BAB I
PENDAHULUAN

1.1 PENGERTIAN

Suatu permasalahan optimasi dewasa ini kadang-kadang mempunyai fungsi obyektif atau fungsi tujuan yang tidak tunggal. Masalah optimasi dengan fungsi tujuan multiple dikenal dengan persoalan program obyektif multiple (Multiple Objective Program). Program obyektif multiple dapat berbentuk linier maupun nonlinier. Pada pengertian yang akan dibahas ini, adalah program linier dengan fungsi objektif multiple maksimalisasi.

Bentuk umum dari persoalan program objektif multiplenya adalah sebagai berikut.

$$\left.\begin{array}{l} \text{memaksimalkan } \{ f_1(x_1, x_2, \dots , x_n) = z_1\} \\ \text{memaksimalkan } \{ f_2(x_1, x_2, \dots , x_n) = z_2\} \\ \quad \vdots \\ \text{memaksimalkan } \{ f_k(x_1, x_2, \dots , x_n) = z_k\} \end{array}\right\} \quad \dots (1)$$

dengan syarat

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots , x_n) \;\; (\leqq, = , \geqq)\; b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots , x_n) \;\; (\leqq, = , \geqq)\; b_2 \\ \quad \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots , x_n) \;\; (\leqq, = , \geqq)\; b_m \end{array}\right\} \quad \dots (2)$$

dan

$$x_1, x_2, \dots , x_n \geqq 0 \qquad \dots (3)$$

dimana

z_i adalah harga dari fungsi objektif ke-i

f $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan fungsi objektif yang berbentuk linier.

g $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah fungsi kendala yang berbentuk linier.

Dalam persoalan optimasi dengan fungsi objektif tunggal yang sudah biasa dikenal, yang harus diselesaikan adalah memaksimalkan keuntungan atau meminimalkan ongkos saja. Sedangkan pada persoalan optimisasi dengan fungsi objektif multiple harus menyelesaikan lebih dari satu tujuan.

Untuk menyelesaikan persoalan optimasi dengan banyak fungsi tujuan harus dimengerti dahulu konsep-kosep vektor kriteria non-dominasi dan efisiensi.

Definisi 1

Jika R^k adalah ruang kriteria berdimensi k dan $\mathbf{z} \in R^k$ adalah vektor kriteria dengan :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_k \end{bmatrix}$$

maka

Fungsi Utilitas U adalah suatu fungsi yang memetakan **z** dari R^k ke R, atau

U : R^k ----> R.

Definisi 2

Jika $\bar{\mathbf{z}} \in Z$, dengan Z adalah daerah fisibel dalam ruang kriteria R^k, yaitu $Z \subset R^k$,

maka $\bar{\mathbf{z}}$ adalah nondominasi jika dan hanya jika tidak terdapat $\mathbf{z} \in Z$

sedemikian sehingga $\mathbf{z} \geqq \bar{\mathbf{z}}$ dan $\mathbf{z} \neq \bar{\mathbf{z}}$.

Definisi 3

Jika $\bar{x} \in S$, dengan S adalah daerah fisibel dalam ruang keputusan R^n, maka $\bar{x}$ adalah efisien jika dan hanya jika tidak terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga $Cx \geqq C\bar{x}$ dan $Cx \neq C\bar{x}$ dimana C adalah matriks kriteria berordo k x n.

Untuk lebih jelasnya pandang contoh berikut.

Contoh 1

Pandang suatu program linier dengan fungsi objektif multiple.

memaksimalkan $\{ x_1 + x_2 = z_1 \}$

memaksimalkan $\{ x_1 = z_2 \}$

yang memenuhi : $4x_1 + 3x_2 \leqq 12$

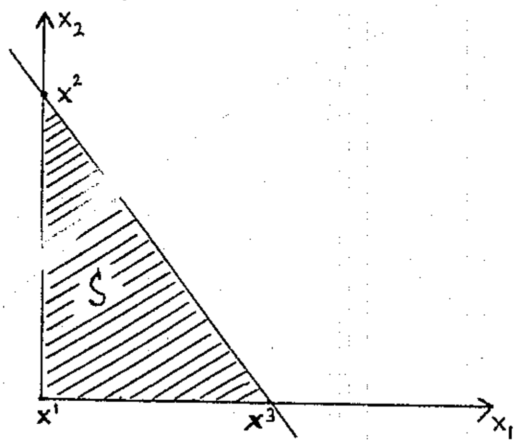
$x_1, x_2 \geqq 0$

dengan $\mathbf{U} = 2\, z_1 z_2$

Untuk menyelesaikan persoalan dalam ruang keputusan, kita tulis kembali fungsi utilitas U dalam variabel x, maka:

$$U = 2\,(x_1 + x_2).x_1$$
$$= 2\,(x_1)^2 + 2x_1x_2$$

Secara grafis:



$\mathbf{x}^1 = (0,0)$

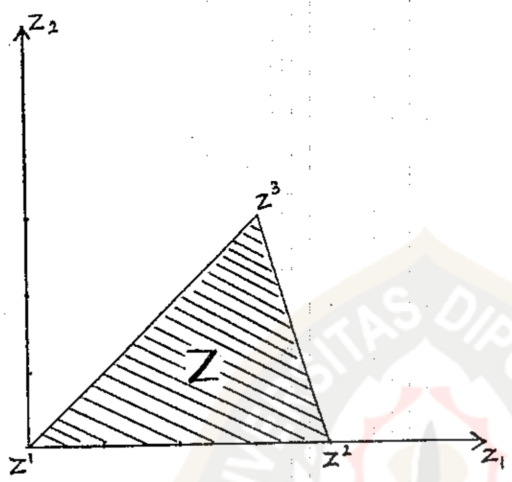
$\mathbf{x}^2 = (0,4)$

$\mathbf{x}^3 = (3,0)$

Gambar 1

Dari gambar 1dapat dilihat bahwa titik optimalnya adalah x^3 = (3,0), vektor kriteria optimal adalah (3,3) dan harga fungsi optimal U = 18.

Penyelesaian persoalan di atas dalam ruang kriteria adalah:



Gambar 2

z^1 = (0,0)

z^2 = (4,0)

z^3 = (3,3)

dimana z^1, z^2 dan z^3 adalah bayangan (image) dari x^1, x^2 dan x^3.

Dari gambar dapat kita lihat z^3 = (3,3) adalah vektor kriteria yang optimal dan 18 adalah titik optimal dari fungsi U. Karena x^3 = (3,0) adalah bayangan invers dari z^3, maka x^3 adalah titik optimal.

1.2 PERMASALAHAN

Permasalahan yang timbul dalam hal ini adalah bagaimana hubungan antara keoptimalan dengan vektor kriteria nondominasi, antara vektor kriteria nondominasi dan efisiensi. Dan bagaimana mencari titik-titik efisien dalam suatu program linier multiple, baik yang biasa maupun komposit.

1.3 PEMBAHASAN

Dengan definisi dan teorema serta contoh-contoh yang sudah ada pada materi penunjang, maka pada materi ini akan dibahas hubungan antara keoptimalan dengan vektor kriteria nondominasi, hubungan antara vektor kriteria nondominasi dengan titik-titik efisien, dan hubungan antara titik efisien dengan nilai maksimal suatu program linier multiple.

Pembahasan awal dalam materi ini adalah tentang pengertian vektor kriteria nondominasi dan efisiensi. Yang juga akan membahas tentang dominasi dan keoptimalan penyelesaian.

Berdasarkan teorema-teorema yang ada akan dibahas sifat-sifat dari vektor kriteria dan titik efisiensi pada ruang kriteria dan ruang keputusan. Dan dengan menyederhanakan persyaratan akan dibahas juga tentang efisiensi lemah.

Dari pembahasan-pembahasan tersebut, maka akan dapat dilihat keterkaitan antara vektor kriteria nondominasi dengan keoptimalan penyelesaian dan juga bagaimana mendeteksi titik-titik efisien dari suatu program linier multiple.