BAB II
MATERI DASAR

2.1. MATRIK Dan DETERMINAN

DEFINISI 1.

Matrik adalah tabel bilangan yang diatur oleh baris dan kolom.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrik A terdiri dari m baris , n kolom dan berukuran (mxn).

DEFINISI 2.

Bila m = n atau banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom ,maka matrik tersebut disebut matrik bujur-sangkar.

Contoh 3 .

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -7 \\ 6 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

B adalah matrik dengan 4 baris dan 4 kolom (berukuran atau berordo 4).

DEFINISI 3.

Diberikan matrik $A_{(nxn)} = (a_{ij})$ maka M_{ij} adalah suatu sub matrik dari A yang berukuran {(n-1) x (n-1)},dengan baris ke-i dan kolom ke-j dari A dihilangkan.

DEFINISI 4.

Minor dari elemen a_{ij} suatu matrik $A = (a_{ij})$ adalah $|M_{ij}|$

Contoh 4.

Diberikan matrik $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Minor elemen-elemen matrik A adalah :

$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad |M_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 10$

$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7$ $\qquad |M_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1$

$|M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4$ $\qquad |M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3$

$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1$ $\qquad$ $|M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$|M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

DEFINISI 5.

Kofaktor A_{ij} dari elemen a_{ij} dari matrik bujur sangkar A adalah $(-1)^{i+j}$ dikalikan dengan minor dari a_{ij}.

Jadi Kofaktor dari $a_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$.

Contoh 5 :

Dari matrik A pada contoh 4

$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (1)(1) = 1$

$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = (-1)(10) = -10$

$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = (1)(7) = 7$

DEFINISI 6.

Determinan dari matrik bujur sangkar A adalah perkalian elemen-elemen sembarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya.

Dan diberi tanda det(A) atau $|A|$, yaitu :

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ dengan i sembarang ,disebut uraian menurut baris ke-i

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ dengan j sembarang ,disebut uraian menurut kolom ke-j

Contoh 6:

Diketahui matrik $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 9 & -7 & 5 \\ 10 & 8 & 12 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Ditanya berapa besar determinan B atau $|B|$

Jawab :

Menurut definisi 6,akan di hitung berdasarkan uraian baris ke-1 ,yaitu :

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} + a_{15}A_{15}$

dengan $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$, $a_{14} = -1$, $a_{15} = 3$

Dengan menggunakan definisi 5,yaitu kofaktor dari $a_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$, maka diperoleh harga-harga:

$$A_{11} = (-1)^{11}|M_{11}| = + \begin{vmatrix} 5 & 9 & -7 & 5 \\ 8 & 12 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Sesuai definisi 6,maka :

$$= +5 \begin{vmatrix} 12 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix} -9 \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix} + (-7) \begin{vmatrix} 8 & 12 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$-5 \begin{vmatrix} 8 & 12 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \left\{ +12 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} -4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \right\} -9 + \left\{ 8 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. -4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \right\} -7 \left\{ +8 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} -12 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. +2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \right\} -5 \left\{ +8 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} -12 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \right\}$$

$= 5[(12)(9) - (4)(29) + (2)(13)] - 9[(8)(9) - (4)(8) +(2)(-2)] -7[(8)(29) - (12)(8) + (2)(-18)] -5[(8)(13) - (12)(-2) + (4)(-18)]$

$= 5(108-116+26) - 9(72-32-4) -7(232-96-36) -5(104+24-72)$

$= 5(18) -9(36) -7(100) -5(56) = -1214$

Analog :

$$A_{12}=(-1)^{1+2}|M_{12}| =- \begin{vmatrix} 3 & 9 & -7 & 5 \\ 10 & 12 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=- +3 \begin{vmatrix} 12 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix} -9 \begin{vmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} -7 \begin{vmatrix} 10 & 12 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} -5 \begin{vmatrix} 10 & 12 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= - \left[3 \left\{ +12 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} -4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \right\} -9 \left\{ +10 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \right. \right.$$

$$-4\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & 7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{vmatrix}\Bigg\}-7\Bigg\{10\begin{vmatrix}5 & 1\\6 & 7\end{vmatrix}-12\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & 7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 5\\3 & 6\end{vmatrix}\Bigg\}$$

$$-5\Bigg\{+10\begin{vmatrix}5 & 2\\6 & 5\end{vmatrix}-12\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1 & 5\\3 & 6\end{vmatrix}\Bigg\}\Bigg]$$

$$= -\ [3\{12(9)-4(29)+2(13)\}-9\{10\ (9)-4(4)+2(-1)\}$$

$$-7\ \{10(29)-12(4)+2(-9)\}-5\ \{10\ (13)$$

$$-12(-1)+4(-9)\}]$$

$$= \ -[\ \ 3\{108-116+26\}\ \ -9\{90-16-2\}\ \ -7\{290-48-18\}$$

$$-5\{130+12-36\}]$$

$$= -(54\ -648\ -1568\ -530) = 2692$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = +\begin{vmatrix}3 & 5 & -7 & 5\\10 & 8 & 4 & 2\\1 & 2 & 2 & 1\\3 & 6 & 5 & 7\end{vmatrix}$$

$$= +3\begin{vmatrix}8 & 4 & 2\\2 & 2 & 1\\6 & 5 & 7\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}10 & 4 & 2\\1 & 2 & 1\\3 & 5 & 7\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}10 & 8 & 2\\1 & 2 & 1\\3 & 6 & 7\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}10 & 8 & 4\\1 & 2 & 2\\3 & 6 & 5\end{vmatrix}$$

$$= 3\Bigg\{+8\begin{vmatrix}2 & 1\\5 & 7\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2 & 1\\6 & 7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & 2\\6 & 5\end{vmatrix}\Bigg\}-5\Bigg\{+10\begin{vmatrix}2 & 1\\5 & 7\end{vmatrix}$$

$$-4\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & 7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{vmatrix}\Bigg\}-7\Bigg\{+10\begin{vmatrix}2 & 1\\6 & 7\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & 7\end{vmatrix}$$

$$+2\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{vmatrix}\Bigg\}-5\Bigg\{+10\begin{vmatrix}2 & 2\\6 & 5\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{vmatrix}\Bigg\}$$

$$= 3\{8(9)-4(8)+2(-2)\}\ -5\{10(9)-4(4)+2(-1)\}$$

$$-7\{10(8)-8(4)+2(0)\}\ -5\{10(-2)-8(-1)+4(0)\}$$

$$= 3\{72-32-4\}\ -5\{90-16-2\}\ -7\{80-32+0\}\ -5\{-20+8+0\}$$

$$= 3(36)\ -5(72)\ -7(48)\ -5(-12)\ =-528$$

$$A_{14}= (-1)^{1+4}|M_{14}| =-\begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 & 5 \\ 10 & 8 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=-\left(+3\begin{vmatrix} 8 & 12 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} -5\begin{vmatrix} 10 & 12 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} +9\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} -5\begin{vmatrix} 10 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$=-\left(3\left\{8\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} -12\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}\right\} -5\left\{+10\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} -12\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\right\} +9\left\{+10\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} -8\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\right\} -5\left\{+10\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} -8\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} +12\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\right\}\right)$$

$$=-[3\{ 8(29)-12(8)+2(-18)\}\ -5\{10(29)-12(4)+2(-9)\}$$

$$+\ 9\{10(8)-8(4)+2(0)\}\ -5\{10(-18)-8(-9)+12(0)\}]$$

$$=-(300-1120+432+540)\ =-152$$

$$A_{15}=(-1)^{1+5}|M_{15}| =+\begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 & -7 \\ 10 & 8 & 12 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= +3\begin{vmatrix} 8 & 12 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 5 \end{vmatrix} -5\begin{vmatrix} 10 & 12 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} +9\begin{vmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} +7\begin{vmatrix} 10 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left\{+8\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} -12\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} +4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}\right\} -5\left\{+10\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} -12\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right.$$

$$+4\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}\Bigg\}+9\Bigg\{+10\begin{vmatrix}2 & 2\\ 6 & 5\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}\Bigg\}+7\Bigg\{+10\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 6\end{vmatrix}$$

$$-8\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}+12\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}\Bigg\}$$

$$= 3\{\ 8(13)-12(-2)+4(-18)\}\ -5\{10(13)-12(-1)+4(-9)\ \}$$

$$+9\{\ 10(-2)-8(-1)+4(0)\ +\ 7\{10(-18)-8(-9)+12(0)\ \}$$

$$= 168\ -530\ -108\ -756\ =\ -1226$$

Sehingga didapat:

$$\det(A)=|A|=a_{11}A_{11}\ +\ a_{12}A_{12}\ +\ a_{13}A_{13}\ +\ a_{14}A_{14}\ +\ a_{15}A_{15}$$

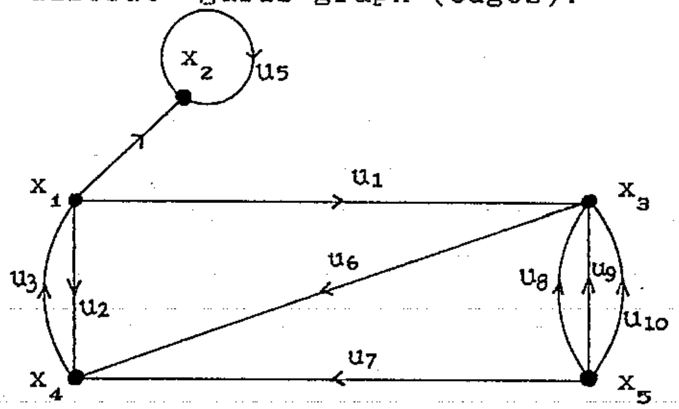
$$= 1(-1214)+0(2692)+2(-528)-1(-152)+3(-1226)$$

$$= -5796$$

2.2. PENGERTIAN GRAPH

DEFINISI 7.

Graph arah(directed graph) $G=(X,U)$ memuat himpunan obyek $X=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$ yang disebut titik(vertex) dan obyek yang lain $U=\{u_1,u_2,u_3,\ldots\ \}$ yang disebut garis graph (edges).



Gambar 3. *Graph arah dengan 5 titik dan 10 garis*

DEFINISI 8.

Sebuah garis graph (edges) yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama disebut loop

Contoh 7.

Dari gambar 3. u_5 merupakan loop.

DEFINISI 9.

Path adalah deretan bergantian antara titik graph (vertex) dan garis (edges) dimulai dan diakhiri dengan titik dimana titik dan garis tidak boleh diulang kecuali path tertutup yang sering disebut cycle.

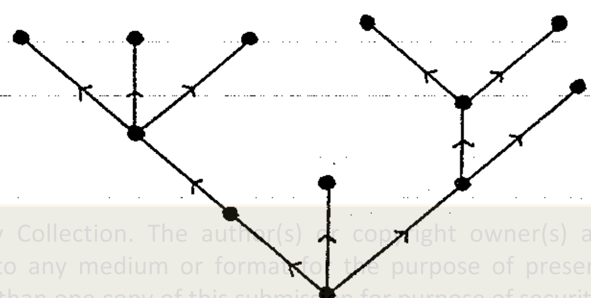
Contoh 8.

Pada gambar 3. $x_1\ u_1\ x_3\ u_6\ x_4$

DEFINISI 10.

Titik (vertex) a disebut sebuah akar (root) jika seluruh titik-titik dari G dapat diraih atau dicapai dengan sebuah path berarah yang dimulai dari titik (vertex) a.

Contoh 9.



a = akar (root).

DEFINISI 11.

Walk adalah deretan bergantian dari titik dan garis, dimulai dan diakhiri dengan titik dimana setiap garis inciden dengan titik ke kanan kirinya dengan titik dan garis boleh diulang.

Jika titik awal = titik akhir maka disebut walk terbuka.

Jika titik awal = titik akhir maka disebut walk tertutup.

Contoh 10.

Pada gambar 3. x_5 u_7 x_4 u_3 x_1 u_2.

DEFINISI 12.

Suatu walk tertutup dimana tidak ada titik yang dilewati lebih dari sekali (kecuali titik awal dan titik akhir) disebut sirkuit (circuit).

Contoh 11.

Pada gambar 3. x_4 u_3 x_1 u_1 x_3 u_6 x_4

DEFINISI 13.

Dalam sebuah digraph sebuah garis tidak hanya incident pada suatu titik tetapi juga incident keluar dari sebuah vertex dan incident masuk kesebuah titik.

Contoh 12.

Pada gambar 3.Garis $u_7$insiden masuk ke titik x_4 dan u_7 insiden keluar dari titik x_5.

DEFINISI 14.

Dikatakan bahwa $x_i$adjacent ke x_j bila hanya bila garis $x_i x_j \in G$. Sebaliknya x_i adjacent dari $x_j$bila hanya bila $x_j x_i \in G$.

Contoh 13 .

Pada gambar 3. Pada garis u karena garis $x_1 x_4 \in G$ maka $x_1$adjacent ke x_4 atau x_4 adjacent dari x_1,sedangkan x_2 dan x_4 adalahtidak adjacent.

DEFINISI 15.

Suatu degree dari titik x adalah banyaknya garis yang insiden pada sebuah titik x.

Suatu degree dari titik x dinotasikan dengan:

$d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$,dimana

$d_G^+(x)$ atau outer demi degree adalah jumlah dari garis berarah yang keluar dari titik x.

$d_G^-(x)$ atau inner demi degree adalah jumlah dari garis berarah yang menuju ketitik x.

DEFINISI 16.

Jumlah garis-garis dalam G adalah :

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(x_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(x_i).$$

Contoh 14.

Pada gambar 3. $\sum_{i=1}^{5} d^{+}(x_i)=10, \sum_{i=1}^{5} d^{-}(x_i)=10$

Jadi jumlah garis dalam G adalah 10 garis.

DEFINISI 17.

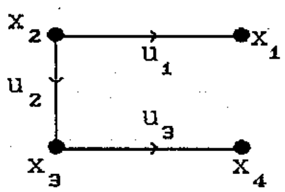
Suatu titik dengan derajat satu (degree satu) disebut suatu titik akhir (end vertex).

DEFINISI 18.

Sebuah graph dikatakan terhubung (connected) jika paling sedikit ada satu buah path diantara setiap pasang titiknya. Dan sebaliknya dikatakan tak terhubung (dis connected).

DEFINISI 19.

Digraph G dikatakan terhubung (connected) jika undirected graphnya terhubung.



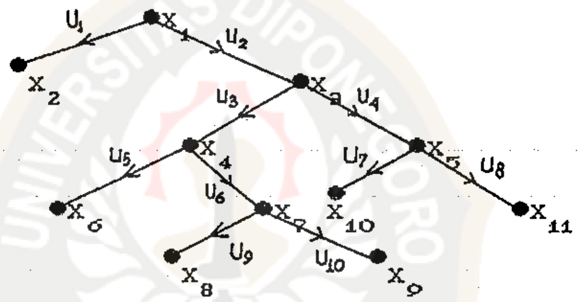
Gambar 4. *Connected digraph.*

DEFINISI 20.

Sebuah path dengan panjang q adalah sebuah urutan $\mu = (u_1, u_2, \ldots u_q)$ dimana titik akhir dari garis u_i adalah titik awal dari garis u_{i+1} untuk seluruh $i<q$.

DEFINISI 21.

Di graph G dikatakan quasi terhubung kuat (quasi strongly connected) jika untuk masing-masing sepasang dari titik-titik x,y ada sebuah titik z(x,y) yang membentuk sebuah path ke x dan sebuah path ke y.



Gambar 5. *Digraph dengan 11 dan 10 garis graph(edges)*

Contoh 15.

Pada gambar 5.Untuk pasangan titik x_8,x_9 ada titik $z(x_8,x_9)=x_7$ membentuk path $[x_7,u_9,x_8]$ dan $[x_7,u_{10},x_9]$.

Untuk pasangan titik x_6,x_8 ada titik $z(x_6,x_8)=x_4$ membentuk path $[x_4,u_5,x_6]$ dan $[x_4,u_6,x_7,u_9,x_8]$.

Teorema 1.

Sebuah digraph G=(X,U) mempunyai sebuah akar(root) bila hanya bila G adalah Quasi terhubung kuat (quasi strongly connected).

Bukti :

⇒

Jika G mempunyai sebuah akar (root) maka menurut definisi 10,setiap titik-titik yang lain dalam G dapat dicapai dengan sebuah path.

Oleh karena itu menurut definisi 21 jelas bahwa G Quasi terhubung kuat.

⇐

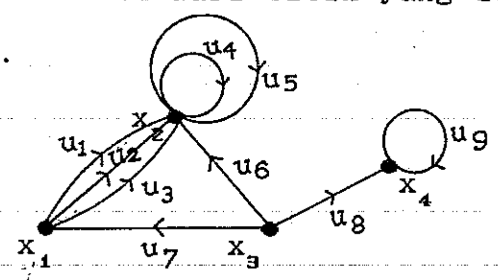
Pandang G quasi terhubung kuat dengan titik-titik $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$.

Menurut definisi 21 berarti ada sebuah titik z_2 yang membentuk sebuah path ke x_1 dan sebuah path ke x_2. Selanjutnya ada sebuah titik z_3 yang membentuk sebuah path ke z_2 dan sebuah path ke x_3 dan seterusnya sampai ada titik z_n yang membentuk sebuah path ke z_{n-1} dan sebuah path ke x_n. Dari definisi 10 titik z_n adalah sebuah akar dari G. Terbukti.

DEFINISI 22.

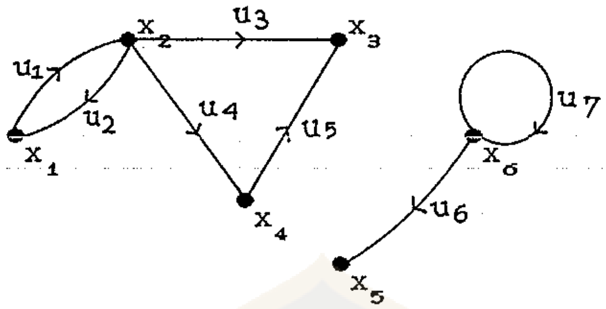
n-Graph adalah graph yang mempunyai garis arah menuju suatu titik dari titik yang sama, maximum n.

Contoh 16 .



gambar 6A.

Pada gambar 6A. Garis yang menuju titik x_2 dari titik yang sama yaitu titik x_1, maximum 3 yaitu garis u_1, u_2, u_3. Maka disebut 3-graph.



Gambar 6B.

Pada gambar 6B, Garis yang menuju suatu titik dari titik yang sama semuanya 1 jadi maximum 1. Maka disebut 1-graph.

2.3. MATRIK Dalam GRAPH

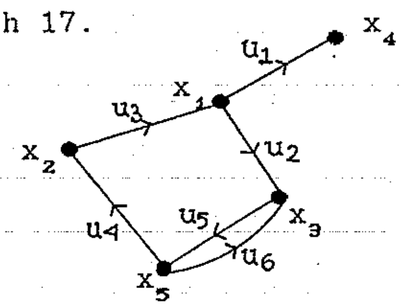
DEFINISI 23.

$A = (a_j^i)$ adalah suatu matrik yang dihubungkan dengan graf G yang disebut matrik adjacency, dimana $a_j^i = m_G^+ (x_i, x_j)$ artinya sebuah garis arah dari titik x_i ke titik x_j.

$= 1$ untuk garis $x_i x_j \in G$

$= 0$ untuk garis $x_i x_j \notin G$

Contoh 17.



gambar 7. Digraph G

Dari gambar 7.

$$(a_5^5) = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

DEFINISI 24.

$D = (d_j^i)$ adalah matrik diagonal yang didefinisikan dengan :

$(d_j^i) = \sum m_G^+(X - \{x_i\}, x_i)$, artinya jumlah dari seluruh keterhubungan garis arah dari titik-titik dalam G selain titik x_i ke titik x_i, jika i = j, dan $d_j^i = 0$, jika $i \neq j$.

Contoh 18.

Dari gambar 7, diperoleh :

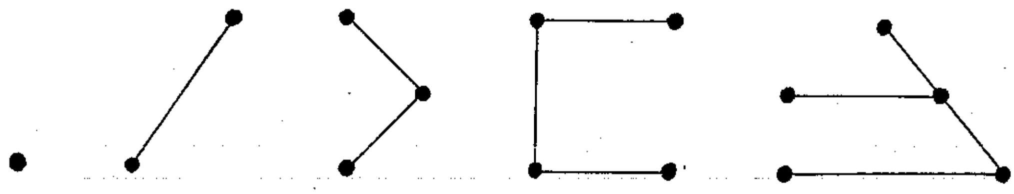
$$(d_5^5) = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2.4. POHON (TREE)

DEFINISI 25.

Sebuah pohon (tree) adalah graph terhubung (connected graph) tanpa cycle.

Contoh 19.



Gambar 8 Pohon dengan 1,2,3,4,5 titik.

Teorema 2.

Ada satu dan hanya satu path diantara pasangan titik-titik dalam sebuah pohon T.

Bukti:

Jika T adalah graph terhubung ,maka harus ada sedikitnya satu path diantara pasangan titik-titik dalam T.Andaikan diantara dua titik a dan b pada T ada dua path yang berbeda,union dari dua path tersebut akan membentuk suatu circuit dan menurut definisi 25 maka T bukan merupakan pohon.Kontradiksi dengan T adalah pohon.pengandaian salah,yang benar adalah ada satu dan hanya satu path antara pasangan titik-titik dalam T.Terbukti.

Teorema 3.

Jika dalam graph G ada satu dan hanya satu path diantara pasangan titik-titiknya maka G adalah pohon.

Bukti:

Andaikan dalam graph G ada sebuah sirkuit maka ada sedikitnya satu pasang titik a dan b sedemikian sehingga ada dua path yang berbeda antara a dan b. Kontradiksi dengan G mempunyai satu dan hanya satu path diantara pasangan titik-titiknya.

Pengandaian salah, yang benar adalah G tidak mempunyai sirkuit. Sehingga menurut definisi 25, G adalah pohon.Terbukti.

Teorema 4.

Sebuah pohon dengan n titik mempunyai n-1 garis.

Bukti :

Teorema ini akan di buktikan dengan hipotesa induksi lengkap.

Pangkal :Pernyataan jelas benar jika tree itu terdiri atas 1 titik.

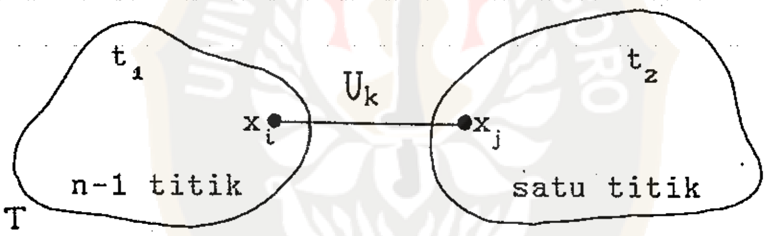
Untuk n=1 titik , ● tidak ada garis .Benar.

Langkah :Misalkan pernyataan benar untuk seluruh pohon dengan jumlah titik n-1 titik.

Selanjutnya akan dibuktikan teorema benar untuk jumlah titik n titik.

Pandang sebuah pohon T dengan n titik .Dalam T ,U_k adalah sebuah garis graph (edge) dengan titik ujung x_i dan x_j. Sesuai dengan theorema 2, maka tidak ada path lain diantara x_i dan x_j kecuali U_k.Karena itu penghapusan u_k dari T akan memutus pohon ini. Seperti terlihat dalam gambar 9. Sehingga $T-U_k$ terdiri dari tepat dua komponen. Kedua pohon tersebut t_1 dan t_2 mempunyai titik kurang dari n titik.

Ambil t_1 terdiri dari n-1 titik dan t_2 terdiri dari satu titik. Maka t_1 memuat n-2 garis dan t_2 0(nol) garis.Sehingga $T-U_k = t_1+t_2$ memuat n-2 garis graph. Dari sini T mempunyai tepat n-1 garis graph (edge) terbukti.



gambar 9. Pohon dengan n titik.

Contoh 20 .

Akan dibuktikan bahwa untuk 9 titik dalam pohon akan mempunyai 8 garis atau (n-1) garis dengan n=9.

Penyelesaian :

Untuk n = 1 ● Tidak mempunyai garis atau nolgaris

Misalkan pernyataan benar untuk tree (pohon) terdiri atas n-1 titik = 9-1 = 8 titik.

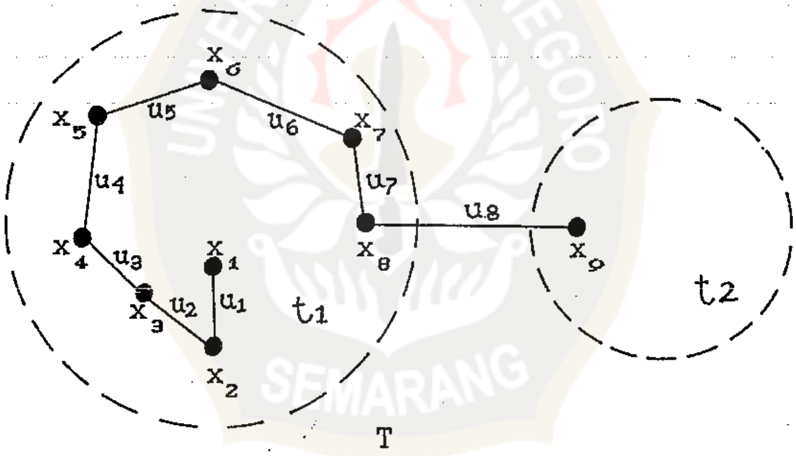
Akan dibuktikan benar untuk n=9 titik.Pandang sebuah pohon T dengan 9 titik. Karena setiap 2 titik dihubungkan dengan path yang tunggal (menurut theorema 2) maka pengeluaran sebuah garis umpama U_8

akan menghasilkan

t_1 dan t_2. Sehingga T-U_8 terdiri dari tepat 2 komponen. Seperti yang terlihat pada gambar 10 dibawah ini. Sekarang ambil t_1 terdiri dari 8 titik dan t_2 terdiri dari satu titik. Maka t_1 memuat 7 garis dan t_2 memuat 0 (nol) garis.

Sehingga T-U_8 = t_1+ t_2 memuat 7+0=7 garis graph. Dari sini T mempunyai tepat 8 garis graph.

Jadi benar untuk pohon dengan 9 titik mempunyai 8 garis. Terbukti.

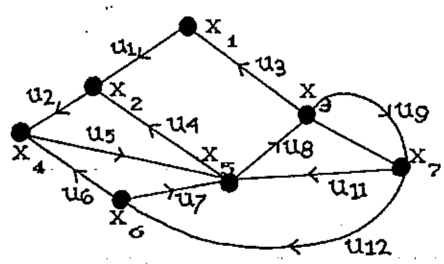


Gambar 10. *Pohon dengan 9 titik*

DEFINISI 26.

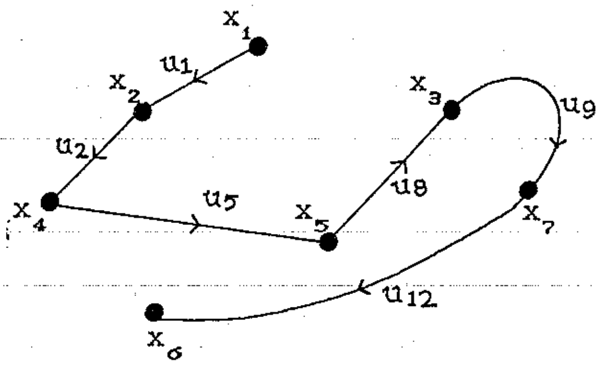
Suatu pohon T dikatakan sebagai pohon bentangan (spanning tree) dari graph terhubung G jika T adalah sub graph dari G dan T memuat seluruh titik-titik dari G.

Contoh 21 .



Gambar 11. *Digraph G.*

Untuk mencari pohon bentangan dari sebuah graph terhubung sangatlah sederhana jika graph G tidak mempunyai circuit maka pohon bentangan adalah dirinya sendiri. Dan jika graph G menpunyai circuit hapuslah sebuah garis graph (edge) dari circuit itu, penghapusan ini masih akan tetap meninggalkan graph G terhubung. Jika masih ada circuit lagi ulangi langkah penghapusan tersebut sampai sebuah garis graph (edge) pada circuit terakhir terhapus dan akan meninggalkan graph terhubung, graph yang tidak mempunyai circuit yang memuat seluruh titik-titik dari G. Dengan demikian sudah kita dapatkan pohon bentangan



Gambar 12. *Pohon bentangan.*