BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 MATRIKS

Definisi 4

Matriks ordo m x n adalah suatu kumpulan bilangan yang disusun dalam bentuk baris dan kolom dengan m banyaknya baris dan n banyaknya kolom. Matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Masing-masing bilangan a_{jk} dari matriks dinamakan elemen.

Contoh 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom saja disebut matriks baris (vektor baris) atau matriks kolom (vektor kolom).

Definisi 5

Dua matriks A = (a_{jk}) dan B = (b_{jk}) yang mempunyai ordo sama adalah sama jika hanya jika $a_{jk} = b_{jk}$.

Definisi 6

Jika $A = (a_{jk})$ dan λ adalah skalar sembarang, didefinisikan produk dari A dengan λ sebagai $\lambda A = (\lambda a_{jk})$.

Definisi 7

Jika $A = (a_{jk})$ adalah matriks berordo m x n dan $B = (b_{jk})$ adalah matriks berordo n x p, maka didefinisikan produk A.B atau AB dari matriks A dan B sebagai $C = (c_{jk})$,

dimana :

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk}$$

dan C adalah matriks dengan ordo m x p.

Catatan bahwa perkalian antar matriks didefinisikan jika hanya jika bilangan kolom A sama dengan bilangan baris B. Matriks yang demikian biasa disebut *comformable.*

Definisi 8

Jika baris matriks A ditukar dengan kolom matriks A, hasil pertukaran baris dengan kolom dinamakan transpose dari A, ditulis dengan A^T. Secara simbolik $A = (a_{jk})$, maka $A^T = (a_{kj})$.

Definisi 9

Suatu matriks yang semua elemennya sama dengan nol disebut *null* atau matriks nol dan dinotasikan dengan O .

Untuk matriks A sembarang yang berordo sama dengan O, maka

$$O + A = A + O = A.$$

Jika A dan O adalah matriks bujur sangkar, maka OA = AO = O.

Definisi 10

Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar ordo n. Maka B adalah invers dari A (ditulis dengan A^{-1}) dan A adalah invers dari B (ditulis B^{-1}) jika dan hanya jika AB = I dan BA = I, dimana I adalah matriks identitas.

2.2 VEKTOR PADA RUANG DIMENSI n (R^n)

Definisi 11

Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai besar dan ditentukan oleh arahnya.

Suatu vektor **x** di dalam ruang dimensi n (R^n) adalah vektor yang berkomponen bilangan-bilangan real sejumlah n elemen yang ditulis dengan $\mathbf{x} = [x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n]$.

Definisi 12

Dua vektor **x** dan **y** adalah sama jika hanya jika mempunyai besar dan arah yang sama.

Definisi 13

Ambil $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ dan $\alpha \in R$

Jumlahan $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ didefinisikan sebagai $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ dan multiplikasi (perkalian) dengan bilangan real α **x** didefinisikan dengan

$\alpha\ \mathbf{x} = (\alpha\ x_1,\ \alpha\ x_2, \ldots,\ \alpha\ x_n)$.

Definisi 14

Skalar produk **xy** dari dua vektor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ didefinisikan dengan

$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.

Definisi 15

Norma $\|x\|$ dari suatu vektor $x \in R^n$ didefinisikan dengan

$\|x\| = (xx)^{1/2} = [(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2]^{1/2}$

Teorema 1 (Pertidaksamaan Cauchy - Schwarz)

Jika $x, y \in R^n$, maka $|xy| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

di mana $|xy|$ adalah nilai mutlak dari bilangan real xy.

Bukti

$x, y \in R^n$, untuk sembarang $\alpha \in R$ berlaku :

$(\alpha x + y)(\alpha x + y) = xx(\alpha)^2 + 2xy\alpha + yy \geq 0$

Karena akar persamaan kuadrat dalam $xx(\alpha)^2 + 2xy\alpha + yy = 0$ tidak dapat ditemukan bilangan real yang berlainan, maka diskriminan dari pertidaksamaan kuadrat tersebut adalah:

$4(xy)^2 - 4(xx)(yy) \leq 0$

$(xy)^2 \leq (xx)(yy)$

dari definisi 15, maka:

$|xy| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Terbukti.

Definisi 16

Jika $x, y \in R^n$. Bilangan non negatif $\delta(x, y) = \|x - y\|$ disebut jarak antara titik x dan y dalam R^n.

2.3 KOMBINASI LINIER DAN KOMBINASI KONVEK DARI VEKTOR

Definisi 17

Pandang vektor-vektor $x^1, x^2, \dots, x^n \in R^n$ dan skalar $\alpha_i \in R$ untuk $1 \leq i \leq n$. Maka kombinasi linier dari vektor-vektor $x^1, x^2, \dots, x^n$ didefinisikan sebagai

$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$.

Ketergantungan nilai α_i menyebabkan perbedaan sifat dari kombinasi linier. Sebagai contoh suatu kombinasi linier strictly positif dari vektor-vekor di bentuk oleh $\alpha_i > 0$ untuk semua i, sedangkan kombinasi linier non negatif dari vektor-vektor diperoleh bila $\alpha_i \geqq 0$ untuk semua i.

Definisi 18

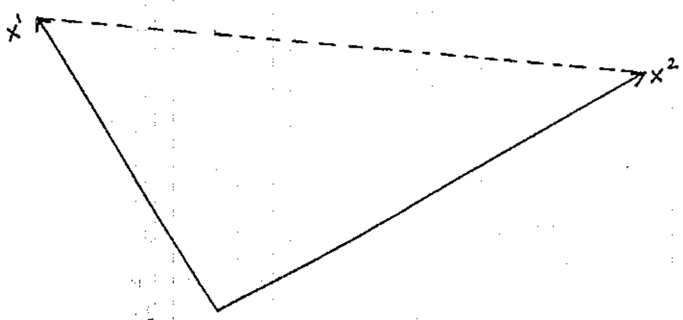
Kombinasi linier dari vektor-vektor $x^1, x^2, \ldots, x^n \in R^n$ dikatakan kombinasi konvek jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i \quad , \text{dimana } \lambda_i \geqq 0 \text{ dan } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Jika masing-masing dari $\lambda_i > 0$, (i = 1, 2, ..., n) ,maka kombinasi liniernya disebut kombinasi konvek strictly positif (strictly positive convex combination).

Contoh 3

Kombinasi konveks dari x^1 dan x^2 pada gambar 3 di bawah adalah garis hubung antara x^1 dan x^2



Gambar 3

Definisi 19

Suatu himpunan vektor $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$, dimana $x^i \in R^m$ untuk semua i, adalah independen linier jika dan hanya jika

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = \mathbf{0}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R,$$

maka $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Kebalikan dari definisi 19 dinamakan dependen linier.

Contoh 4

Pandang $x^1 = (1, 0, 0)$, $x^2 = (0, -1, 0)$ dan $x^3 = (0, 9, -1)$. Himpunan $\{x^1, x^2, x^3\}$ adalah independen linier.

Karena untuk $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \mathbf{0} \in R^3$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_n = 0$$

Contoh 5

Pandang $y^1 = (1, 2, 3)$ dan $y^2 = (0, 0, 0)$

Himpunan vektor $\{y^1, y^2\}$ adalah dependen linier, karena

$$\alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2 = \mathbf{0} \in R^3$$

$$\alpha_1 = 0 \text{ dan } \alpha_2 \neq 0.$$

Jadi, sembarang himpunan vektor yang memuat vektor nol adalah dependen linier.

Jika suatu himpunan vektor $\{x^1, x^2, \dots, x^n)$ bergantung linier, terdapat sekurang-kurangnya satu vektor yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari yang lain.

Teorema 2

Jika himpunan bagian dari n vektor bergantung linier, maka himpunan n vektor tersebut bergantung linier.

Bukti

Misalkan p vektor (p < n) $\{x^1, x^2, ..., x^p\}$ bergantung linier akan dibuktikan bahwa $\{x^1, x^2, x^3, ..., x^n\}$ bergantung linier. Karena $\{x^1, x^2, ..., x^p\}$ bergantung linier maka terdapat harga $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ yang tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i = 0$$

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_p x^p = 0 \text{ dan } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i = 0$$

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} + \alpha_n x^n = 0$$

dimana $\alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \dots = \alpha_n = 0$

Karena diketahui $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tidak semuanya sama dengan nol sedemikian sehingga.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i = 0$$

maka $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ bergantung linier.

Terbukti.

Teorema 3

Jika himpunan n vektor bebas linier, maka himpunan bagiannya bebas linier.

Bukti

Ambil $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ bebas linier. Andaikan himpunan bagiannya bergantung linier. Dari teorema 2, jika himpunan bagiannya bergantung linier, maka himpunan n vektor bergantung linier. Kontradiksi dengan $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ bebas linier. Pengandaian harus diingkar.

Jadi, himpunan n vektor bebas linier, maka himpunan bagiannya bebas linier.

Terbukti.

2.4 SIFAT-SIFAT HIMPUNAN PADA RUANG DIMENSI n (R^n)

Definisi 20

Himpunan titik-titik atau vektor-vektor adalah himpunan yang unsur-unsurnya (komponen-komponennya) titik atau vektor.

Definisi 21

a. Gabungan (Union) dari dua himpunan A dan B ditulis $A \cup B$ adalah himpunan G yang memuat semua unsur-unsur dari A dan B.

b. Jika ada m himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_m$ maka $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ adalah himpunan G yang memuat unsur-unsur dari A_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ dan ditulis

$$G = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \; .$$

Definisi 22

a. Irisan (Intersection) dari dua himpunan A dan B ditulis $A \cap B$ adalah himpunan H yang memuat unsur-unsur persekutuan dari A dan B.

b. Jika ada m himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_m$ maka $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$ adalah himpunan H yang memuat unsur-unsur dari A_i; $i = 1, 2, \ldots, m$. Dan ditulis

$$H = \bigcap_{i=1}^{m} A_i$$

Definisi 23

Dua himpunan A dan B dikatakan saling asing (*disjoint*) jika dan hanya jika $A \cap B = \varnothing$

2.4.1 Himpunan Terbuka dan Tertutup

Definisi 24

Titik $\bar{x}$ disebut titik interior dari $S \in R^n$ jika terdapat sekitar dari $\bar{x}$ yang merupakan himpunan bagian dari S.

Definisi 25

$S \in R^n$ disebut himpunan terbuka jika setiap anggotanya merupakan titik interior himpunan S.

Definisi 26

$S \in R^n$ disebut himpunan tertutup jika semua titik limitnya termuat dalam S.

2.4.2 Himpunan Konvek dan Titik Ekstrem

Definisi 27

Himpunan $S \subset R^n$ konvek jika dan hanya jika untuk setiap $x^1, x^2 \in S$ titik $(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2) \in S$ untuk semua $\lambda \in [0,1]$.

Himpunan konvek tidak lain adalah jika semua titik pada garis hubung antara dua titik dalam himpunan S juga anggota S. Akibatnya adalah bahwa himpunan konvek di dalamnya tidak ditemukan "hole" (lubang). Dan himpunan yang hanya terdiri dari satu elemen adalah konvek. Dengan demikian himpunan kosong (Ø) juga konvek.

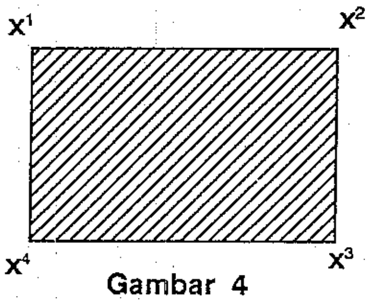
Definisi 28

Dalam $S \subset R^n$ titik $\bar{x} \in S$ dikatakan suatu titik ekstrem dari S jika dan hanya jika untuk $x^1, x^2 \in S$, $x^1 \neq x^2$ tidak terdapat $\bar{x}$ sedemikian sehingga

$$\bar{x} = (\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2) \text{ untuk } \lambda \in (0,1).$$

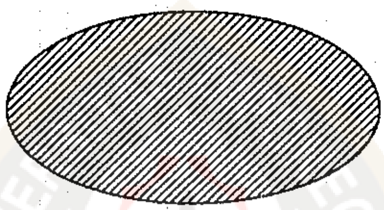
Dengan kata lain titik ekstrem adalah titik yang tidak bisa dinyatakan sebagai kombinasi konvek dari dua titik lain yang berbeda. Dari definisi tersebut, maka titik ekstrem bukanlah titik interior. Oleh karena itu semua titik ekstrem adalah titik limit.

Contoh 6



Gambar 4

Gambar 4 di atas adalah konvek dengan empat titik ekstrem.



Gambar 5

Gambar 5 adalah konvek dengan takberhingga titik ekstrem, (Titik ekstrem sepanjang busur).

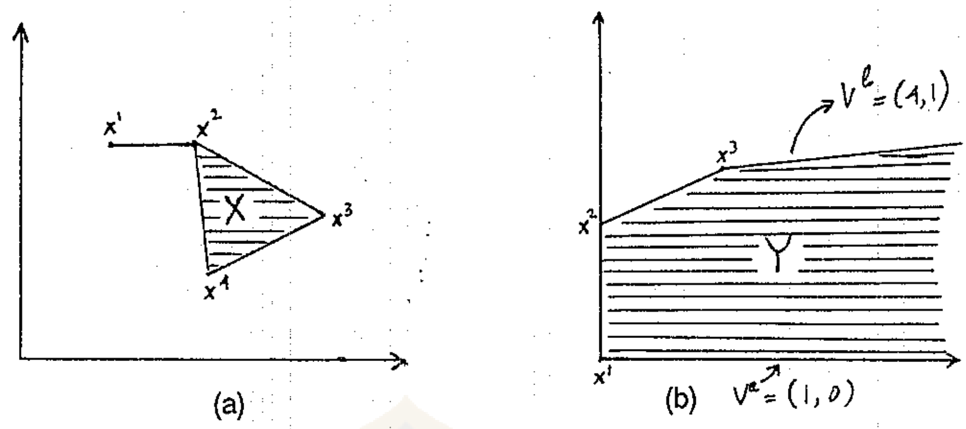
Pada uraian ini digunakan γ sebagai operator kombinasi konvek, yaitu kombinasi konvek dari $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^q$ dan ditulis sebagai : $\gamma\ (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^q)$ atau

$$\underset{i=1}{\overset{q}{\gamma}}\ (x^i).$$

Operator segmen garis terbatas μ digunakan dalam pengertian bahwa segmen garis tak terbatas dari $\mathbf{x} \in R^n$ dengan arah $\mathbf{v} \in R^n$ ditulis sebagai $\mu\ (\mathbf{x},\mathbf{v})$.

Catatan bahwa himpunan konvek adalah himpunan semua kombinasi konvek dari titik-titik ekstremnya dan titik-titik sepanjang tepi tak terbatas.

Contoh 7



Gambar 6

Pada gambar 6 (a) dan 6 (b) di atas himpunan non konvek X dan himpunan konvek tak terbartas Y diberikan oleh:

$$X = \gamma\ (x^1,x^2) \cup \overset{4}{\underset{i=2}{\gamma}}\ (x^i)\ \text{dan}$$

$$Y = \gamma\ (x^2,y,z).$$

dimana $\mathbf{y} \in \mu\ (x^1,v^a)$ dan $\mathbf{z} \in \mu\ (x^3,v^b)$.

Dengan himpunan konvek, titik-titik ekstrem yang dihubungkan oleh suatu tepi dikatakan *adjacent*. Pada gambar 6 (b) di atas lintasan adjacent titik-titik ekstrem dari x^1 sampai x^3 adalah $\{x^1, x^2, x^3\}$.

Lintasan tepi dari x^1 ke x^3 adalah $\gamma\ (x^1,x^2)$ dan $\gamma\ (x^2,x^3)$.

2.4.3 Bayangan dari Himpunan Konvek

Definisi 29

Jika $M \subset R^n$, konvek hull dari M adalah irisan dari semua himpunan konvek dalam M.

Dengan kata lain konvek hull dari $M \subset R^n$ adalah himpunan konvek terkecil yang berada dalam M.

Definisi 30

Himpunan *polyhedral* adalah konvek hull dari himpunan berhingga titik dan bilangan berhingga dari segmen garis yang tak terbatas.

Suatu polyhedral set dikatakan polyhedron jika merupakan konvek hull dari himpunan berhingga titik. Suatu himpunan polyhedral tidak perlu terbatas, tetapi polyhedron adalah terbatas.

Definisi 31

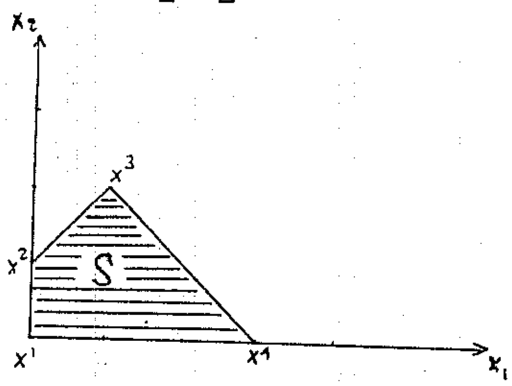
Dengan $S \subset R^n$ dan $f : S \rightarrow R^k$. Maka, jika S konvek dan f linier, daerah hasil f(s) yaitu bayangan S oleh f adalah konvek.

Jadi, jika S polydedral, bayangan S oleh f diberikan oleh semua kombinasi konvek dari bayangan dari titik-titik ekstrem dan titik-titik sepanjang tepi tak ·rbatas S.

Contoh 8

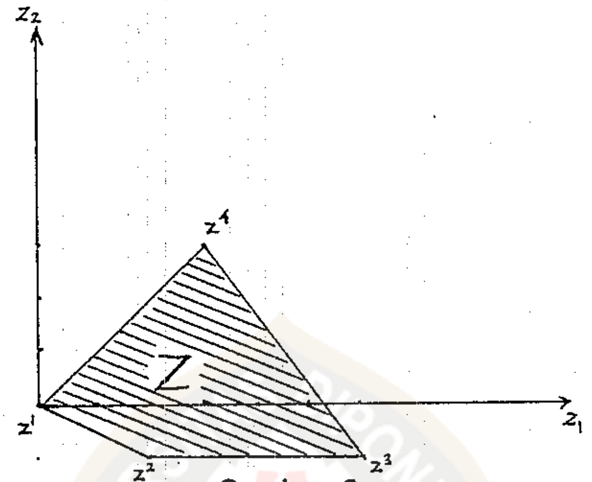
Jika $f : S \rightarrow R^2$ didefinisikan dengan $Cx = z$, dimana S adalah seperti pada gambar 7 (a) dan

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Gambar 7

Maka, dengan $Cx^i = z^i$, bayangan S oleh f (ditulis dengan Z) diberikan oleh γ (z^1, z^2, z^3, z^4) seperti pada gambar 8 di bawah.



Gambar 8

2.4.4 Hyperplane dan Ruang Bagian

Definisi 32

Hyperplane dalam R^n didefinisikan sebagai $\{ x \in R^n \mid C^T x = \bar{z} \}$ dengan $C \neq 0 \in R^n$ dan $\bar{z} \in R$.

Suatu hyperplane adalah tertutup dan konvek berdimensi $n - 1 \subset R^n$. Berkenaan dengan hyperplane yang didefinisikan oleh $C \neq 0 \in R^n$ dan $\bar{z} \in R$, himpunan-himpunan:

$\{x \in R^n \mid C^T x \leq \bar{z}\}$ tertutup dan

$\{x \in R^n \mid C^T x < \bar{z}\}$ ruang bagian terbuka.

Irisan dari $\{x \in R^n \mid C^T x \leq \bar{z}\}$ dan $\{x \in R^n \mid C^T x < \bar{z}\}$ menentukan hyperplane $\{x \in R^n \mid C^T x = \bar{z}\}$. Himpunan yang dibentuk oleh irisan bilangan berhingga dari ruang bagian tertutup merupakan polyhedral, dan mempunyai bilangan berhingga dari titik-titik limit dan tepi-tepi tek berbatas.

2.4.5 Himpunan Terhubung dan Himpunan Diskrit

Definisi 33

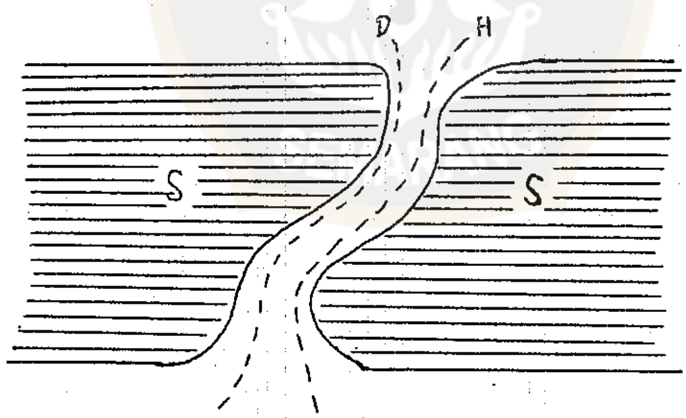
Misalkan $S \subset R^n$. S disebut terpisah (*disconnnected*) jika dan hanya jika terdapat dua himpunan terbuka D dan H sedemikian sehingga

1. $D \cap S$ dan $H \cap S$ himpunan yang saling asing dan tidak kosong
2. $S = (D \cap S) \cup (H \cap S)$.

Kebalikan dari definisi 33, S disebut terhubung. Jadi S terhubung jika tidak dapat disajikan sebagai gabungan dua himpunan yang terpisah dan tidak kosong. Berdasarkan definisi 33, himpunan kosong dipandang sebagai himpunan terhubung.

Contoh 9

Gambar 9 di bawah ini S tidak terhubung karena D dan H himpunan terbuka sedemikian sehingga syarat 1 dan 2 terpenuhi.



Gambar 9

Definisi 34

Himpunan diskret adalah himpunan di mana terdapat pemetaan satu-satu ke dalam himpunan itu dari semua bilangan bulat.

2. 5 TEOREMA UNTUK SISTEM LINIER

Lemma 1 (Lemma dari Tucker)

Untuk sembarang matriks A ordo p x n, sistem :

I. $Ax \geqq 0$, dan

II. $A^T\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{y} \geqq 0$

mempunyai penyelesaian **x** dan **y** yang memenuhi $A_1\mathbf{x} + y_1 > 0$

Bukti

Dengan menggunakan induksi lengkap, akan dibuktikan pada baris A.

Pangkal

Dibuktikan untuk p = 1.

Untuk p = 1, jika $A_1 = 0$, ambil $y_1 = 1$, $\mathbf{x} = 0$

Jika $A_1 \neq 0$, ambil $y_1 = 0$, $\mathbf{x} = A_1$.

Langkah

Andaikan Lemma benar untuk matriks A dengan jumlah baris p.

Akan dibuktikan bahwa Lemma benar untuk matriks $\bar{A}$ dengan jumlah baris p + 1.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ \\ A_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_p \\ A_{p+1} \end{bmatrix}$$

Dengan menerapkan Lemma pada matriks A, diperoleh **x, y** yang memenuhi :

$$A\mathbf{x} \geqq 0 \; ; \; A^T\mathbf{y} = 0 \; ; \; \mathbf{y} \geqq 0 \; ; \; A_1\mathbf{x} + y_1 > 0 \qquad \text{... (1)}$$

Jika $A_{p+1}\mathbf{x} \geqq 0$, diambil $\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{y},0)$. Maka

$$\bar{A}\mathbf{x} \geqq 0 \; ; \; \bar{A}^T\bar{\mathbf{y}} = 0 \; ; \; \bar{\mathbf{y}} \geqq 0 \; ; \; A_1\mathbf{x} + y_1 > 0 \qquad \text{... (2)}$$

yang merupakan perluasan lemma pada $\bar{A}$.

Jika $A_{p+1}x < 0$, lemma diterapkan pada matriks B, dengan :

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + \lambda_1 A_{p+1} \\ \vdots \\ A_p + \lambda_p A_{p+1} \end{bmatrix} \qquad \text{... (3)}$$

di mana :

$$\lambda_j = \frac{A_j x}{-A_{p+1}x} \geqq 0 \; ; \; j = 1, 2, \ldots, p \qquad \text{... (4)}$$

sehingga

$$B_j x = A_j x + \lambda_j A_{p+1} = 0 \text{, atau}$$

$$Bx = 0 \qquad \text{... (5)}$$

Hasil (5) digunakan untuk mencari **u**, **v** yang memenuhi

$$Bv \geqq 0 \,,\; B^T u = 0 \;,\; u \geqq 0 \;,\; B_1 v + u_1 > 0 \qquad \text{... (6)}$$

Ambil :

$\bar{u} = (u, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j)$. Berdasarkan (4) dan (6) maka

$$\bar{u} \geqq 0 \qquad \text{... (7)}$$

$$\bar{A}^T \bar{u} = A^T u + A^T_{p+1} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j = B^T u - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j A^T_{p+1} u_j + A^T_{p+1} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j = 0 \qquad \text{... (8)}$$

ambil $\mathbf{w} = v - \dfrac{A_{p+1}v}{A_{p+1}x} : x$ ... (9)

maka :

$$A_{p+1}\mathbf{w} = A_{p+1}v - A_{p+1}v = 0 \qquad \text{... (10)}$$

dan

$$\bar{A}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} A \\ A_{p+1} \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} Aw \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 w \\ \vdots \\ A_p w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_1 - \lambda_1 A_{p+1})\, \mathbf{w} \\ \vdots \\ (B_p - \lambda_p A_{p+1})\, \mathbf{w} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Bw \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Bv - \dfrac{A_{p+1}v}{A_{p+1}x} \cdot Bx \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Bv \\ \\ 0 \end{bmatrix} \geqq 0 \quad \ldots \quad (11)$$

Dari (3), (10), (9), (5) dan (6) diperoleh

$$A_1w + u_1 = (B_1 - \lambda_1 A_{p+1})w + u_1 = B_1w + u_1$$

$$= B_1v - \frac{A_{p+1}v}{A_{p+1}x} \cdot Bx + u_1$$

$$= B_1v + u_1 > 0. \qquad \ldots \quad (12)$$

Hubungan (8), (7), (11) dan (12) adalah perluasan ke A.

Jadi untuk p + 1 terbukti benar.

Maka, Lemma terbukti.

Teorema 4 (Teorema Eksistensi Pertama)

Untuk sembarang matriks A ordo $p \times n$, sistem

I. $Ax \geqq 0$, dan

II. $A^Ty = 0$, $y \geqq 0$ mempunyai penyelesaian x, y yang memenuhi

$Ax + y > 0$.

Bukti

Berdasarkan Lemma 1, terdapat $x^i \in R^n$, $y^i \in R^p$, i = 1, 2, ..., p sedemikian sehingga

$$Ax^i \geqq 0$$

$$A^Ty^i = 0,\ y^i \geqq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

$$A_ix^i + y_i^i > 0$$

Didefinisikan

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i \qquad ; \; y = \sum_{i=1}^{p} y_i$$

dari Lemma 1 diperoleh :

$$Ax = \sum_{i=1}^{p} Ax_i \geqq 0$$

$$A^T y = \sum_{i=1}^{p} A^T y_i = 0 \quad ; \; y = \sum_{i=1}^{p} y_i \geqq 0$$

Dan untuk i = 1, 2, ..., p :

$$A_i x + y^i = \underbrace{A_i x^i + y^i_i}_{> 0} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (\underbrace{A_i x^k + y^k_i}_{\geqq 0}) > 0$$

Atau $Ax + y > 0$.

Terbukti .

Teorema 5 (Teorema Eksistensi Kedua)

Ambil A dan B matriks ordo $p^1 \times n$ dan $p^2 \times n$ dengan A tidak kosong. Maka sistem :

I. $Ax \geqq 0$, $Bx = 0$ dan

II. $A^T y^1 + B^T y^2 = 0$, $y^1 \geqq 0$ mempunyai penyelesaian $x \in R^n$, $y^1 \in R^{p^1}$ dan $y^2 \in R^{p^2}$ yang memenuhi

$$Ax + y^1 > 0.$$

Bukti

Dengan menerapkan teorema 4 pada sistem :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ -B \end{bmatrix} x \geqq 0 \quad \text{dan}$$

$$[A^T, B^T, -B^T] \begin{bmatrix} y^1 \\ z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} = 0 \; ; \begin{bmatrix} y^1 \\ z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} \geqq 0$$

diperoleh x, y^1 , z^1, z^2 yang memenuhi

$$Ax + y^1 > 0$$

$$Bx + z^1 > 0$$

$$-Bx + z^2 > 0$$

Didefinisikan $y^2 = z^1 - z^2$, diperoleh x, y^1, y^2 yang memenuhi

I. $Ax \geqq 0$, $Bx = 0$

II. $A^T y^1 + B^T y^2 = 0$, $y^1 \geqq 0$ dan

$Ax + y^1 > 0$

Terbukti.

Akibat dari teorema 5 adalah :

Ambil A, B, C, dan D berturut-turut matriks sembarang dengan ordo $p^1 \times n$, $p^2 \times n$, $p^3 \times n$ dan $p^4 \times n$ dengan A, B, C tidak kosong.

Maka sistem :

I. $Ax \geqq 0$, $Bx \geqq 0$, $Cx \geqq 0$, $Dx = 0$ dan

II. $A^T y^1 + B^T y^2 + C^T y^3 + D^T y^4 = 0$; $y^1 \geqq 0$, $y^2 \geqq 0$, $y^3 \geqq 0$ mempunyai penyelesaian $x \in R^n$, $y^1 \in R^{p^1}$, $y^2 \in R^{p^2}$, $y^3 \in R^{p^3}$, $y^4 \in R^{p^4}$ yang memenuhi

$Ax + y^1 > 0$,

$Bx + y^2 > 0$, dan

$Cx + y^3 > 0$.

Bukti

Akibat dari teorema 5 merupakan perluasan dari teorema 5. Sehingga buktinya sejalan dengan bukti teorema 5 (Teorema Eksistensi Kedua).

2.6 KERUCUT (CONE)

Defenisi 35

Jika $v \in V \subset R^n$, $V \neq 0$. Maka V disebut kerucut (*cone*) jika dan hanya jika $\alpha \ v \in V$ untuk semua skalar $\alpha \geqq 0$.

Titik asal $\mathbf{0} \in R^n$ termuat dalam setiap kerucut. Berdasarkan kebalikan dari definisi 33 semua kerucut adalah himpunan terhubung. Selain untuk himpunan singleton yang mempunyai titik pangkal, semua kerucut adalah himpunan tak terbatas dan tidak perlu konvek.

2. 6. 1 Pembangkit (Generator)

Definisi 36

Pandang suatu himpunan k vektor $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k\}$ dan himpunan V, di mana

$V = \{\, \mathbf{v} \in R^n \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}^i \;;\; \alpha_i \geq 0 \,\}$

V terdiri dari semua kombinasi linier non negatif dari $\mathbf{v}^i$ dan kerucut konvek dibangun oleh himpunan $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k\}$. $\mathbf{v}^i$ dikatakan sebagai pembangkit (generator) V.

Kerucut yang himpunan pembangkitnya tunggal adalah $\{\, \mathbf{0} \in R^n \,\}$

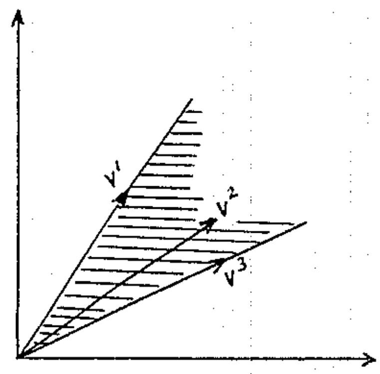
Definisi 37

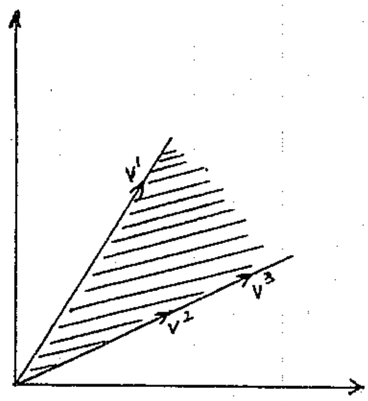
Jika $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k\}$ himpunan pembangkit dari kerucut konvek V dan $\mathbf{v}^r \in \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k\}$. Maka $\mathbf{v}^r$ disebut *non essensial generator* (pembangkit tak perlu) jika tanpa $\mathbf{v}^r$, $\mathbf{v}^i$ yang lain masih dapat membentuk V.

Suatu non esensial generator dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier non negatif dari pembangkit-pembangkit yang lain, sedangkan esensial generator tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier non negatif. Bilangan terkecil dari esensial generator yang membentuk suatu kerucut disebut bilangan minimal pembangkit untuk kerucut.

Contoh 10

Pada gambar 10 (a) , $\mathbf{v}^2$ adalah non esensial generator dari V, karena V dapat dibentuk oleh $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^3\}$ yang sama dengan yang dibentuk oleh $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$. Bilangan minimal dari pembangkit ini adalah 2.





Gambar 10

Pada gambar 10 (b) masing-masing v^2 dan $\mathbf{v}^3$ adalah non esensial generator tetapi tidak keduanya secara bersama-sama. Untuk membentuk kerucutnya cukup $\{v^1, v^2\}$ atau $\{v^1, v^3\}$ sebagai pembangkit minimal.

2.6.2 Dimensi Kerucut

Definisi 38

Dimensi dari kerucut $V \subset R^n$ didefinisikan sebagai banyaknya vektor-vektor yang bebas linier dalam V.

Contoh 11

- Dimensi dari kerucut singleton $\{\mathbf{0} \in R^n\}$ adalah 0.
- Dimensi dari kerucut konvek yang dibangun oleh himpunan dengan k vektor yang bebas linier adalah k.

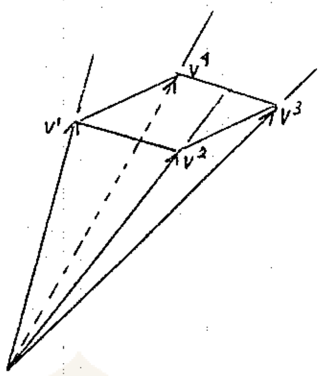
Definisi 39

Suatu kerucut yang mempunyai titik ekstrem (*verteks*) dinamakan kerucut berujung (*pointed cone*).

Kerucut seperti ruang bagian tertutup $\{\mathbf{x} \in R^n \mid C^T\mathbf{x} \leqq 0\}$, hyperplane dan R^n adalah cone tak berujung (*non pointed cone*), karena tidak mempunyai verteks.

Contoh 12

Gambar 11 terlihat bahwa dimensi kerucutnya adalah 3 dan bilangan minimal pembangunnya adalah 4.



Gambar 11

2.6.3 Sinar Ekstrem dan Kerucut Polyhedral

Definisi 40

Jika $V \in R^n$ kerucut konvek tertutup dan $\bar{v} \in V$. Maka himpunan

$$\{y \in R^n \mid y = \alpha\, \bar{v}, \alpha \geqq 0\}$$

disebut sinar ekstrem dari V jika dan hanya jika $\bar{v} \neq 0$ dan tidak terdapat dua vektor lain $v^1, v^2 \in V$, $v^1 \neq \beta\, v^2$ untuk semua skalar $\beta \neq 0$, sedemikian sehingga $\bar{v} = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2$, untuk skalar $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Definisi 41

Tepi satu dimensi dari kerucut polyhedral adalah sinar ekstrem dari kerucut tersebut.

Dari definisi 36, 37, 38, 39, 40, dan 41 kita dapatkan hubungan antara bilangan minimal dari generator, bilangan sinar ekstrem dan dimensi kerucut polyhedral :

1. Menurut definisi 37 dan 38, bilangan minimal dari generator kerucut tidak kurang dari dimensi kerucut tersebut.

2. Berdasarkan definisi 37, 39 dan 40, untuk kerucut konvek berujung (*pointed convex cone*) berdimensi satu atau lebih, bilangan minimal pembangkitnya sama dengan jumlah sinar ekstremnya.
3. Dari definisi 38 dan 39, untuk kerucut konvek tak berujung (*nonpointed convex cone*) $V \subset R^n$, $V \neq 0$, bilangan minimal pembangkitnya satu lebih besar dari pada dimensi kerucutnya.

Contoh dari hubungan di atas adalah :

Contoh 13

Suatu hyperplane yang melalui titik asal dalam R^n adalah kerucut dengan dimensi n - 1. Kerucut hyperplane ini adalah polyhedral karena dapat dibentuk dari irisan dua ruang bagian tertutup.

Bilangan minimla generatornya adalah n dan tidak punya titik ekstrem maupun sinar ekstrem.

2.6.4 Kerucut Kutub (Polar Cone)

Definisi 42

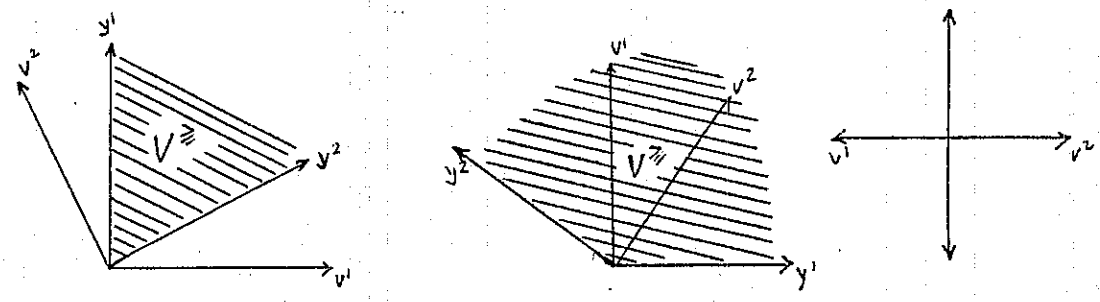
Jika $V \subset R^n$ adalah suatu kerucut, maka kutub non negatif dari V (ditulis dengan $V^{\geqq}$) adalah kerucut konvek

$$V^{\geqq} = \{\mathbf{y} \in R^n \mid \mathbf{y}^T\mathbf{v} \geqq 0 \text{ untuk semua } \mathbf{v} \in V\}.$$

Yaitu semua vektor dalam $V^{\geqq}$ yang membuat sudut 90^0 dengan masing-masing vektor dalam V. $V^{\geqq}$ konnvek tanpa memperhatikan V konvek atau tidak.

Contoh 14

Dalam gambar 12 (a), (b), dan (c) kerucut V dibangun oleh $\mathbf{v}^i$ dan kutub non negatif $V^{\geqq}$ dibangun oleh $\mathbf{y}^i$.

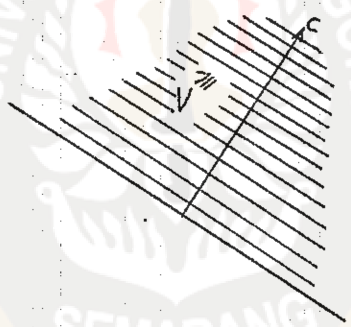


(a) (b) (c)

Gambar 12

Contoh 15

Pada gambar 13 kutub non negatif dibangun oleh **c** $\in R^n$ adalah ruang bagian tertutup $\{\mathbf{x} \in R^n \mid C^T\mathbf{x} \geqq 0\}$.



Gambar 13

Definisi 43

Pada kerucut konvek $V \subset R^n$ yang dibangun oleh $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k\}$. V memenuhi syarat vektor null jika terdapat suatu $\alpha \in R^k$, $\alpha_i > 0$ untuk semua i sedemikian sehingga

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}^i = \mathbf{0} \in R^n$$

Selain untuk kerucut singleton $\{\mathbf{0} \in R^n\}$, suatu kerucut yang memenuhi syarat null vektor adalah tak berujung (*non pointed*). Kutub non negatif dari kerucut V yang memenuhi syarat null vektor adalah subspace R^n yang tegak lurus dengan

V seperti digambarkan pada gambar 12 (c) di atas.

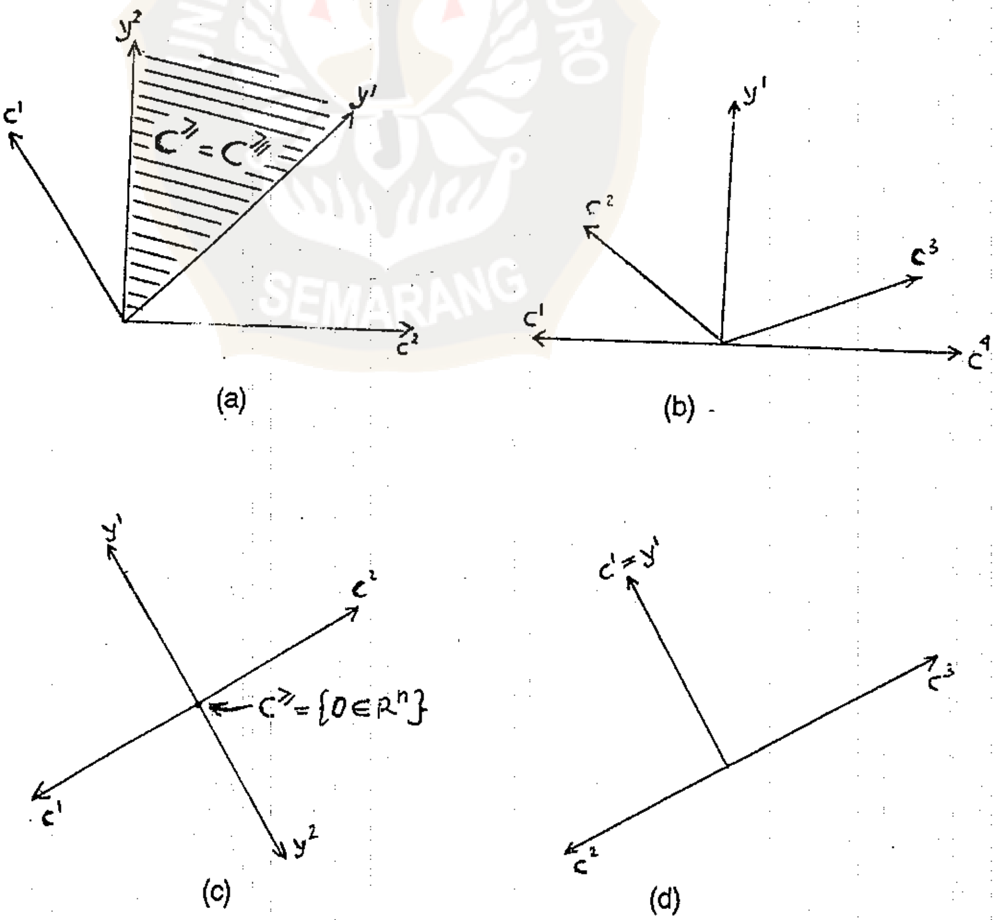
Definisi 44

Jika $V \subset R^n$ kerucut yang dibangun oleh $\{v^1, v^2, \ldots, v^k\}$. Maka kutub semi positif dari V (di tulis $V^{\geq}$) adalah kerucut konvek

$V^{\geq} = \{y \in R^n \mid y^T v^i \geq 0$, untuk semua i dan $y^T v^i > 0$, untuk sekurang-kurangnya satu i$\} \cup \{0 \in R^n\}$.

Catatan bahwa untuk suatu vektor $\mathbf{y}$ dalam $V^{\geq}$ harus mempunyai produk vektor positif dengan sekurang-kurangnya satu dari v^i.

Contoh 16



Gambar 14

Pada gambar 14 kerucut acuan C dibangun oleh c^i, dan kutub non negatif $C^{\geq}$ adalah kerucut yang dibangun oleh y^i.

Pada gambar 14 (a) $C^{\geqq} = C^{\geq}$, dan pada gambar 14 (b) $C^{\geqq}$ adalah sinar bagian yang dibangun oleh y^1 dengan $C^{\geqq} = C^{\geq}$. Untuk gambar 14 (c), $C^{\geqq}$ adalah garis yang dibentuk oleh y^1 dan y^2 dan $C^{\geq}$ adalah titik pangkal. Sedangkan pada gambar 14 (d) $C^{\geqq}$ adalah sinar bagian yang dibangun oleh y^1 dan $C^{\geq} = C^{\geqq}$.

2.7 FUNGSI UTILITAS

Definisi 45

Pandang X dan Y adalah dua himpunan. Suatu pemetaan Γ dari X ke dalam Y adalah suatu hubungan khusus, yaitu hubungan yang memasangkan (mengawankan) setiap anggota X dengan tepat satu anggota Y.

Definisi 46

Suatu fungsi θ disebut fungsi numerik jika θ merupakan fungsi suatu himpunan X ke dalam R (himpunan bilangan real).

Definisi 47

Suatu fungsi f disebut fungsi vektor dimensi m jika merupakan fungsi dari suatu himpunan X ke dalam R^m.

Definisi 48

Jika f suatu fungsi vektor dimensi m yang didefinisikan pada R^n, f dikatakan linier jika :

$$f(x) = Ax + b$$

di mana A suatu perubah matriks m x n, dan b suatu perubah vektor dalam R^m.

Jika $m = 1$, maka didapat fungsi linier θ pada R^n dan $\theta(x) = cx + \alpha$, di mana c adalah perubah vektor dalam R^n dan α adalah perubah bilangan real.

2.7.1 Bentuk Fungsi Utilitas

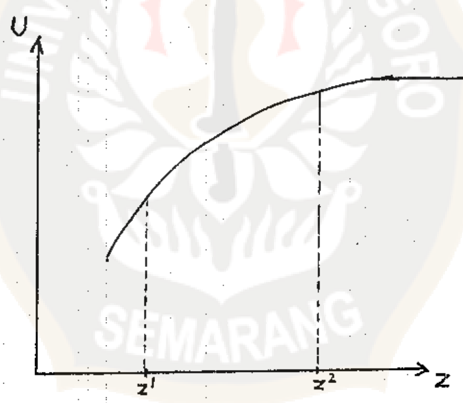
Dari definisi 1 di depan, diperoleh beberapa bentuk fungsi utilitas.

Definisi 49

Suatu fungsi $U: R^k \longrightarrow R$ adalah tidak turun (*non decreasing*) jika dan hanya jika untuk semua $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2 \in R^k$ sedemikian sehingga $\mathbf{z}^1 \leqq \mathbf{z}^2$, maka

$$U(\mathbf{z}^1) \leqq U(\mathbf{z}^2).$$

Secara geometris fungsi *non decreasing* digambarkan seperti di bawah ini.



Gambar 15

Definisi 50

Suatu fungsi $U: R^k \longrightarrow R$ adalah naik (*increasing*) jika dan hanya jika untuk semua $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2 \in R^k$ sedemikian sehingga $\mathbf{z}^1 < \mathbf{z}^2$, maka

$$U(\mathbf{z}^1) < U(\mathbf{z}^2).$$

Definisi 51

Suatu fungsi $U: R^k \longrightarrow R$ dinamakan kon kaf jika dan hanya jika untuk semua $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \in R^k$ berlaku

$$U[\lambda\ z^1 + (1-\lambda)\ z^2] \geqq \lambda\ U(z^1) + (1-\lambda)\ U(z^2).$$

untuk semua $\lambda \in [0,1]$.

Definisi 52

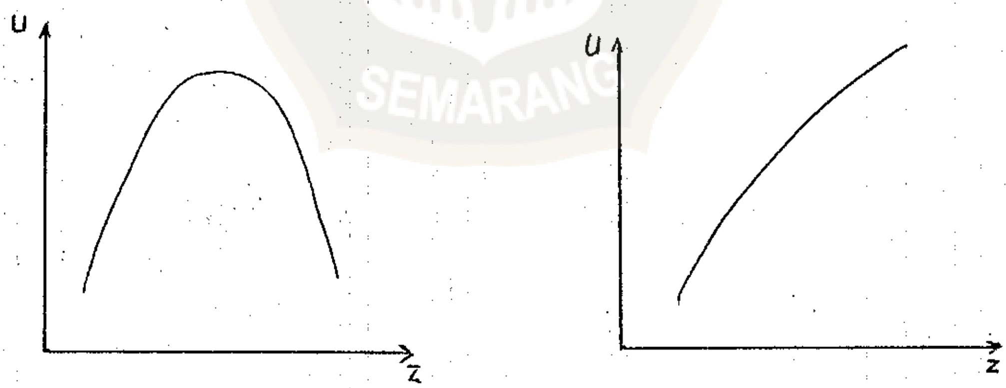
Suatu fungsi $U: R^k \longrightarrow R$ dinamakan strictly konkaf jika dan hanya jika untuk semua $z^1, z^2 \in R^k$ sedemikian sehingga $z^1 \neq z^2$.

$$U[\lambda\ z^1 + (1-\lambda)\ z^2] > \lambda\ U(z^1) + (1-\lambda)\ U(z^2).$$

untuk semua $\lambda \in [0,1]$.

Dengan mengganti $U(z^1) \leqq U(z^2)$ dengan $U(z^1) \geqq U(z^2)$ dalam definisi 49, di peroleh definisi non increasing. Kemudian dengan cara yang sama, yaitu mengganti $U(z^1) < U(z^2)$ dengan $U(z^1) > U(z^2)$ dalam definisi 50 diperoleh definisi decreasing. Dan dengan membalik pertidaksamaan pada definisi 51 dan definisi 52, kita akan mendapatkan definisi konvek dan strictly konvek.

Gambar 16 (a) dan 16 (b) berikut untuk menggambarkan bentuk-bentuk fungsi seperti pada definisi52 sampai dengan 54.



(a) (b)

Gambar 16

Definisi 53

Suatu fungsi $U: R^k \longrightarrow R$ dinamakan quasi konkaf jika dan hanya jika untuk semua $z^1, z^2 \in R^k$ sedemikian sehingga $U(z^1) \leqq U(z^2)$, berlaku

$$U(z^1) \leqq U[\lambda\ z^1 + (1-\lambda)\ z^2] \text{ untuk semua } \lambda \in [0,1].$$

Definisi 54

Suatu fungsi U: $R^k \longrightarrow R$ dinamakan *strictly quasi konkaf* jika dan hanya jika untuk semua $z^1, z^2 \in R^k$ sedemikian sehingga $U(z^1) \leq U(z^2)$, berlaku

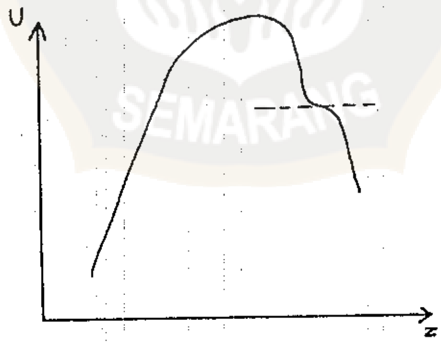
$$U(z^1) < U[\lambda z^1 + (1-\lambda) z^2] \text{ untuk semua } \lambda \in [0,1].$$

Definisi 55

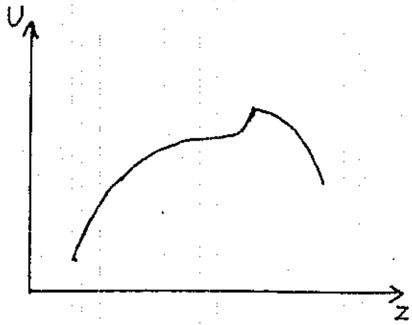
Dengan mengambil fungsi $U: R^k \longrightarrow R$ diferensiabel pada R^k, maka fungsi U dinamakan *pseudo konkaf* (konkaf semu) jika dan hanya jika untuk semua $z^1, z^2 \in R^k$ sedemikian sehingga $\nabla U(z^1)(z^2 - z^1) \leq 0$ diperoleh $U(z^2) \leq U(z^1)$.

Dengan membalik semua pertidaksamaan dari definisi 53, 54 dan 55 kita memperoleh definisi quasi konvek, strictly quasi konvek dan pseudo konvek. Dengan catatan untuk fungsi pseudo konkaf dan pseudokonvek adalah diferensiabel.

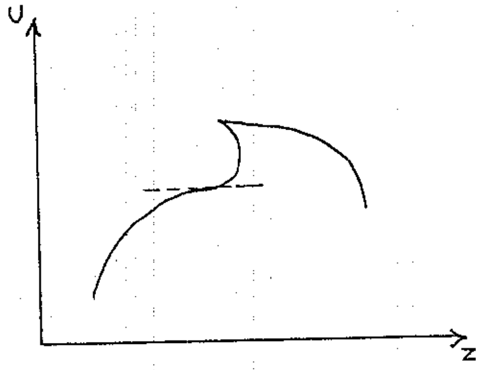
Gambar 17 (a), 17 (b) dan 17 (c) menggambarkan secara geometris definisi 53, 54, dan 55.



(a)



(b)



(c)

Gambar 17