex dinyatakan dengan (titik) "." dan edge (garis) dinyatakan dengan garis lengkung "∩" atau garis lurus "———".

Definisi 2.1.2.

Graph G(V,E) disebut simple graph dan selanjutnya disebut graph saja jika dan hanya jika tak memuat garis pararel.

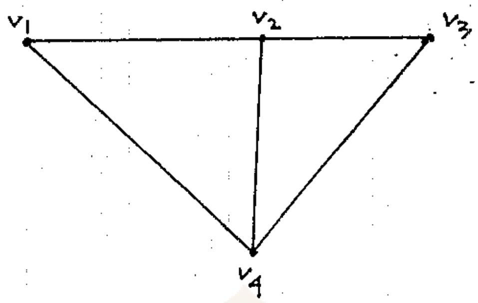
Sedangkan edge yang menghubungkan (i,i) disebut loop.

Definisi 2.1.3.

Suatu vertex (titik) yang tidak incident dengan edge (garis) disebut isolat point.

Contoh :

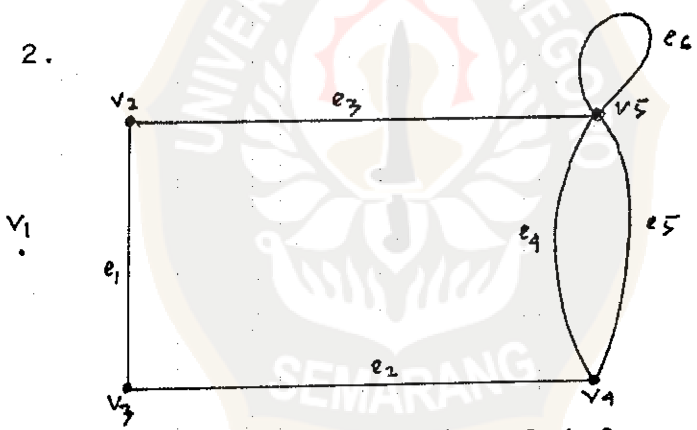
1.



gambar 2.1.2

Gambar 2.1.2 merupakan simple graph.

2.



gambar 2.1.3.

graph G(V,E) dengan $V=\{ v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

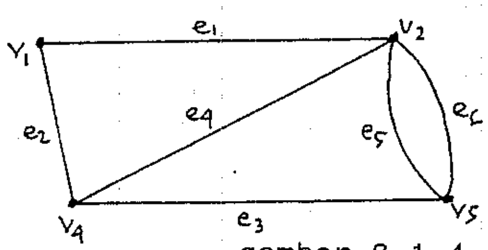
$E=\{ e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$

gambar 2.1.3. bukan simple graph karena terdapat suatu loop yaitu e_5 dan v_1 merupakan isolat point.

Definisi 2.1.4.

Suatu graph G(V,E) disebut multigraph apabila graph tidak memuat loop.

Contoh :



gambar 2.1.4

Graph yang terdiri dari $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

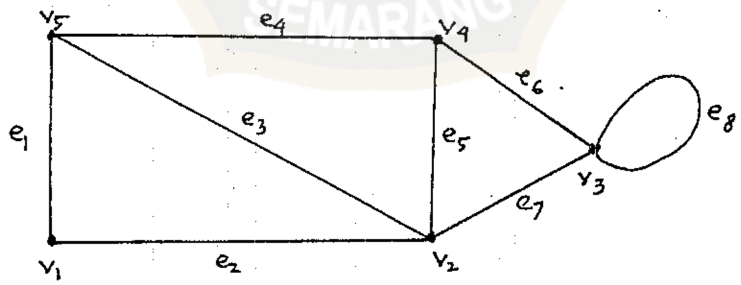
Tampak dari gambar graph tak punya loop.

Definisi 2.1.5.

H dikatakan subgraph G(V,E) jika H adalah suatu graph dengan himpunan vertex (titik) Vs dan himpunan edge Es dengan sifat Vs $\subseteq$ V dan Es $\subseteq$ E

contoh :

Diberikan suatu graph G(V,E)



gambar 2.1.5

dengan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$

Subgraph H

dengan $Vs=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$Es=\{e_4,e_5,e_7,e_8\}$

2.2. DEGREE

Definisi 2.1.1

Degree dari vertex Vi graph G dinotasikan di atau deg vi adalah jumlah edge yang incident dengan vi. Degree dari setiap vertex dari graph G sedikitnya dua maka G memuat suatu circuit.

Contoh :

diberikan graph G seperti gambar 2.1.5 maka degre dari v_2 adalah jumlah edge yang incident dengan v_2 sama dengan 4.

2.3. CONNECTED DAN DISCONNECTED GRAPH

Definisi 2.3.1

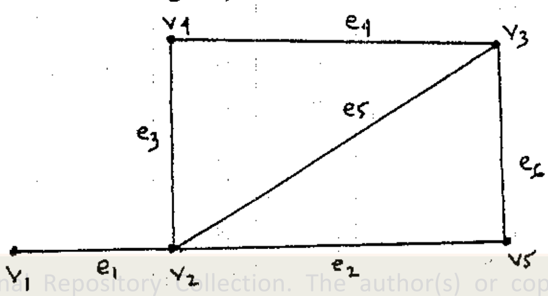
Walk adalah deretan bergantian vertex dan edge dimulai dan diakhiri dengan vertex.

Definisi 2.3.2.

Path adalah suatu barisan edge dan vertex yang berhingga yang tidak boleh diulang.

Contoh :

diberikan graph G (V,E)



gambar 2.3.1

dengan vertex $V=\{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

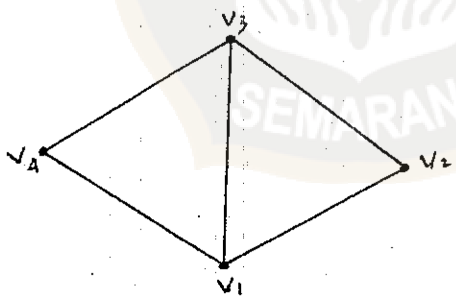
Walk dari graph diatas v_1, e_1, v_2, e_2 v_5, e_6, v_3, e_5, v_2, e_3, v_4

Path dari graph G : v_1, v_2, v_4, v_3, v_5

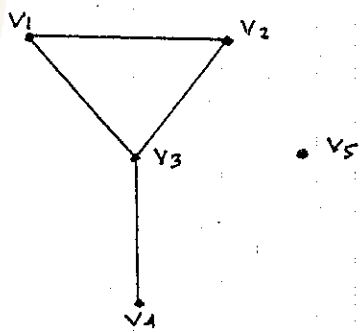
Definisi 2.3.3.

suatu graph G(V,E) dikatakan connected graph jika setiap dua vertex yang berlainan dihubungkan sekurang-kurangnya satu path dan suatu graph G dikatakan disconnected graph jika ditemukan sepasang vertex yang tidak berhubungan melalui satu path.

Contoh :



connected graph



disconnected graph

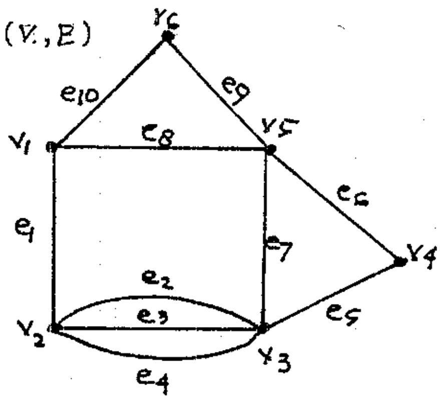
Definisi 2.3.4.

Suatu komponen graph G adalah connected subgraph yang memuat maximal sejumlah edgenya (garis).

Suatu vertex terasing merupakan komponen graph.

Contoh :

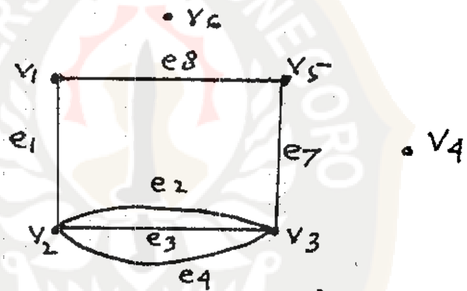
Diberikan multigraph G(V,E)



dengan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$

Subgraph G dari graph diatas.



dengan $Vs = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

$Es=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_7,e_8\}$

Subgraph terdiri atas 3 komponen yaitu :

Komponen I = v_6, komponen II = v_4 dan

komponen III = v_1,v_2,v_3,v_5

2.4 CYCLE DAN CUTSET

Definisi 2.4.1.

Suatu graph G(V,E) dengan p vertex, rank dari graph G adalah $r = p - k$

dimana k jumlah komponen.

Definisi 2.4.2.

suatu cutset dari graph G(E,V)adalah suatu subgraph yang terdiri dari koleksi minimal edge - edge pada graph G(V,E) dimana cut edge - edge tersebut menyebabkan rank dari graph G berkurang satu.

Definisi 2.4.3.

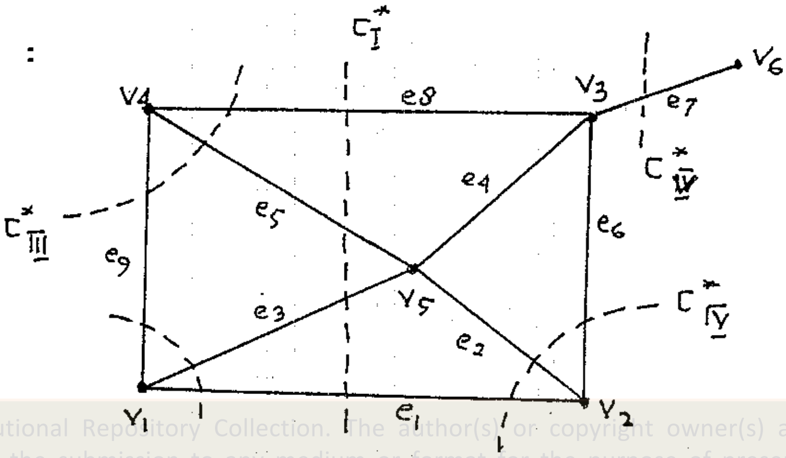
Jika V_1 adalah subset dari V graph G dan $V_2 = V - V_1$, maka himpunan edge - edge yang memisahkan V_1 dan V_2 merupakan cut set dari G dan banyaknya cut adalah $s = 2^r - 1$

dimana $r = p - k$

Definisi 2.4.4.

Suatu cut set dari suatu konected graph adalah koleksi dari edge -edge yang menyebabkan graph G menjadi disconnected graph.

Contoh :



Graph G dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$

$p = 6$ vertex, $k = 1$ komponen

rank $r = p - k = 6 - 1$ k komponen $= 5$

banyaknya cut yang terjadi $s = 2^r - 1$

$= 2^5 - 1 = 31$

garis putus-putus di atas contoh himpunan cut yang menyebabkan rank berkurang satu yaitu :

cut set I $= e_1 e_3 e_5 e_8$ cut set III $= e_8 e_5 e_9$

cut set II $= e_1 e_3 e_9$ cut set IV $= e_1 e_2 e_6$

cut set V $= e_7$

Definisi 2.4.5.

Suatu barisan $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_p$ dari vertec yang berbeda dari suatu graph G. Barisan vertex tidak boleh berulang dua kali dan vertex awal sama dengan vertex akhir maka barisan tersebut dikatakan circuit atau cyle.

2.5. TREE DAN FOREST

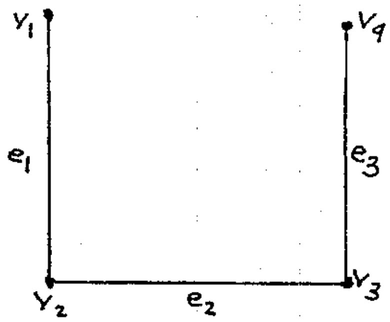
Definisi 2.5.1.

Graph G(V,E) dikatakan tree jika dan hanya jika connected dan tidak punya cycle atau circuit.

Contoh :

Graph $G(V,E)$ terdiri dari $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

$E = \{e_1,e_2,e_3\}$



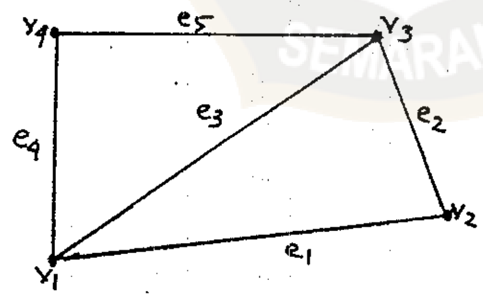
Definisi 2.5.2.

Suatu subgraph dari suatu graph $G(V,E)$ dikatakan tree jika connected dan tidak terdapat cycle atau circuit.

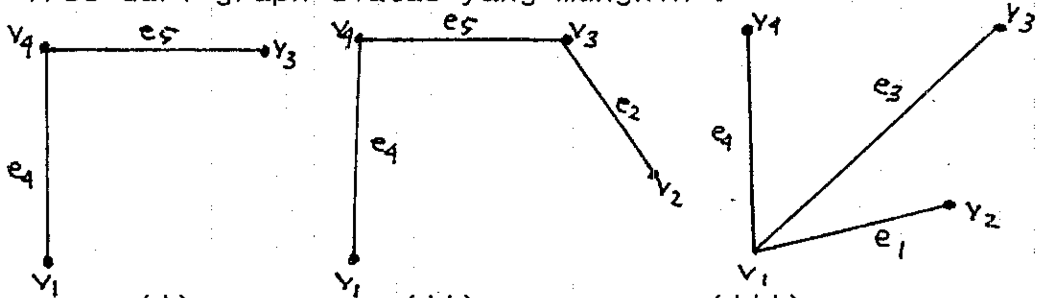
Contoh :

Diberikan graph yang terdiri dari $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$



Tree dari graph diatas yang mungkin :



(i) (ii) (iii)

Definisi 2.5.3.

edge dari tree disebut branch.

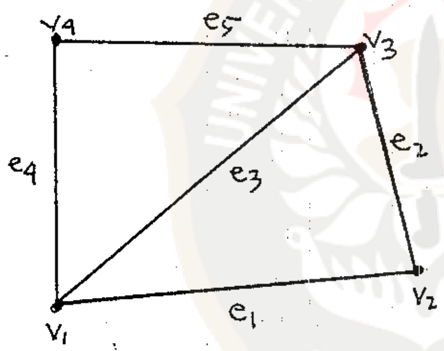
Definisi 2.5.4.

Komplemen dari suatu tree pada suatu graph disebut cotree dan edge-edge dari cotree disebut chord.

Contoh :

Diberikan graph G terdiri dari $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

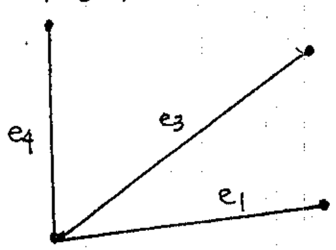
$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, , e_5\}$



misal diambil tree $e_2 e_5$

maka branch adalah $e_2 e_5$.

dan cotreenya adalah complemen dari tree yaitu $e_1 e_3 e_4$.



maka chordnya :$e_1 e_3 e_4$

Definisi 2.5.5.

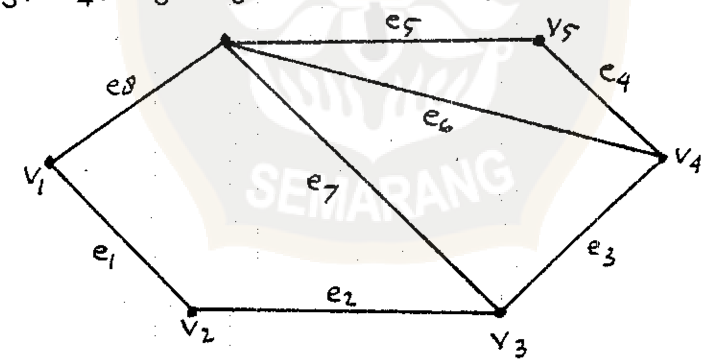
Suatu graph $G(V,E)$ dengan p vertex, rank $r = p - k$ adalah jumlah brach dari suatu tree t pada G dimana k jumlah komponen.

Definisi 2.5.6.

Suatu graph $G(V,E)$ dengan p vertek dan q edge, nullity $m = q - p + k$ adalah jumlah chord dari suatu cotree t pada graph G

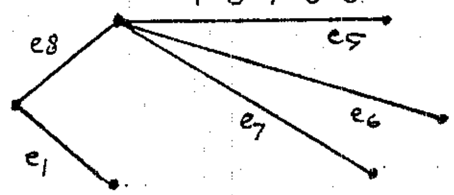
Contoh :

Diberikan graph $G(V,E)$ terdiri dari $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$



$p = 6$, $q = 8$ dan $k = 1$

misal tree $e_1e_8e_7e_6e_5$



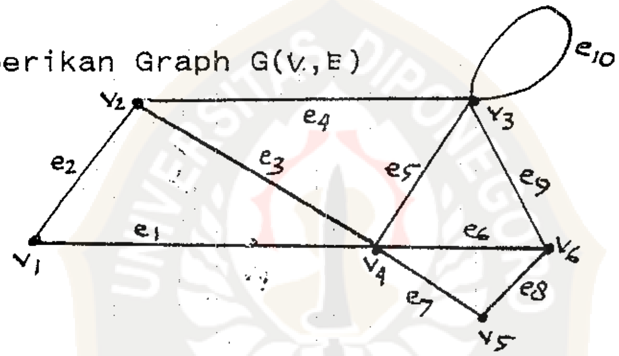
rank $r = p - k = 6 - 1 = 5$

Definisi 2.5.7.

Jika graph $G(V,E)$ terdiri dari beberapa circuit, hapuslah circuit-circuit didalam graph G sehingga tidak memuat circuit, maka akan ditemukan suatu tree yang memuat semua vertex dari graph G sehingga tree dikatakan spanning tree.

Contoh :

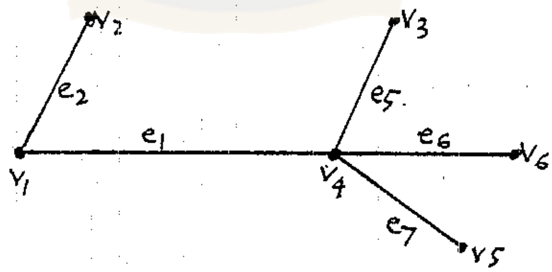
Diberikan Graph $G(V,E)$



Graph G dengan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

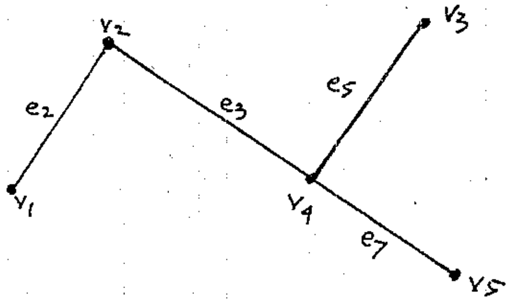
$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$

Salah satu spanning tree dari graph di atas



maka spanning tree yang terjadi $e_1e_2e_5e_6e_7$

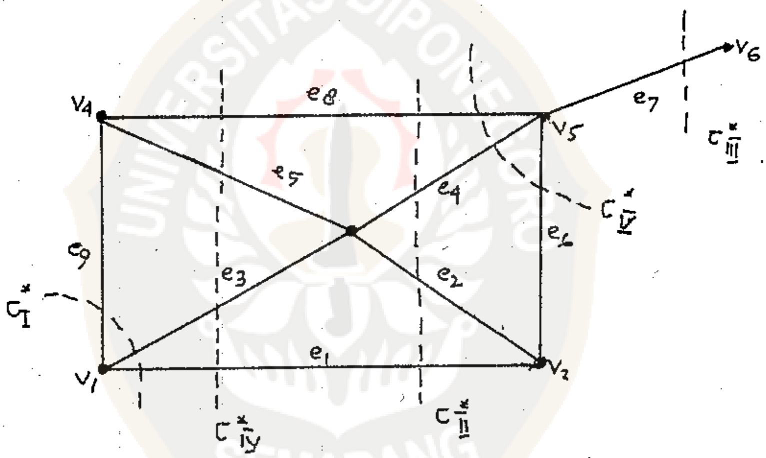
sedangkan graph dibawah ini bukan spanning tree karena tidak memuat semua vertexnya.



Definisi 2.5.8.

Fundamental cut set disingkat f-cutset dari suatu spanningtree t adalah r cut set, dimana r = p - k dan masing-masing cutset memuat satu edge dari t.

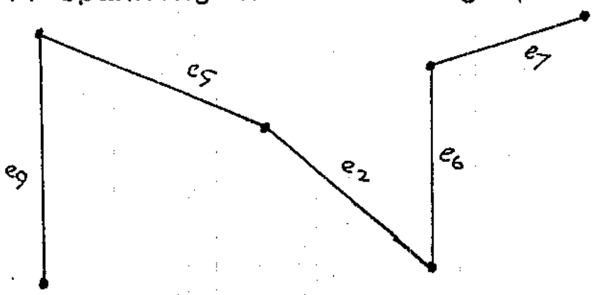
Contoh :



p = 6 vertex, k = 1 komponen

maka r = p - k = 6 -1 = 5

ambil spanning tree t dari graph diatas



maka f-cutset dari t yaitu 5 cut set seperti tampak pada graph diatas yang ditunjukan garis putus-putus yaitu :

cut set I = $e_1e_3e_9$

cut set II = $e_1e_2e_4e_8$

cut set III = e_7

cut set VI = $e_1e_3e_8e_5$

cut set V = $e_4e_6e_8$

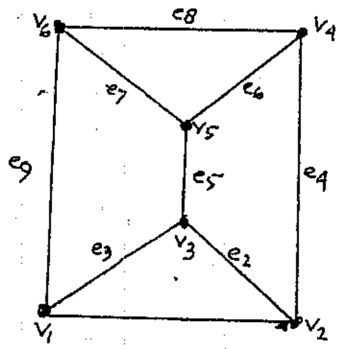
Definisi 2.5.9.

Forest dari graph G(V,E) adalah subgraph G tanpa memuat cycle, graph G boleh connected atau disconnected.

Forest dapat juga didefisikan sebagai kumpulan dari beberapa tree sehingga forest yang terdiri dari satu tree tidak lain tree itu sendiri.

Contoh :

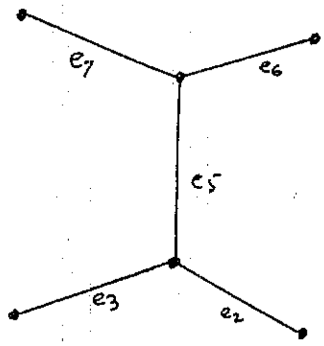
1. diberikan graph G(V,E)



Graph G terdiri dari V = $(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)$

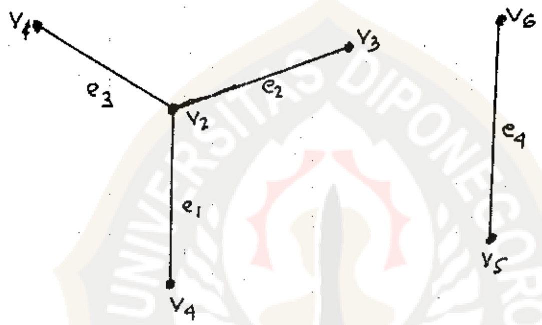
$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$

misal forest dari graph diatas : $e_2e_3e_5e_6e_7$



forest yang terjadi juga merupakan suatu tree atau spanning tree dari graph G

2.



Graph yang disconnected dan terdiri :

6 vertex, 4 edge dan 2 komponen.

Graph ini juga merupakan suatu forest yang terdiri dari 2 tree graph.

Definisi 2.5.10.

maximal forest dari graph G(V,E) adalah forest maximal yang meliputi graph G.

Definisi 2.5.11.

Graph G(V,E) yang punya p vertex dan k connected komponen maka maximal forest dari G mempunyai edge sebanyak p - k edge.

Sedangkan cyclomatic number $\upsilon(G) = q - p + k$

dimana q banyaknya edge.

Definisi 2.5.12.

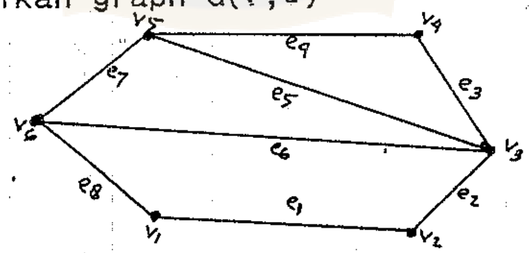
Graph $G(V,E)$ dengan p vertex, q edge dan k komponen konected. $T=(V,E)$ maximal forest G dan $u \in \bar{T} = E-T$ maka terdapat cycle didalam $T+\{u\}$.

Definisi 2.5.13.

$G(V,E)$ dan $T \in E$ dikatakan spanning forest yaitu maximal subgraph dari G tanpa cycle.

Contoh:

1. Diberikan graph $G(V,E)$



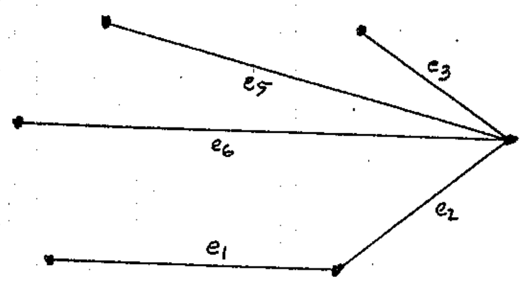
Graph G dengan $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

$E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$

p = 6 vertex, k = 1 komponen dan q = 8 edge

banyaknya edge pada maximal forest graph diatas adalah p - k = 6 - 1 = 5 edge.

Misal maximal forest yang terjadi : $e_1e_2e_6e_3e_5$.



T = $e_1e_2e_3e_5e_6$ merupakan spanning forest karena T tidak memuat cycle.

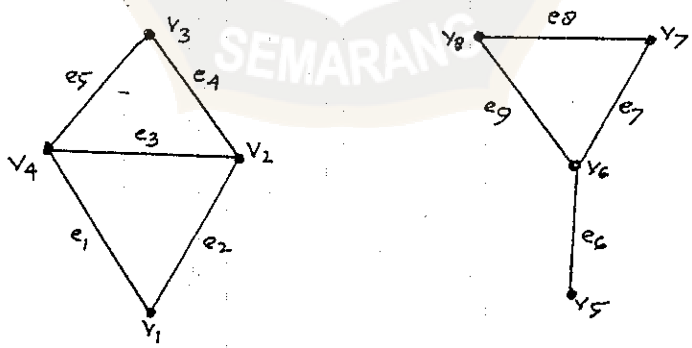
sedangkan cyclomatic number ν (G)

ν (G) = q - p + k

= 8 - 6 + 1 = 3

Cyclomatic number juga merupakan banyaknya edge komplemen spanning forest.

2. Jika graph G(V,E) diskonected



dengan V= $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$

E = $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$

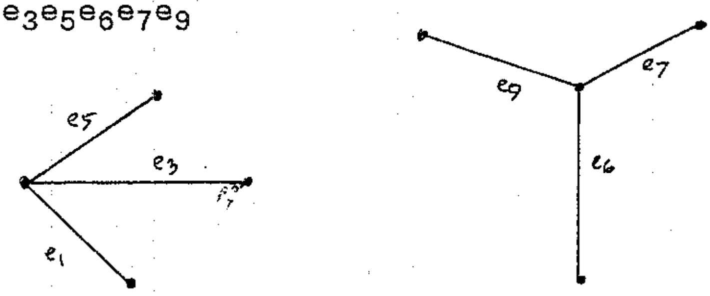
p=8 vertex, q= 9 edge dan k = 2 komponen

maka banyaknya edge maximal forest

P - k = 8 - 2 = 6 edge.

misal maximal forest dari graph di atas

$: e_1 e_3 e_5 e_6 e_7 e_9$



Banyaknya komplemen spanning forest $\nu(G)$

$\nu(G) = q - p + k = 9 - 8 + 2 = 3$

maka komplemen spanning forest dari graph G diatas $e_2 e_4 e_8$.

Definisi 2.5.14.

Suatu graph $G(V,E)$ dan $T \subseteq E$ adalah spanning forest yaitu maximal subgraph G tanpa cycle.

Untuk setiap $e \in E-T$, $T + \{e\}$ memuat tepat satu cycle dan himpunan cycle yang didapat dengan menambah edge dari graph yang tak termuat dalam T disebut fundamental cycle atau fundamental circuit.

Definisi 2.5.15.

Jika G adalah konected graph dan T_1, T_2 merupakan spanning tree dari G maka terdapat edge $e \in T_1$ dan $f \in T_2$ sedemikian sehingga $T_1 - e + f$ juga spanning tree.

Jika G disconnected maka pernyataan di atas berlaku untuk spanning forest.

Definisi 2.5.16.

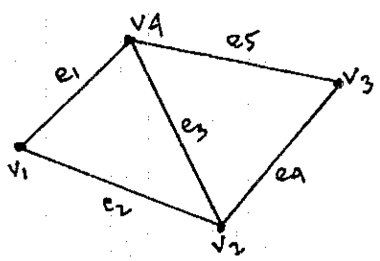
T adalah spanning forest dari G maka :

(a) setiap cut set dari graph G mempunyai suatu edge yang juga edge dalam T.

(b) Setiap cycle dari graph G mempunyai sebuah edge yang juga merupakan edge dalam komplemen dari T.

Contoh :

Diberikan graph G(V,E)



ambil spanning forest $T = \{e_1, e_3, e_5\}$

maka dengan menambahkan sebuah edge bukan anggota T akan memuat tepat satu cycle atau circuit.

Himpunan cycle-cycle yang didapat dikatakan fundamental cycle.

Dari graph di atas fundamental cyclenya adalah :

$C_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ dan $C_2 = \{e_3, e_4, e_5\}$

sedangkan fundamental cutsetnya :

$C^*_1 = \{e_1, e_2\}$ dan $C^*_2 = \{e_4, e_5\}$

maka :

- Setiap cut set mempunyai edge yang juga merupakan edge dalam T :

  $e_1 \in C^*_1 \cap T$ dan $e_5 \in C^*_2 \cap T$

- Setiap circuit mempunyai edge yang juga merupakan edge dalam komplemen T :

  $e_2 \in C_1 \cap T^*$ dan $e_4 \in C_2 \cap T^*$

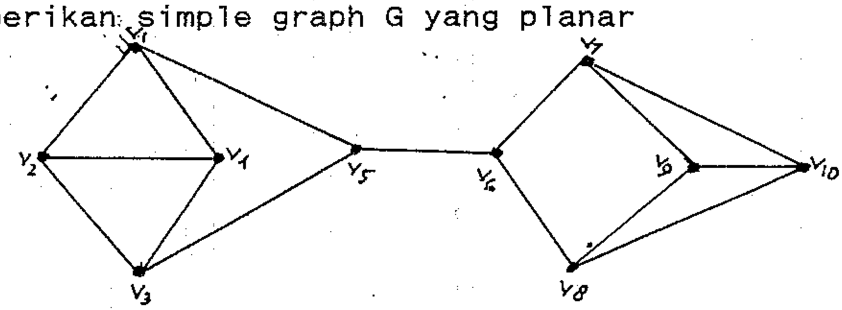
2.6. GRAPH PLANAR DAN DUAL

Definisi 2.6.1.

Graph G dikatakan planar adalah graph yang digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada edgenya yang berpotongan.

Contoh :

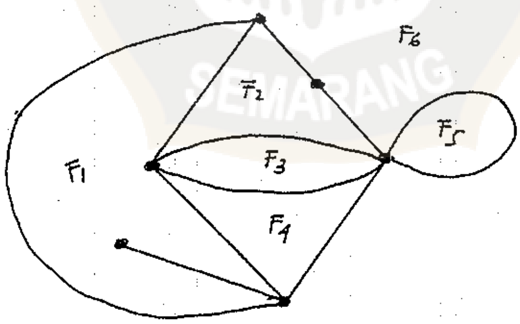
Diberikan simple graph G yang planar



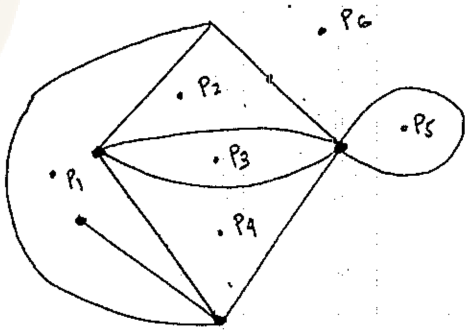
Tampak dari gambar diatas edge dari graph tidak ada yang berpotongan.

Definisi 2.6.2.

Misalkan graph planar G dengan bidang F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 dari graph G (gambara) dan 6 vertec p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 ditempatkan pada masing-masing bidang graph G tersebut.



(a)



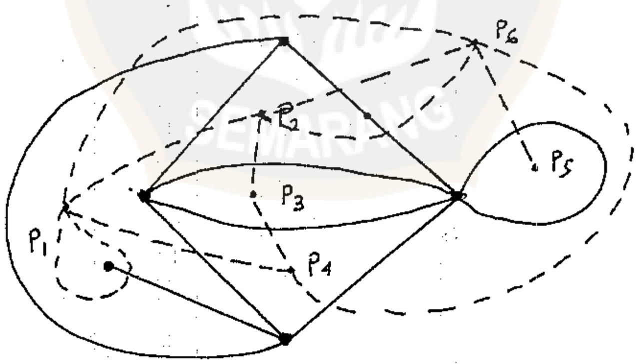
(b)

Kemudian 6 vertex $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ dihubungkan dengan edge sesuai prosedur berikut ;

Jika 2 bidang F_i dan F_j bertetangga (mempunyai edge berserikat) dilukis edge (p_i, p_j) memotong edge berserikat satu kali, jika punya edge berserikat lebih dari satu dilukis lagi edge (p_i, p_j) yang memotong masing-masing edge berserikat diantara F_i dan F_j tepat 1 kali. Untuk edge e dari graph G yang berada pada satu bidang misal F_1 dilukis gelung pada vertex bidang tersebut yang memotong edge e satu kali.

Sehingga menghasilkan graph baru G^* yang dilukis edge putus-putus yang terdiri 6 vertec $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$.

Graph G yang diperoleh dengan procedur di atas disebut dual geometri dari G atau dual G.



Theorema 2.6.1.

G planar dan G^* dual planar dari G.

Himpunan edge dalam G membentuk suatu circuit jika dan hanya jika himpunan edge yang berkorespondensi dalam G^* membentuk cutset dalam G^*.

Bukti :

($\longrightarrow$)

Misal C sembarang circuit dalam G maka C akan membentuk kurva tertutup yang membagi bidang menjadi dua area. Jadi vertex dalam G^* dipisahkan menjadi dua, satu didalam C dan lainnya di luar C.

Dengan kata lain bahwa himpunan edge C^* yang bersesuaian dengan C dalam G adalah cutset dalam G^*.

Terbukti himpunan edge dalam G membentuk circuit maka himpunan edge yang berkorespondensi dalam G^* membentuk cutset dalam G^*.

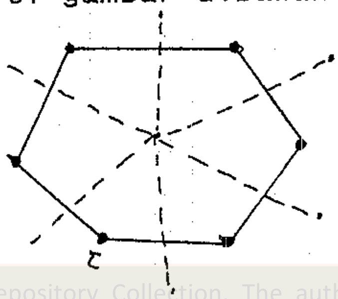
($\longleftarrow$)

Dengan analog diatas

C^* merupakan cutset dalam G^* dan akan membentuk kurva tertutup yang membagi G^* menjadi dua subgraph. Sehingga terdapat circuit C dalam G yang berkorespon-densi dengan cutset dalam G^*.

Terbukti

Seperti gambar dibawah ini :



2.8. OPERASI DALAM GRAPH

Operasi-operasi dalam graph yang akan digunakan di sini yaitu sebagai berikut :

1. Operasi gabungan (union) yang disimbolkan dengan $\cup$, $S_1 \cup S_2$ menunjukan suatu himpunan yangterdiri dari semua elemen yang berada dalam S_1 atau S_2 atau berada dalam keduanya.
2. Operasi irisan (intersection) yang disimbolkan dengan $\cap$, $S_1 \cap S_2$ menunjukan suatu himpunan yang terdiri dari semua elemen yang berada dalam S_1 dan S_2 (berada dikeduanya).
3. Operasi pengurangan (difference) yang disimbolkan dengan $-$, $S_1 - S_2$ menunjukan suatu himpunan yang terdiri dari semua elemen yang berada dalam S_1 tetapi tidak berada dalam S_2.