BAB III

MATERI PENUNJANG

BEBERAPA TEOREMA YANG BERKAITAN DENGAN TEOREMA SYLOW

Definisi 32 :

Misal A sebagai subset yang tidak kosong dari group G maka himpunan $\{ h \mid h^{-1} A h = A, h \in H \}$ adalah dikatakan normalisator dari A di dalam H dan dituliskan $N_H (A)$.

Teorema 25 :

Jika A adalah subset yang tidak kosong dan H sub group dari group G, maka $N_H (A)$ adalah sub group dari group G buktikan !

Bukti :

Diketahui $A \subset G$ dimana $A \neq \emptyset$

H subgroup dari G

Akan dibuktikan bahwa $N_H (A)$ subgroup dari G

Syarat $N_H (A)$ subgroup dari G adalah :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & a, b \in N_H (A) \Longrightarrow a \cdot b \in N_H(A) \\ \text{(ii)} & a \in N_H (A) \Longrightarrow a^{-1} \in N_H(A) \end{array}\right\} \text{dari th 9}$$

$$\begin{aligned} \text{(i) } a, b \in N_H(A) \Longrightarrow & (ab)^{-1} A(ab) \\ & = (b^{-1} a^{-1}) A (ab) \quad \text{dari th 4} \\ & = b^{-1} (a^{-1} A a) b \\ & = b^{-1} A b \\ & = A \end{aligned}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jadi $a,b \in N_H(A) \Longrightarrow (ab)^{-1} A(ab) = A$.

Sehingga menurut def 32.

$a,b \in N_H(A) \Longrightarrow a.b \in N_H(A)$.

(ii) $a \in N_H(A) \Longrightarrow a^{-1} \in N_H(A)$

karena H subgroup maka berlaku $a \in H \Longrightarrow a^{-1} \in H$

$a \in N_H(A) \Longrightarrow a^{-1} A a = A$

$a \in N_H(A) \Longrightarrow a a^{-1} Aaa^{-1} = a A a^{-1}$

$\Longrightarrow (a a^{-1}) A (aa^{-1}) = a A a^{-1}$

$\Longrightarrow A = a A a^{-1}$

$\Longrightarrow a A a^{-1} = A$ (menurut teorema 6, $(a^{-1})^{-1} = a$)

$a \in N_H(A) \Longrightarrow (a^{-1})^{-1} A a^{-1} = A$

$a \in N_H(A) \Longrightarrow a^{-1} \in N_H(A)$

dari (i) dan (ii) menurut teorema 9 terbukti bahwa $N_H(A)$ subgroup dari G.

Contoh 20 : Perlihatkan bahwa $N_H(A) = N_G(A) \cap H$ dimana A adalah subset yang tidak kosong dari G, dan H subgroup dari G.

Penyelesaian :

Misalkan $n \in N_H(A)$ maka $n \in H$ dan $n^{-1} An = A$ (dari def 32).

Karena $H \subseteq G$ maka $n \in G$

Karena $n \in G$ dan A subset G maka berlaku $n^{-1}An = A$ sehingga $n \in N_G(A)$ (def 32).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Maka dari itu $N_H(A) \subseteq N_G(A) \cap H$ .... (i)

Jika $n \in N_G(A) \cap H$ maka $n^{-1} An = A$ dan $n \in H$ sehingga $n \in N_H(A)$.

Dari sini $N_G(A) \cap H \subseteq N_H(A)$ ....(ii)

Dari (i) dan (ii) di dapat $N_H(A) = N_G(A) \cap H$.

Definisi 33 :

Misal A dan B adalah subset-subset yang tidak kosong dari G, B dikatakan sebagai H-conjugate dari A jika $h^{-1} A h = B$. Untuk beberapa $h \in H$ dinotasikan $A \sim B$.

(Catatan : jika H = G maka A dan B adalah conjugate).

Teorema 26 :

Jika G adalah group berhingga dengan subgroup H, dan subset A tidak kosong, maka jumlah dari H - conjugate yang berbeda dari A adalah merupakan index dari $N_H(A)$ di dalam H dituliskan sebagai $[H : N_H(A)]$ (lihat def. 11).

Bukti :

Diketahui $A \subset G$ dimana $A \neq \emptyset$

H subgroup dari G.

Akan dibuktikan bahwa jumlah dari H - conjugate yang berbeda dari A adalah merupakan $[H : N_H (A)]$.

Karena $[H : N_H(A)]$ adalah jumlah dari koset-koset kanan yang berbeda dari $N_H(A)$ di dalam H, (dari def.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

11). Maka hanya diperlukan definisi fungsi satu - satu α, dari koset-koset kanan yang berbeda dari $N_H(A)$ dalam H ke H-conjugate yang berbeda dari A.

Ambil α didefinisikan sebagai :

$$\alpha = N_H(A)\ h \longmapsto h^{-1}\ A\ h,\ h \in H.$$

Akan ditunjukkan bahwa α adalah fungsi satu-satu, yaitu dengan membuktikan :

$$N_H(A)\ h_1 = N_H(A)\ h_2 \Longleftrightarrow h_1^{-1}\ A\ h_1 = h_2^{-1} A\ h_2,$$

untuk $h_1,\ h_2 \in H$.

(i) ($\Longrightarrow$) artinya harus dibuktikan :

$$N_H(A)\ h_1 = N_H(A)\ h_2 \Longrightarrow h_1^{-1}\ A\ h_1 = h_2^{-1}\ A\ h_2$$

untuk $h_1,\ h_2 \in H$.

$N_H(A)\ h_1 = N_H(A)\ h_2 \Longrightarrow h_1 \in N_H(A)\ h_2$ (dari th 11 bagian 3).

karena $N_H(A) \subseteq G$ (th 25), menurut def. 3.

$\Longrightarrow h_1 = n\ h_2$ untuk $n \in N_H(A)$.

$\Longrightarrow h_1^{-1}\ A\ h_1 = (nh_2)^{-1} A\ nh_2$

$= h_2^{-1}\ n^{-1}\ A\ n\ h_2$ (dari th 4)

$= h_2^{-1}\ (n^{-1}\ A\ n)\ h_2$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$N_H(A)h_1 = N_H(A)\ h_2 \Longrightarrow h_1^{-1}\ A\ h_1 = h_2^{-1}\ A\ h_2.$$

(ii) ($\Longleftarrow$) artinya harus dibuktikan :

$$h_1^{-1}\ A\ h_1 = h_2^{-1}\ A\ h_2 \Longrightarrow N_H(A)\ h_1 = N_H(A)\ h_2$$

untuk $h_1, h_2 \in H$.

$$h_1^{-1}\ A\ h_1 = h_2^{-1}\ A\ h_2 \Longrightarrow h_1 h_1^{-1}\ A\ h_1\ h_1^{-1}$$

$$= h_1\ h_2^{-1}\ A\ h_2\ h_1^{-1}$$

$$\Longrightarrow A = (h_2\ h_1^{-1})^{-1}\ A\ (h_2\ h_1^{-1})$$

(dari th 4).

$$\Longrightarrow h_2\ h_1^{-1} \in N_H(A)$$ (dari def. 32).

$$\Longrightarrow h_2 \in N_H(A)\ h_1$$

$$h_1^{-1}\ A\ h_1 = h_2^{-1}\ A\ h_2 \Longrightarrow N_H(A)\ h_1 = N_H(A)\ h_2$$

(dari th 11 bagian 3)

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa :

$$N_H(A)\ h_1 = N_H(A)\ h_2 \Longleftrightarrow h_1^{-1}\ A\ h_1 = h_2^{-1}\ A\ h_2$$

untuk $h_1, h_2 \in H$.

Jelas bahwa α adalah fungsi satu-satu.

Dengan demikian terbukti bahwa jumlah H-conjugate yang berbeda dari A merupakan indeks dari N_H (A) di dalam H.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 21 : Jika diketahui $G = S_3$ (group simetri dari tiga elemen), $A = \{r_1\}$ dan $H = \{e, r_2\}$ hitunglah bahwa jumlah H-conjugate yang berbeda dari A di dalam H sama dengan indeks $N_H(A)$ di dalam H.

Penjelasan :

Diketahui $G = S_3$

Dari contoh 17, S_3 beranggotakan :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Menurut definisi 26 bisa diperoleh :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ maka } e^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ maka } r_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

H - conjugate dari A adalah $h^{-1} A h$. untuk $h \in H$ (dari def. 33).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

(i) $e^{-1}\{r_1\}e = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$e^{-1}\{r_1\}e = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

$$e^{-1}\{r_1\}e = \{r_1\}$$

(ii) $r_2^{-1}\{r_1\}r_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$r_2^{-1}\{r_1\}r_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$r_2^{-1}\{r_1\}r_2 = \{r_3\}$$

Jumlah H-conjugate yang berbeda dari A = $\{\{r_1\},\{r_3\}\} = 2$

Sekarang selidiki apakah $[H : N_H(A)] = 2$?

Karena $[H : N_H(A)]$ sama dengan jumlah koset-koset kanan yang berbeda dari $N_H(A)$ di dalam H, maka yang perlu diselidiki adalah :

Apakah jumlah koset-koset kanan yang berbeda dari $N_H(A)$ di dalam H sama dengan 2 ?

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$N_H(A) = \{ x \mid x \in H \text{ dan } x^{-1} Ax = A \}$ (dari def.32)

$N_H(A) = \{ e \}$

Jumlah koset-koset kanan dari $N_H(A)$ di dalam H ada lah :

(i) $\{e\}\ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\{e\}\ e = \{e\}$

(ii) $\{e\}\ r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\{e\}\ r_2 = \{r_2\}$

Jumlah koset-koset kanan yang berbeda dari $N_H(A)$ di dalam $H = \{\{e\}, \{r_2\}\} = 2$.

Jadi benar bahwa jumlah H-conjugate yang ber beda dari A di dalam H sama dengan indeks $N_H(A)$ di dalam H.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 22 : Misal G sebagai group siklik dari order 6
Yaitu $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$
ambil A, B, C, merupakan subset-subset dari G.
Misalkan $A = \{e, a\}$, $B = \{a^2, a^3, a^5\}$, $C = \{a\}$ maka himpunan yang anggotanya subset-subset G adalah himpunan yang mempunyai anggota A, B dan atau C.
Sebagai contoh $\mathcal{A} = \{A, B\}$, $\mathcal{B} = \{A, B, C\}$

Teorema 27 :

Misal $\mathcal{A}$ adalah himpunan dari subset-subset G dan ditentukan $A, B \in \mathcal{A}$ dan H subgroup dari G, jika $A \sim B$ menyatakan B adalah H-Conjugate dari A (yaitu jika ada elemen $h \in H$ maka $h^{-1} A h = B$) berlaku bahwa $\sim$ adalah relasi equivalensi pada $\mathcal{A}$.

Bukti :

Diketahui $\mathcal{A} = \{A, B\}$
$A \sim B$ menyatakan B adalah H -conjugate dari A.
H subgroup dari G.

Akan dibuktikan bahwa $\sim$ adalah relasi equivalensi pada $\mathcal{A}$. menurut def. 19 ,
Harus dibuktikan bahwa $\sim$ memiliki sekaligus tiga sifat yaitu sifat refleksif, symetris dan transitif.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

(i) $\backsim$ reflektif bhb $(\forall A \in \mathcal{A})$. $A \backsim A$ (dari def.16)

Karena H subgroup dari G, maka H memuat elemen iden titas.

Sehingga berlaku $e \in H$ maka $e^{-1} A e = A$ dengan demikian $A \backsim A$.

Jadi sifat refleksif terpenuhi.

(ii) $\backsim$ symetris bhb $(\forall A, B \in \mathcal{A})$. $A \backsim B \Longrightarrow B \backsim A$. (dari def. 17).

Jika $A \backsim B$ maka ada suatu elemen $h \in H$ sedemikian sehingga $h^{-1} A h = B$.

$$h^{-1} A h = B \Longrightarrow (h^{-1})^{-1} (h^{-1}) A (h)(h^{-1}) = (h^{-1})^{-1} B (h^{-1}).$$

$$\Longrightarrow A = (h^{-1})^{-1} B (h^{-1})$$

$$h^{-1} A h = B \Longrightarrow (h^{-1})^{-1} B (h^{-1}) = A$$

Karena $h^{-1} \in H$, sesuai def. 35 maka $B \backsim A$

Jadi $A \backsim B \Longrightarrow B \backsim A$.

Sifat symetris terpenuhi.

(iii) $\backsim$ transitif bhb $(\forall A, B, C \in \mathcal{A})$. $A \backsim B$ & $B \backsim C \Longrightarrow A \backsim C$. (dari def. 18).

Jika $A \backsim B$ dan $B \backsim C$ maka ada $h, g \in H$ sedemikian sehingga $h^{-1} A h = B$ dan $g^{-1} Bg = C$.

Karena H subgroup, maka $hg \in H$.

Sehingga berlaku :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$(hg)^{-1} A (hg) = (g^{-1} h^{-1}) A (hg)$$
$$= g^{-1} (h^{-1} A h) g.$$
$$= g^{-1} B g.$$

$(hg)^{-1} A (hg) = C$. karena $hg \in H$, sesuai def. 33

maka $A \backsim C$.

$h^{-1} A h = B$ dan $g^{-1} Bg = C \Longrightarrow (hg)^{-1} A (hg) = C$.

$A \backsim B$ dan $B \backsim C \Longrightarrow A \backsim C$.

Sifat transitif terpenuhi.

Dari (i), (ii), dan (iii) maka terbuktilah bahwa $\backsim$ merupakan relasi equivalensi pada $\mathcal{A}$.

Definisi 34 :

Jika $A \in \mathcal{A}$ maka $A \backsim = \{ X | X \in \mathcal{A}$ dan $X \backsim A \}$ atau $A \backsim = \{ X | X = h^{-1} A h$ untuk $h \in H \}$

$A \backsim$ adalah kelas equivalensi yang memuat A.

Kelas equivalensi yang berbeda adalah saling asing, dan gabungannya adalah $\mathcal{A}$ (sesuai teorema 22).

Himpunan wakil-wakil dari kelas-kelas equivalensi dinotasikan sebagai himpunan $\mathcal{R}$.

Selanjutnya juga berlaku $\mathcal{A}$ adalah gabungan dari himpunan-himpunan $R \backsim$ yang saling asing dimana $R \in \mathcal{R}$

$R \backsim = \{x | x = h^{-1} R h.$ untuk $h \in H\}$

Dari sini :

$$|\mathcal{A}| = \sum_{R \in \mathcal{R}} |R \backsim|$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Teorema 28 :

Ambil A, B adalah subset-subset dari G, dan B adalah H - conjugate dari A dimana H subgroup dari G. Buktikan bahwa $[H : N_H(A)] = [H : N_H(B)]$

Penyelesaian :

Diketahui = A, B subset-subset dari G

B adalah H - Conjugate dari A berarti

$B = h^{-1} A h$ untuk $h \in H$.

H subgroup dari G.

Akan dibuktikan $[H : N_H(A)] = [H : N_H(B)]$

Ambil $\mathcal{A} = \{X \mid X = g^{-1} A g$ atau $X = g^{-1} Bg$ untuk $g \in G\}$

$A \sim = \{X \mid X = h^{-1} A h$ untuk $h \in H\}$...... (dari def. 34) maka berlakulah :

$A \sim = \{X \mid X = g^{-1} Ag$ untuk $g \in G\}$

$B \sim = \{X \mid X = g^{-1} Bg$ untuk $g \in G\}$

Karena B adalah H - Conjugate dari A maka

$B \sim = \{X \mid X = g^{-1} (h^{-1} A h) g$ untuk $hg \in G\}$

$B \sim = \{X \mid X = g^{-1} h^{-1} A hg$ untuk $hg \in G\}$

$B \sim = \{X \mid X = (hg)^{-1} A hg$ untuk $hg \in G\}$

Jadi $A \sim = B \sim$

Akibatnya $|A \sim| = |B \sim|$ yaitu jumlah H-Conjugate dari A sama dengan jumlah H-Conjugate dari B. maka dengan teorema 26 diperoleh :

$[H : N_H(A)] = [H : N_H(B)]$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Teorema 29 :

Misal $\mathcal{A}$ ($\neq \emptyset$) adalah himpunan dari subset - subset G. Untuk setiap $A \in \mathcal{A}$ dan setiap $h \in H$ berlaku $h^{-1} Ah \in \mathcal{A}$

Ambil $\sim$ dinotasikan sebagai relasi equivalensi, ditentukan bahwa $A \sim B$. Jika B adalah H-Conjugate dari A.

Ambil $\mathcal{R}$ adalah himpunan wakil-wakil dari kelas-kelas equivalensi, maka :

$$|\mathcal{A}| = \sum_{R \in \mathcal{R}} [H : N_H(R)]$$

Bukti :

Dari definisi 34 dinyatakan bahwa $|\mathcal{A}| = \sum_{R \in \mathcal{R}} |R\sim|$...(i)

Karena $R\sim = \{X | X = h^{-1} Rh \text{ untuk } h \in H\}$ dan diketahui bahwa $h^{-1} Rh \in \mathcal{A}$. Untuk setiap $h \in H$. maka $R\sim$ adalah himpunan H-Conjugate dari R dan $|R\sim|$ merupakan jumlah H - Conjugate dari R.

Dari teorema 26, dinyatakan bahwa jumlah H - Conjugate dari R adalah $[H : N_H(R)]$ ....(ii)

dan (i) dan (ii) di dapat persamaan :

$$|\mathcal{A}| = \sum_{R \in \mathcal{R}} [H : N_H(R)] \quad \text{terbukti.}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Teorema 30 :

Misal P ($\neq \emptyset$) adalah subset dari G, misalkan
$\mathcal{A} = \{g^{-1}Pg \mid g \in G\}$
Ambil R adalah himpunan wakil-wakil dari kelas kelas equivalensi, H subgroup dari G, dan $\sim$ dinotasikan sebagai relasi equivalensi.
maka didapatkan :

$$|\mathcal{A}| = \sum_{R \in \mathcal{R}} [H : N_H(R)] = [G : N_G(P)]$$

Bukti :

Jika P ($\neq \emptyset$) subset dari G, dan
jika $\mathcal{A} = \{g^{-1}Pg \mid g \in G\}$
berarti $\mathcal{A}$ adalah himpunan G - conjugate dari P
(dari definisi 33).
Sehingga $|\mathcal{A}|$ merupakan jumlah dari G-Conjugate dari P.
Jumlah G - Conjugate dari P merupakan $[G : N_G(P)]$....(i)
(dari teorema 26).

$$|\mathcal{A}| = \sum_{R \in \mathcal{R}} [H : N_H(R)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

(dari teorema 29).
Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa :

$$|\mathcal{A}| = \sum_{R \in \mathcal{R}} [H : N_H(R)] = [G : N_G(P)]$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Teorema 31 :

Misal $\mathcal{A} = \{A \mid A$ adalah subset dari G dan A mempunyai tepat satu elemen $\}$.

Ambil $\sim$ sebagai relasi equivalensi pada $\mathcal{A}$ dengan H = G, dan ambil $\mathcal{R}$ sebagai himpunan wakil-wakil dari kelas-kelas equivalensi.

Ambil $\mathcal{R}^* = \{R \mid R \cap Z(G) = \emptyset,\ R \in \mathcal{R}\}$ dan $\mathcal{R}' = \{R \mid R \cap Z(G) \neq \emptyset,\ R \in \mathcal{R}\}$, $\mathcal{R}^* \cup \mathcal{R}' = \mathcal{R}$

Sehingga berlaku $|G| = |Z(G)| + \sum_{R \in \mathcal{R}^*} [G : N_G(R)]$

Bukti :

Diketahui :

$\mathcal{A} = \{A \mid A$ adalah subset dari G dan A mempunyai tepat satu elemen $\}$

$\sim$ = Relasi equivalensi pada $\mathcal{A}$

H = G

$\mathcal{R}$ = Himpunan wakil-wakil dari klas-klas equivalensi

$\mathcal{R}^* = \{R \mid R \cap Z(G) = \emptyset,\ R \in \mathcal{R}\}$

$\mathcal{R}' = \{R \mid R \cap Z(G) \neq \emptyset,\ R \in \mathcal{R}\}$

$Z(G) = \{x \mid xg = gx$ untuk $x \in G$ dan $\forall\, g \in G\}$ ...... def.20.

$|\mathcal{A}| = \sum_{R \in \mathcal{R}} [H : N_H(R)]$ ....1......... th 29.

Akan dibuktikan $|G| = |Z(G)| + \sum_{R \in \mathcal{R}^*} [G : N_G(R)]$

Karena $\mathcal{A}$ adalah himpunan dari subset G yang mempunyai satu elemen maka jelas bahwa :

$$|\mathcal{A}| = |G|$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dari sini

$$|G| = |\mathcal{A}| = \sum_{R \in \mathcal{R}} [H : N_H(R)] \qquad \text{(dari th. 29)}$$

Karena H = G maka :

$$|G| = \sum_{R \in \mathcal{R}} [G : N_G(R)] = \sum_{R \in \mathcal{R}'} [G : N_G(R)] + \sum_{R \in \mathcal{R}^*} [G : N_G(R)] \ldots\ldots(i)$$

Jika $z \in Z(G)$ dan menurut teorema 23 $Z(G)$ merupakan subgroup dari G, maka $\{z\} \in \mathcal{A}$ dan jumlah dari G-Conjugate dari $\{z\}$ adalah hanya satu, yaitu $\{z\}$ sendiri, sebab $z \in Z(G)$ maka berlaku :

$$Z(G) = \{z \mid zg = gz, \forall g \in G\}$$
$$= \{z \mid g^{-1}zg = g^{-1}gz, \forall g \in G\}$$
$$Z(G) = \{z \mid g^{-1}zg = z, \forall g \in G\}$$

Akibatnya $\{z\} \in \mathcal{R}$ untuk setiap $z \in Z(G)$.

Jika $z \in Z(G)$ maka berlaku :

$$Z(G) = \{z \mid zg = gz, \forall g \in G \text{ dan } z \in G\}$$

$$N_G(\{z\}) = \{g \mid g^{-1}\{z\}g = \{z\}, g \in G\}$$
$$= \{g \mid gg^{-1}\{z\}g = g\{z\}, g \in G\}$$
$$N_G(\{z\}) = \{g \mid \{z\}g = g\{z\}, g \in G\}$$

Karena $z \in Z(G)$ maka $N_G(\{z\})$ dipenuhi oleh setiap $g \in G$.

Jadi $N_G(\{z\}) = G$

Dari sini jumlah dari semua $R \in \mathcal{R}$ dengan $R \cap Z(G) \neq \emptyset$

Yang bisa dituliskan $\sum_{R \in \mathcal{R}'} [G : N_G(R)] = |Z(G)|$

Sehingga persamaan (i) bisa berbentuk :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{R \in \mathcal{R}^*} [G : N_G(R)]$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Akibat Teorema 31 :

Jika $R = \{ r \}$ maka :

$N_G(R) = \{ g | g \in G \text{ dan } g^{-1} rg = r \text{ , } r \in R \}$ def.32

$C(R) = \{ g | g \in G \text{ dan } rg = gr, \forall r \in R \}$ def.21

$= \{ g | g \in G \text{ dan } g^{-1} rg = g^{-1} gr, \forall r \in R \}$

$C(R) = \{ g | g \in G \text{ dan } g^{-1} rg = r \text{ , } \forall r \in R \}$

Karena $R = \{ r \}$

maka $N_G(R) = C(R)$

Sehingga teorema 31 bisa berbentuk.

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{R \in \mathcal{R}^*} [G : C(R)]$$

Persamaan ini disebut persamaan klas dari G.

Contoh 23 :

Jika diketahui $G = S_3$, buktikan bahwa :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{R \in \mathcal{R}^*} [G : N_G(R)]$$

Penyelesaian :

Diketahui $G = S_3$

Dari contoh 17, S_3 beranggotakan :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$G = S_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, r_1, r_2, r_3\}$

Pada contoh 17 diperoleh tabel multiplikasi sebagai berikut :

TABEL 1

*	e	σ_1	σ_2	r_1	r_2	r_3
e	e	σ_1	σ_2	r_1	r_2	r_3
σ_1	σ_1	σ_2	e	r_3	r_1	r_2
σ_2	σ_2	e	σ_1	r_2	r_3	r_1
r_1	r_1	r_2	r_3	e	σ_1	σ_2
r_2	r_2	r_3	r_1	σ_2	e	σ_1
r_3	r_3	r_1	r_2	σ_1	σ_2	e

Akan dibuktikan bahwa teorema 31 berlaku di sini.

Yaitu $|G| = |Z(G)| + \sum_{R \in \mathcal{R}^*} [G : N_G(R)]$

karena $|S_3| = 6$ maka harus dibuktikan $|Z(G)| + \sum_{R \in \mathcal{R}^*} [G : N_G(R)] = 6$

$\mathcal{A} = \{A \mid A$ adalah subset dari G dan A mempunyai tepat satu elemen $\}$ .... dari th. 31.

$\mathcal{A} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ dimana

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$P_1 = \{e\}$, $P_2 = \{\sigma_1\}$, $P_3 = \{\sigma_2\}$, $P_4 = \{r_1\}$, $P_5 = \{r_2\}$,
$P_6 = \{r_3\}$.

$A \backsim = \{ x | x = h^{-1} A\, h$ untuk $h \in H \}$ .... dari def. 34.

maka :

$P_1 \backsim = \{ x | x = g^{-1} P\, g$ untuk $g \in G \}$.

Kelas equivalensi yang berbeda adalah saling asing, dan gabungannya adalah $\mathcal{A}$ (dari teorema 22).

$P_1 = \{e\}$

$P_1 \backsim = \{ X | X = g^{-1} \{e\} g,\ g \in G \}$

$G = \{ e, \sigma_1, \sigma_2, r_1, r_2, r_3 \}$

$P_1 \backsim = \{ X | X = \{e\},\ \forall g \in G \}$

$P_1 \backsim = \{\{e\}\} = \{P_1\}$

$P_2 \backsim = \{ X | X = g^{-1} \{\sigma_1\} g,\ g \in G \}$

dengan melihat tabel 1 diperoleh :

$e^{-1} = e$, $\sigma_1^{-1} = \sigma_2$, $\sigma_2^{-1} = \sigma_1$, $r_1^{-1} = r_1$, $r_2^{-1} = r_2$

$r_3^{-1} = r_3$

Untuk :

$g = e$ maka $e^{-1} \{\sigma_1\}\, e = e \{\sigma_1\}\, e = \{\sigma_1\}$

$g = \sigma_1$ maka $\sigma_1^{-1} \{\sigma_1\} \sigma_1 = \sigma_2 \{\sigma_1\}\, \sigma_1 = \{e\}\, \sigma_1 = \{\sigma_1\}$

$g = \sigma_2$ maka $\sigma_2^{-1} \{\sigma_1\} \sigma_2 = \sigma_1 \{\sigma_1\} \sigma_2 = \{\sigma_2\}\, \sigma_2 = \{\sigma_1\}$

$g = r_1$ maka $r_1^{-1} \{\sigma_1\}\, r_1 = r_1 \{\sigma_1\}\, r_1 = \{r_2\}\, r_1 = \{\sigma_2\}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$g = r_2$ maka $r_2^{-1} \{\sigma_1\} r_2 = r_2 \{\sigma_1\} r_2 = \{r_3\} r_2 = \{\sigma_2\}$

$g = r_3$ maka $r_3^{-1} \{\sigma_1\} r_3 = r_3 \{\sigma_1\} r_3 = \{r_1\} r_3 = \{\sigma_2\}$

$P_2 \backsim = \{\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}\} = \{P_2, P_3\}$

Dengan jalan yang sama $P_3 \backsim = \{P_2, P_3\}$

Sehingga diambil salah satu saja, dalam hal ini diambil

$P_2 \backsim$

$P_4 \backsim = \{X | X = g^{-1} \{r_1\} g, g \in G\}$

untuk $g = e$ maka $e^{-1} \{r_1\} e = e \{r_1\} e = \{r_1\}$

$g = \sigma_1$ maka $\sigma_1^{-1} \{r_1\} \sigma_1 = \sigma_2 \{r_1\} \sigma_1 = \{r_2\} \sigma_1 = \{r_3\}$

$g = \sigma_2$ maka $\sigma_2^{-1} \{r_1\} \sigma_2 = \sigma_1 \{r_1\} \sigma_2 = \{r_3\} \sigma_2 = \{r_2\}$

$g = r_1$ maka $r_1^{-1} \{r_1\} r_1 = r_1 \{r_1\} r_1 = \{e\} r_1 = \{r_1\}$

$g = r_2$ maka $r_2^{-1} \{r_1\} r_2 = r_2 \{r_1\} r_2 = \{\sigma_2\} r_2 = \{r_3\}$

$g = r_3$ maka $r_3^{-1} \{r_1\} r_3 = r_3 \{r_1\} r_3 = \{\sigma_1\} r_3 = \{r_2\}$

$P_4 \backsim = \{\{r_1\}, \{r_2\}, \{r_3\}\}$

$P_4 \backsim = \{P_4, P_5, P_6\}$

analog $P_5 \backsim = P_4 \backsim$

$P_6 \backsim = P_4 \backsim$

Sehingga diambil salah satu saja yaitu $P_4 \backsim$

$\mathcal{R}$ = Himpunan wakil-wakil dari kelas-kelas equivalensi

misal diambil :

$\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_4\}$

$Z(G) = \{z | z \in G$ dan untuk semua $g \in G, gz = zg\}$

dengan melihat tabel 1, maka yang memenuhi hanya $z = e$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Sehingga $Z(G) = \{\{e\}\} = \{P_1\}$

$\mathcal{K}^* = \{R \mid R \cap Z(G) = \emptyset \, , R \in \mathcal{K}\}$

$\mathcal{K}^* = \{P_2, P_4\}$

$[G : N_G(P_2)]$ = jumlah G-Conjugate yang berbeda dari P di dalam G, yaitu jumlah $g^{-1}\{\sigma_1\}g$ yang berbeda, dengan melihat langkah pada $P_2 \sim$, maka diperoleh :

$[G : N_G(P_2)] = 2.$

$[G : N_G(P_4)]$ = jumlah dari $g^{-1}\{r_1\}g$ yang berbeda.

Dengan melihat langkah pada $P_4 \sim$ maka diperoleh :

$[G : N_G(P_4)] = 3$

Sehingga $|G| = |Z(G)| + \sum_{R \in \mathcal{K}^*} [G : N_G(R)]$

$= |Z(G)| + [G : N_G(P_2)] + [G : N_G(P_4)]$

$|G| = 1 + 2 + 3$

$|G| = 6 = |S_3|$

Sehingga terbukti $|G| = |Z(G)| + \sum_{R \in \mathcal{K}^*} [G : N_G(R)]$

Contoh 24 :

Jika H himpunan bagian dari group G dan $g \in G$ maka $|g^{-1}Hg| = |H|$ dengan $g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$

Penyelesaian :

Akan dibuktikan bahwa :

$\alpha : H \longmapsto g^{-1}Hg$ dengan $\alpha : h \longmapsto g^{-1}hg$, $h \in H$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

α adalah fungsi satu-satu.

Yaitu dengan membuktikan bahwa :

$h_1 = h_2$. bhb . $g^{-1} h_1 \; g = g^{-1}$ h2 g, dengan $h_1, h_2 \in H$.

dibuktikan dua langkah :

(i) $h_1 = h_2 \Longrightarrow g^{-1} h_1 g = g^{-1} h_2 g$

(ii) $g^{-1} h_1 g = g^{-1} h_2 g \Longrightarrow h_1 = h_2$

(i). Akan dibuktikan $h_1 = h_2 \Longrightarrow g^{-1} h_1 g = g^{-1} h_2 g$

Jika $h_1 = h_2$ maka dengan menggandakan sebelah kiri dengan g^{-1} dan kanan dengan g akan didapatkan : $g^{-1} h_1 g = g^{-1} h_2 g$

Jadi :

$$h_1 = h_2 \Longrightarrow g^{-1} h_1 g = g^{-1} h_2 g$$

(ii). Akan dibuktikan $g^{-1} h_1 g = g^{-1} h_2 g \Longrightarrow h_1 = h_2$

Jika $g^{-1} h_1 g = g^{-1} h_2 g$ maka dengan menggandakan sebelah kiri dengan g dan sebelah kanan dengan g^{-1} akan didapatkan $gg^{-1} h_1 \; gg^{-1} = gg^{-1} h_2 \; gg^{-1}$.

Maka $h_1 = h_2$

Jadi :

$$g^{-1} h_1 g = g^{-1} h_2 g \Longrightarrow h_1 = h_2 .$$

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan :

$g^{-1} h_1 g = g^{-1} h_2 g$. bhb. $h_1 = h_2$

dari sini $\alpha = h \longmapsto g^{-1} hg, \quad h \in H$

α terbukti fungsi satu-satu.

Sehingga $\left| g^{-1} H g \right| = \left| H \right|$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

TEOREMA 32 :

Jika G group abelian berhingga dan p bilangan prima yang membagi order G, maka G mempunyai suatu elemen berorder p.

Bukti :

Diketahui G = group abelian berhingga

p = bilangan prima yang membagi order G

Akan dibuktikan :

jika $p \mid |G|$ maka G mempunyai suatu elemen berorder p artinya

jika $g \in G$ maka $g^p = e$ (dari teorema 16)

jika G siklik maka ada subgroup dari order bilangan bulat sembarang yang membagi $|G|$ (menurut teorema 21)

Dengan demikian jika G siklik teorema terbukti.

Jika $|G| = n$, dengan n bilangan prima maka G siklik (menurut contoh 5).

Akan dibuktikan untuk n tidak prima

Dimisalkan teorema benar untuk group yang berorder $< n$ ...... (i)

Ambil $h\ (\neq e) \in G$, misalkan h berorder m dengan $m < n$ berarti $h^m = e$.

Ambil H adalah group siklik yang dibangun oleh h, dengan $|H| = m$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Maka H adalah subgroup sejati dari G, karena $H \neq \{e\}$ dan $H \neq G$.

jika $p \mid m$ maka menurut (i), H mempunyai suatu elemen berorder p.

Andaikan $p \nmid m$.

pandang bentuk group faktor G/H

(setiap subgroup dari group abelian adalah normal)

(dari contoh 1).

Sehingga H subgroup normal dari G, karena G abelian.

(syarat group G/H, H harus normal dalam G),

karena $|H| > 1$ maka $|G/H| < G$.

$\left|G/H\right| = \frac{|G|}{|H|}$ (menurut teorema 17)

$|G| = \frac{|G|}{|H|} \cdot |H|$

$|G| = \frac{|G|}{|H|} \cdot m$

Karena $p \mid |G|$ dan $p \nmid m$ maka $p \mid \frac{|G|}{|H|}$

dengan kata lain $p \mid |G/H|$

dan karena $|G/H| < n$ maka menurut (i), G/H mempunyai elemen $\bar{g}$ yang berorder p.

Ambil $V : G \longrightarrow G/H$ adalah homomorfisma dari suatu group ke group faktornya.

(dari teorema 13).

dan $\bar{g}$ adalah bayangan dari g pada V

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

Sekarang $V(g^p) = \bar{g}^p = e$

maka $\bar{g}^p$ adalah elemen identitas dari G/H

sehingga $g^p \in H$

Karena H berorder m, maka $(g^m)^p = (g^p)^m = e$

sehingga g^m berorder p atau $g^m = e$.

jika $g^m = e$ maka $V(g^m) = \bar{g}^m = e$

karena $\bar{g}$ berorder p, yaitu $\bar{g}^p = e$ maka

p membagi m, kontradiksi dengan pengandaian bahwa $p \nmid m$.

Oleh karena itu g^m adalah elemen dari H yang berorder p.

Karena H subgroup dari G dan $|H| < |G|$ maka g^m yang berorder p juga merupakan elemen dari G.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)