# BAB II

# TEORI PENUNJANG

## 2.1 TEORI BILANGAN

### 2.1.1 Relasi Kongruensi

**Definisi 2.1**

a kongruen b modulo m ( m adalah bilangan asli ) bila dan hanya bila a − b adalah kelipatan dari m atau

$a \equiv b \pmod{m}$ *bhb* $a - b = \alpha m$ ( $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$ )

*Sifat-sifat Kongruensi*

a. Kongruensi merupakan relasi ekuivalensi

1) *sifat Refleksif*

**Definisi 2.2**

Relasi R disebut refleksif bila dan hanya bila untuk setiap anggota dari bilangan bulat berlaku a R a . Atau

R refleksif bhb ( $\forall a \in S$ ) . a R a

Untuk kongruensi terpenuhi $a \equiv a \pmod{m}$ karena $a - a = 0\,m$ sehingga merupakan kelipatan dari m .

contoh :

$7 \equiv 7 \pmod{7}$ sebab $7 - 7 = 0 \cdot 7$ ( suatu kelipatan dari 7 )

2) *sifat Simetris*

**Definisi 2.3**

Relasi R disebut simetris bila dan hanya bila untuk setiap a , b dari bilangan bulat berlaku jika a R b maka b R a . Atau

R simetris bhb ( $\forall$ a,b $\in$ S ) . a R b $\longrightarrow$ b R a

Untuk kongruensi akan berlaku jika $a \equiv b \pmod m$ maka $b \equiv a \pmod m$ karena jika $a - b = \alpha\ m$ maka $b - a = -\alpha\ m$ ( suatu kelipatan negatif dari m juga ) . Sehingga untuk setiap a , b akan berlaku jika $a \equiv b \pmod m$ maka $b \equiv a \pmod m$

contoh :

Jika $12 \equiv 4 \pmod 4$ maka $4 \equiv 12 \pmod 4$ sebab $12 - 4 = 2 . 4$ dan $4 - 12 = -2 . 4$ semuanya merupakan kelipatan dari 4 .

3) *sifat Transitif*

**Definisi 2.4**

Relasi R disebut transitif bila dan hanya bila untuk setiap a , b , c dari bilangan bulat berlaku jika a R b dan b R c maka a R c . Atau

R transitif bhb ( $\forall$ a,b,c $\in$ S ) . a R b $\wedge$ b R c $\longrightarrow$ a R c .

Untuk kongruensi akan berlaku jika $a \equiv b \pmod m$ dan $b \equiv c \pmod m$ maka $a \equiv c \pmod m$ karena jika diketahui $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$ maka

$$\begin{array}{l} a - b = \alpha_1 \, m \\ \underline{b - c = \alpha_2 \, m} \; + \\ a - b = (\alpha_1 + \alpha_2) \, m \\ \quad = \lambda \, m \quad , \text{dimana } \alpha_1, \alpha_2, \lambda = 0, \mp 1, \mp 2, .. \end{array}$$

sehingga $a - c$ suatu kelipatan $m$ juga .

Jadi untuk setiap $a$ , $b$ , $c$ akan berlaku jika $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m}$ maka $a \equiv c \pmod{m}$

contoh :

$27 \equiv 22 \pmod{5} \wedge 22 \equiv 7 \pmod{5}$ maka $27 \equiv 7 \pmod{5}$ .

b. Sifat Tambahan Kongruensi

Apabila $a \equiv b \pmod{m}$ maka $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ ..................(2.1)

untuk membuktikan sifat tambahan kongruensi : Apabila $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ ..................(2.2)

Bukti :

(2.1) Diketahui $a \equiv b \pmod{m}$ sehingga $a - b$ merupakan kelipatan dari $m$ .

$a - b = (a + c) - (b + c)$ , maka $(a + c) - (b + c)$ juga kelipatan dari $m$ sehingga $a + c \equiv b + c \pmod{m}$

(2.2) Apabila $a \equiv b \pmod{m}$ maka $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ . Diketahui pula $c \equiv d \pmod{m}$ . Dengan cara analog akan diperoleh $b + c \equiv b + d$

( mod m ).

Sehingga dengan mengaplikasikan sifat transitif dari kongruensi maka jika $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ $\wedge$ $b + c \equiv b + d \pmod{m}$ maka $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ .

contoh :

$7 \equiv 3 \pmod{4}$ dari ( 2.1) maka $7 + 3 \equiv 3 + 3 \pmod{4}$ . Jadi $10 \equiv 6 \pmod{4}$ .

Sementara itu $21 \equiv 1 \pmod{4}$ . Dari sifat tambahan kongruensi maka $7 + 21 \equiv 3 + 1 \pmod{4}$

c. Sifat Perkalian Kongruensi Apabila $a \equiv b \pmod{m}$ maka $ac \equiv bc \pmod{m}$ .................(2.3)

untuk membuktikan sifat perkalian kongruensi :

Apabila $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka $ac \equiv b\,d \pmod{m}$ ................(2.4)

Sebelum membuktikan diperlihatkan terlebih dahulu contoh berikut .

Apabila $31 \equiv 10 \pmod{7}$ maka dari sifat (2.3) diperoleh $31 \times 5 \equiv 10 \times 5 \pmod{7}$ , menjadi $155 \equiv 50 \pmod{7}$ . Dari sifat (2.4) maka $31 \times 155 \equiv 10 \times 50 \pmod{7}$ , sehingga $4805 \equiv 500 \pmod{7}$ .

Bukti :

(2.3) $a \equiv b \pmod{m}$ maka $a - b$ adalah kelipatan dari m . Maka dari itu $( a - b ) . c$ adalah kelipatan dari m juga . Padahal $( a - b ) .c = ac - bc$ , maka $ac - bc$ juga merupakan kelipatan dari m .Sehingga $ac \equiv bc$ ( mod m ).

(2.4) Dari sifat (2.3) , apabila $a \equiv b$ ( mod m ) maka $ac \equiv bc$ ( mod m ) .

Dengan cara analog , apabila $c \equiv d$ ( mod m ) maka $bc \equiv bd$ ( mod m ) . Karena kongruensi bersifat transitif sehingga jika $ac \equiv bc$ ( mod m ) $\wedge$ $bc \equiv bd$ ( mod m ) maka $ac \equiv bd$ ( mod m )

### 2.1.2 Merubah integer radix

**Teorema 2.1 :**

Pandang $N = N_1N_2...N_r$ , dimana $N_1,N_2,...,N_r$ adalah bilangan bulat , kemudian diberikan $a_i$ , $0 \le a_i < N_i$ , maka ada ketunggalan a sedemikian hingga $0 \le a < N$

dan

$a_1 = a \bmod N_1$

$a_2 = (a-a_1)/N_1 \bmod N_2$ ....(2.5)

$a_k = (a - a_1 - a_2N_1 - ... - a_{k-1}N_1 N_2 ... N_{k-2})$ / $(N_1 N_2 ... N_{k-1}) \bmod N_k$ , $k = 2,3,...,r$ .

dimana a dapat ditentukan oleh :

$a = a_rN_1N_2 ... N_{r-1} + a_{r-1}N_1N_2 ... N_{r-2} + ... + a_2N_1 + a_1$

.............(2.6)

**Bukti :**

Andaikan $\alpha$ dan $\beta$ adalah dua solusi yang berbeda , maka $\alpha \equiv \beta$ ( modulo $N_i$ ) untuk $1 \le i \le r$ . Sama dengan $|a - b| = k_i\ N_i$ , untuk semua $k_i$ dan $|a - b|$ $= k_1\ N_1 = k_2\ N_2 = \ldots = k_r\ N_r$ .....(2.7)

Sehingga dari persamaan (2.7) , $k_1$ berisi $N_2$ dan juga $N_3$ , $N_4$ , ... $N_r$ , $k_2$ berisi $N_1$ dan $N_3, N_4, \ldots, N_r$ , maka persamaan (2.7) akan menjadi :

$|a - b| = k_0 N_1 N_2 \ldots N_r$ ....................(2.8)

dimana $k_0$ adalah bilangan bulat .

Tetapi persamaan (2.8) menunjukan bhwa $a$ dan $b$ tidak dalam interval [O,N) . Asumsi ini kontradiksi dengan solusi pada [O,N). Sehingga pengandaian diingkar menjadi $a$ dan $b$ merupakan dua solusi yang sama .

Dengan Menghitung persamaan (2.6) mod $N_i$ yaitu :

- $a_1 = a \bmod N_1$
- $a = a_r N_1 N_2 \ldots N_{r-1} + a_{r-1} N_1 N_2 \ldots N_{r-2} + \ldots + a_2 N_1 + a_1$

  $a_2 = (a - a_1)/N_1 - (a_r N_2 \ldots N_{r-1} + a_{r-1} N_2 \ldots N_{r-2} + \quad + a_3 N_2)$

  $a_2 = (a - a_1)/N_1 \bmod N_2$

  ⋮
- $a = a_r N_1 N_2 \ldots N_{r-1} + a_{r-1} N_1 N_2 \ldots N_{r-2} + \ldots + a_2 N_1 + a_1$

  $a_r = a - (a_{r-1} N_1 N_2 \ldots N_{r-2} + \ldots + a_2 N_1 + a_1)/N_1 N_2 \ldots N_{r-1}$

  $a_r = (a - a_1 - a_2 N_1 - \ldots - a_{r-1} N_1\ N_2 \ldots N_{r-2})/$

  $(N_1\ N_2\ \ldots\ N_{r-1}) \bmod N_r$

Jadi akan menghasilkan persamaan (2.5), sehingga dapat ditemukan semua kondisi dari teorema dan ketunggalan dari pada integer a.

## 2.2 M A T R I K S

### 2.2.1 Pengertian

**Definisi 2.5**

Matriks adalah himpunan bilangan-bilangan baik itu bilangan riil atau bilangan kompleks yang disusun secara khusus yakni dalam bentuk baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang .

Setiap bilangan dalam matriks tersebut disebut unsur atau elemen dari matriks , sedang batasnya biasanya diberikan dengan :

$$\left[\quad\right] \quad \text{atau} \quad \left(\quad\right) \quad \text{atau} \quad \left\|\quad\right\|$$

Notasi untuk matrik biasanya dinyatakan dengan huruf besar , sedang elemennya dinyatakan dengan huruf kecil. Secara lengkap ditulis dengan :

$A = (a_{ij})$ berarti bahwa matrik $A$ mempunyai elemen-elemen $a_{ij}$ , dimana index $i$ menyatakan baris ke-$i$ dan index $j$ menyatakan kolom ke-$j$ .Bila $A$ adalah matriks yang mempunyai $m$ baris dan $n$ kolom maka matrik $A$ itu ditulis sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris ke 1} \\ \longrightarrow \text{baris ke 2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \longrightarrow \text{baris ke m} \end{array}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad . \quad . \quad \downarrow$

kolom 1   Kolom 2   kolom ke m

atau $A = (a_{ij})$ , dimana $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots n$.
Boleh juga ditulis dengan $A_{(mxn)} = (a_{ij})$.
$(m \times n)$ disebut ukuran ( ordo ) dari matriks .
Dua buah matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dikatakan sama , ditulis $A = B$ , jika ukuran dari kedua matriks itu sama $(m \times n)$ dan berlaku $(a_{ij}) = (b_{ij})$ untuk setiap i dan j ( $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots n$) .

### 2.2.2 Beberapa Jenis Matriks berdasarkan susunan elemennya

1. Matriks Bujur Sangkar

adalah matriks yang banyaknya baris dan kolom sama
contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -9 & 11 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Diagonal

adalah matriks bujur sangkar yang semua elemennya berharga nol kecuali elemen-elemen diagonal utamanya.
Jadi suatu matriks $A_{(mxn)}$ ,dimana $m = n$ adalah matriks diagonal apabila elemen-elemen $a_{ij}$, untuk $i = j$ tidak sama dengan nol , sedang elemen-elemen $a_{ij}$ , untuk $i \neq j$ berharga nol .
Barisan elemen $a_{11}$, $a_{22}$, ...... $a_{nn}$ disebut *Diagonal*

*Utama* dari matriks tersebut . Sedangkan

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ , disebut *Trace* dari matrik tersebut .

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

**3. Matriks nol ( Null Matrix )**

adalah matriks yang semua elemen-elemennya berharga nol .

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**4. Matriks Satuan (Unit Matrix , Identiy Matrix)**

adalah matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utamanya berharga satu .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**5. Vektor Baris**

adalah matriks yang terdiri atas satu baris saja contoh :

$$P = \left[ p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots, p_n \right]$$

6. Vektor Kolom

adalah matriks yang terdiri atas satu kolom saja

contoh :

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{bmatrix}$$

### 2.2.3 OPERASI PERKALIAN MATRIKS

Pada perkalian matriks A dan B yang ditulis AB , matriks A disebut matriks pertama dan B disebut matriks kedua . Di dalam perkalian matriks diperlukan persyaratan yaitu banyaknya kolom matriks pertama harus sama dengan banyaknya baris matriks kedua .

**Definisi 2.6**

Pandang $A = ( a_{ij} )$ dan $B = ( b_{ij} )$ dimana matriks A mempunyai jumlah kolom yang sama dengan jumlah baris matriks B, katakan matriks A berordo m x p dan matriks B berordo p x n . Maka hasil perkalian AB adalah suatu matriks $C = ( c_{ij} )$ yang berordo m x n , dengan elemen ke- ij -nya diperoleh dengan mengalikan baris ke-i dari matriks A dengan kolom ke-j dari matriks B .

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1p} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots\cdots \quad a_{ip}} & & \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots b_{1n} \\ \cdot \cdots & \cdot & \cdots \cdot \\ b_{p1} \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & \cdot & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & \cdot & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana :

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots\cdots + a_{ip}\, b_{pj}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} a_{il}\, b_{lj}$$

Ditekankan disini bahwa hasil perkalian matriks AB tidak terdefinisi apabila matriks A berordo m x p dan matriks B berordo q x n dimana $p \neq q$ . Hukum-hukum yang berlaku pada perkalian matriks jika A, B, C adalah matriks - matriks yang memenuhi syarat-syarat yang diperlukan :

a. (AB)C = A(BC) $\longrightarrow$ *Assosiatif*

b. AB $\neq$ BA $\longrightarrow$ *Tidak Komutatif*

c. A(B + C) = AB + AC $\longrightarrow$ *Distribusi kiri*

d. (B + C)A = BA + CA $\longrightarrow$ *Distribusi kanan*

e. $\alpha$ (AB) = ($\alpha$A) B = A ($\alpha$B) *,dimana $\alpha$ skalar*

f. AB = AC belum tentu B = C

## 2.3 SISTEM BILANGAN BINER

### 2.3.1 Sistem Bilangan

Peraturan umum untuk menggambarkan bilangan pada sistem bilangan berbasis 10 dengan menggunakan notasi posisi sebagai berikut :

$$a_{r-1}10^{r-1} + a_{r-2}10^{r-2} + \ldots\ldots + a_o \quad \ldots\ldots(2.9)$$

yang dilukiskan sebagai bilangan $a_{r-1}\ a_{r-2}\ldots a_o$ dimana r adalah jumlah bilangan dari sebelah kiri dari bilangan desimal tersebut .

Basis atau radix dari sistem bilangan didefinisikan sebagai bilangan dengan digit berbeda yang dapat terjadi pada tiap-tiap posisi pada sistem bilangan . Sistem bilangan desimal mempunyai basis atau radix 10 mempunyai arti bahwa sistem ini mempunyai 10 digit yang berbeda ( 0,1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9 ) yang boleh digunakan pada tiap-tiap posisi pada bilangan .

Sistem bilangan biner mempunyai basis 2, sehingga sistem ini mempunyai 2 digit yang berbeda yaitu 0 dan 1 Notasi posisi yang digunakan pada sistem bilangan biner sama typenya dengan sistem bilangan desimal .

Tabel 2.2 Dua Puluh Bilangan Biner pertama

| DESIMAL | BINER | DESIMAL | BINER |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 11 | 1011 |
| 2 | 10 | 12 | 1100 |
| 3 | 11 | 13 | 1101 |
| 4 | 100 | 14 | 1110 |
| 5 | 101 | 15 | 1111 |
| 6 | 110 | 16 | 10000 |
| 7 | 111 | 17 | 10001 |
| 8 | 1000 | 18 | 10010 |
| 9 | 1001 | 19 | 10011 |
| 10 | 1010 | 20 | 10100 |

Meskipun notasi posisi sama digunakan , pada sistem bilangan desimal menggunakan pangkat dari 10 , tetapi pada sistem bilangan biner menggunakan pangkat dari 2 .

Sebagai contoh :

Bilangan 2222 pada sistem bilangan desimal mempunyai arti :

$$2 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

tetapi kalau ( 2222 $)_2$ pada sistem bilangan biner adalah sama dengan 100010101110 yang mempunyai arti :

$$1 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 0 \times 2^{9} + 0 \times 2^{8} + 1 \times 2^{7} +$$
$$0 \times 2^{6} + 1 \times 2^{5} + 0 \times 2^{4} + 1 \times 2^{3} + 1 \times 2^{2} +$$
$$1 \times 2^{1} + 0 \times 2^{0}$$

Untuk menggambarkan suatu bilangan pada sistem bilangan biner dengan mengunakan notasi posisi sebagai berikut :

$$a_{r-1}2^{r-1} + a_{r-2}2^{r-2} + \ldots\ldots + a_0 \quad \ldots\ldots.(2.10)$$

yang dilukiskan sebagai bilangan $a_{r-1}\ a_{r-2}\ldots a_0$ dimana r adalah jumlah bilangan dari sebelah kiri dari bilangan biner tersebut dan harga $a_i$ hanya 1 atau 0 .

Berikut ini contoh yang menunjukkan konversi dari bilangan biner ke bilangan desimal

$$1001 = 1 \times 2^{4-1} + 0 \times 2^{4-2} + 0 \times 2^{4-3} + 1 \times 2^{4-4}$$
$$= 1 \times 2^{3} + 0 \times 2^{2} + 0 \times 2^{1} + 0 \times 2^{0}$$

$= 8 + 0 + 0 + 1$

$= 9$

### 2.3.2 Konversi Bilangan Desimal ke Bilangan Biner

Ada beberapa metode untuk mengkonversi bilangan desimal ke bilangan biner yaitu :

1. Dengan mengurangkan semua pangkat dari 2 yang dapat dikurangkan pada bilangan yang dikonversi sehingga sudah tidak terdapat sisa . Pangkat dari 2 yang tertinggi dikurangkan terdahulu , kemudian sisanya dikurangi lagi dengan pangkat dari 2 yang tertinggi yang kedua dan diulangi terus hingga tidak terdapat sisa pada pengurangan tersebut .Sebagai contoh untuk mengkonversi bilangan desimal 11 menjadi bilangan biner adalah sebagai berikut :
   - 11 dikurangi pangkat dari 2 yang tertinggi, yang dapat dikurangkan pada 11 hingga ditemukan sisanya .
     $11 - 2^3 = 3$ dimana $2^3$ adalah pangkat dari 2 yang tertinggi pertama .
   - Kemudian sisanya yaitu 3 dikurangi lagi dengan pangkat dari 2 yang tertinggi, yang dalam hal ini adalah $2^1$. Sehingga $3 - 2^1 = 1$.
   - Sisanya adalah 1 . Dikurangi lagi dengan pangkat dari 2 tertinggi yaitu $1 - 2^0 = 0$ . Hingga sudah tidak diperoleh sisa .Sehingga akan diperoleh bilangan biner 1011 .

Untuk mengecek $= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 8 + 0 + 2 + 1 = 11$

2. Membagi bilangan yang dikonversi dengan dua akan menghasilkan hasil bagi ( quotient ) dan sisa ( remainder ), kemudian membagi hasil bagi dengan 2 lagi . Begitu seterusnya hingga hasil bagi terakhir adalah 0 . Sisa tiap-tiap pembagian digunakan sebagai indikasi membentuk koefisien bilangan biner . Dan bilangan biner itu diperoleh dengan menyusun sisa tiap pembagian dari yang terakhir .

Contoh :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | : | 2 | = | 8 | + sisa | 1 | |
| 8 | : | 2 | = | 4 | + sisa | 0 | |
| 4 | : | 2 | = | 2 | + sisa | 0 | BIT BINER |
| 2 | : | 2 | = | 1 | + sisa | 0 | |
| 1 | : | 2 | = | 0 | + sisa | 1 | |

sehingga bilangan biner 17 ditulis 10001 .

Pada metode ini tidak bisa untuk bilangan desimal campuran . Namun untuk menangani bilangan tersebut dapat digunakan metode keduanya .Bilangan campuran tersebut dipecah menjadi bilangan bulat dan pecahan . Untuk yang bulat menggunakan metode 2 . Sedangkan untuk yang pecahan menggunakan metode 1.

Sebagai contoh :

Untuk mengkonversi bilangan desimal 11,875 ke bilangan biner , pertama-tama bilangan campuran itu dipecah menjadi 11 dan 0,875 .

Bilangan desimal 11 menjadi 1011 ( contoh metode 1 ) dan 0,875 menjadi 0,111 yaitu dari :

$$0{,}875 - 1 \times 2^{-1} = 0{,}875 - 0{,}5 = 0{,}375$$
$$0{,}375 - 1 \times 2^{-2} = 0{,}375 - 0{,}25 = 0{,}125$$
$$0{,}125 - 1 \times 2^{-3} = 0{,}125 - 0{,}125 = 0$$

Jadi bilangan biner dari 11,875 adalah 1011,111 .

### 2.3.3 Pembalikan bit ( *Bit Reversal* )

Barisan dalam order natural dapat dirubah ke order terbalik sebagai berikut :

Untuk integer yang digambarkan dalam notasi biner , membalik bentuk biner dan mentransformasikan ke notasi desimal disebut notasi bit terbalik . Sebagai contoh, jika integer digambarkan dengan r - bit bilangan biner,

$$(a)_{10} = (a_{r-1}2^{r-1} + a_{r-2}2^{r-2} + \ldots + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0)$$
$$= (a_{r-1}\ a_{r-2}\ \ldots\ a_2\ a_1 a_0)_2 \qquad \ldots.(2.11)$$

dimana $a_\ell = 0$ atau 1 , $\ell = 0, 1, \ldots, r - 1$ , kemudian membalik bit dari a didefinisikan dengan ( membalik bit dari a $)_{10}$

$$= (a_0 2^{r-1} + a_1 2^{r-2} + a_2 2^{r-3} + \ldots + a_{r-2}2^1 + a_{r-1}2^0)$$

$$= (a_0\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{r-2}\ a_{r-1})_2 \qquad \ldots\ldots(2.12)$$

Misalkan a = 6 = $(110)_2$ maka membalik bit dari a adalah $(011)_2 = 3$

## 2.4 Transformasi Fourier Diskret

### 2.4.1 Pengertian

Diberikan barisan data masukan, katakan saja x(k), dimana k = 0,1,2,...,N−1 , untuk mendefinisikan sebuah transformasi partikular ortogonal yang mengambil barisan x(k) pada barisan lain yang sama panjang sebut saja X(n) yang menggambarkan struktur frekuensi dari x(k) . Transformasi ini disebut Transformasi Fourier Diskret .

**Definisi 2.7**

Ambil x(k) , k = 0,1,2,.....,N−1 yang merupakan barisan bilangan kompleks sebanyak N .

Transformasi Fourier Diskret ( TFD ) atau *Discrete Fourier Transform* dari barisan x(k) didefinisikan sebagai :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, W_N^{kn} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.13)$$

dimana n = 0,1,2,..,N−1 dan $W_N = e^{-j2\pi/N}$ = faktor putaran , serta $j = \sqrt{-1}$

Sedangkan harga x(k) dapat diperoleh dari barisan transformasi X(n) sebagai :

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)\, W_N^{-kn} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.14)$$

dimana k = 0,1,2,..,N−1 .

yang sering disebut Invers Transformasi Fourier Diskret

(ITFD) atau *Invers Discrete Fourier Transform*

Persamaan (2.13) dan persamaan (2.14) dinamakan *Pasangan Transformasi Fourier Diskret* .

2.4.2 Kesimetrisan dan Keperiodikan dari Faktor Putaran

Tinjau kembali definisi 2.7 . Notasi $W_N^{kn}$ = $e^{-j2\pi kn/N}$ disebut faktor putaran ( *Twiddle Faktor* ) . Faktor putaran tersebut mempunyai sifat-sifat :

a. $W_N^{\alpha} = -W_N^{\alpha+N/2}$ ( *Sifat Simetris* )

b. $W_N^{\alpha} = W_N^{\alpha+N}$ ( *Sifat Periodik* )

**Bukti :**

a. Sifat Simetris

$$W_N^{\alpha+N/2} = W_N^{\alpha} \; W_N^{N/2}$$

$$= W_N^{\alpha} \; e^{-j2\pi(N/2)/N}$$

$$= W_N^{\alpha} \; e^{-j\pi}$$

$$W_N^{\alpha+N/2} = W_N^{\alpha} \left[ \cos \pi - j \sin \pi \right]$$

$$= W_N^{\alpha} \; [ -1 - 0 ] = - W_N^{\alpha} \quad .........(2.15)$$

Mengalikan kedua ruas persamaan (2.15) dengan -1 akan menghasilkan :

$$W_N^{\alpha} = - W_N^{\alpha+N/2}$$

b. Sifat Periodik

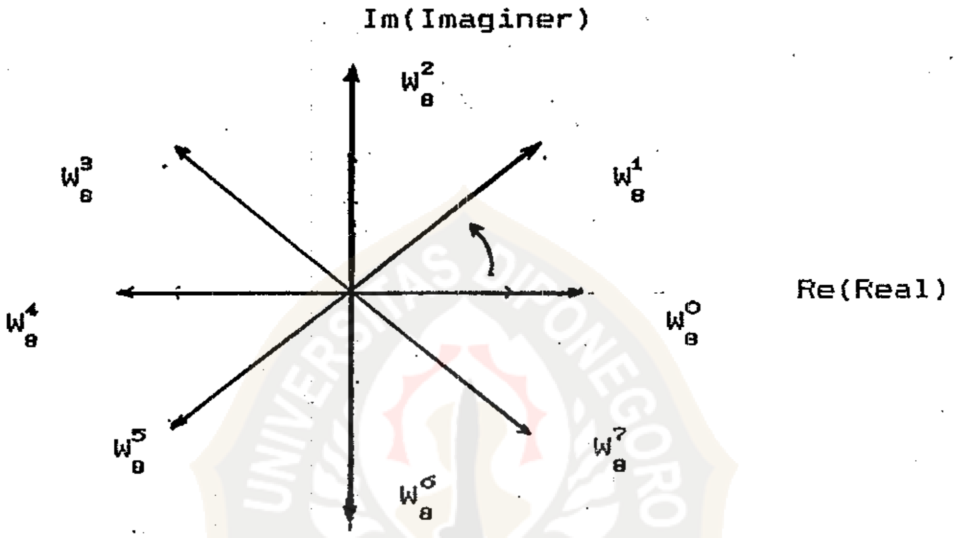
$$W_N^{\alpha+N} = W_N^{\alpha} \; W_N^{N}$$

$$W_N^{\alpha+N} = W_N^{\alpha} \; e^{-j2\pi N/N}$$

$$= W_N^{\alpha} \; e^{-j2\pi}$$

$$= W_N^{\alpha} \left[ \cos 2\pi - j \sin 2\pi \right]$$

$$= W_N^{\alpha} \; [ 1 - 0 ] = W_N^{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.16)$$




**Gambar 2.1 Sifat Simetris dan Periodik dari Faktor Putaran , untuk N = 8**

Selanjutnya sifat keperiodikan faktor putaran dapat dinyatakan dengan memodulo eksponen dari W dengan N , karena $W_N^{\alpha+N} = W_N^{(\alpha+N) \text{ Mod } N} = W_N^{\alpha}$ , untuk $\alpha < N$ .

Hubungan dari sifat-sifat ini digunakan untuk penurunan Transformasi Fourier Cepat dengan Formulasi Cooley Tukey .

### 2.4.3 Memilih Jumlah Data Masukan dari TFD

Perhitungan numerik dari spektrum frekuensi suatu bentuk gelombang waktu x(t) sangatlah penting dari segi praktisnya . Apabila Transformasi Fourier dapat dihitung secara numerik dengan efisien, maka metode perhitungan ini bermanfaat dalam analisa sistem .

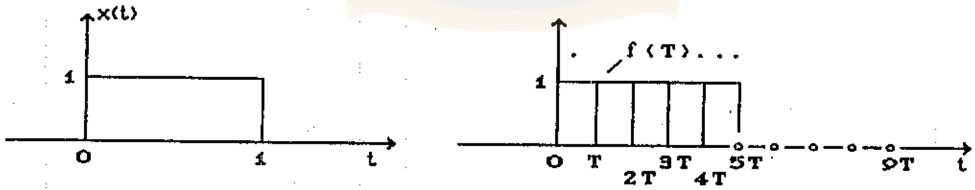
Suatu fungsi yang kontinue biasanya adalah infinit dan biasanya berupa variabel waktu . Maka dari itu pada perhitungan numerik atau analisa data biasanya mempergunakan suatu fungsi dengan variabel diskrit yang finit .

Barisan Transformasi Fourier Diskrit (TFD) dinyatakan dengan X(n) dapat digunakan untuk mengevaluasi Transformasi Fourier $X(j\omega)$ pada komputer .

Sebagai contoh yang memberikan gambaran penggunaan TFD dalam perhitungan numerik dari integral Fourier .

Pandang perhitungan spektrum dari fungsi pulsa :

$$x(t) = \begin{cases} 1 , & \text{untuk } 0 < t < 1 \\ 0 , & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$




Gambar 2.2 Gambar Fungsi Pulsa dan versi tercupliknya

Maka Transformasi Fourier dari x(t) adalah :

$$X(j\omega) = \int_0^1 1.\ e^{-j\omega t}\, dt = \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_0^1 = \frac{e^{-j\omega t} - 1}{-j\omega}$$

$$= \frac{1 - e^{-j\omega t}}{j\omega} = \frac{1}{\omega/2} \quad \frac{e^{-j\omega t}(e^{-j\omega t} - e^{-j\omega t})}{2j}$$

$$X(j\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega/2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.17)$$

Didalam perhitungan TFD yaitu untuk mendekati Transformasi Fourier , harus dinyatakan nilai x(t) sebagai barisan dari nilai-nilai cuplikannya .

Andaikan dipilih spasi T = 0,2 dan N = 10 yang nilai cuplikannya 5 diantaranya berada pada pulsa dan 5 berikutnya sama dengan nol seperti pada gambar 2.2, maka spasi frekuensinya adalah $\Omega = \frac{2\pi}{10 . 0,2} = \pi$ rad .

Hampiran ini dapat dipandang sebagai deretan sejumlah persegi empat, dengan luas tiap cuplikan adalah x(kT).T Sehingga didekati sebagai :

$$x(t) \approx \left.\begin{array}{ll} x(0) , & \text{untuk } 0 \le t < T \\ x(1) , & \text{untuk } T \le t < 2T \\ x(2) , & \text{untuk } 2T \le t < 3T \\ x(3) , & \text{untuk } 3T \le t < 4T \\ x(4) , & \text{untuk } 4T \le t < 5T \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots.(2.18)$$

Kemudian tiap persegi empat digantikan dengan fungsi impuls yang sama luasnya sebagai :

$$x_p(t) = \sum_{k=0}^{4} T\ x(kT)\delta(t-kT) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.19)$$

dan fungsi spektrumnya yang berkaitan yaitu :

$$\hat{X}j\omega) = \mathcal{F}\left\{ T \sum_{k=0}^{4} x(kT)\delta(t-kT) \right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.20)$$

Dengan menggunakan sifat pergeseran waktu maka transformasi dari impuls tergeser $\delta(t-kT)$ diberikan oleh $\delta(t-kT) \longleftrightarrow e^{-j\omega kT}$ ,maka persamaan (2.20) menjadi :

$$\hat{X}j\omega) = T \sum_{k=0}^{4} x(kT)\ e^{-j\omega kT}$$

Apabila $\hat{X}(j\omega)$ dinyatakan sebagai sekumpulan cuplikan frekuensi dengan spasi antar cuplikan sebesar $\Omega = \frac{2\pi}{NT}$ maka akan diperoleh :

$$\hat{X}(jn\Omega) = T \sum_{k=0}^{4} x(kT)\, e^{-jkn\eta T}$$

$$\hat{X}(n) = T \;.\; \text{TFD}\,\{x(k)\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(2.21)$$

dimana telah menyingkat $\hat{X}(jn\Omega) = \hat{X}(n)$ .

Untuk n = 0,1,......,9, maka akan diperoleh ω buah spektrum tercuplik dengan nilai-nilai frekuensi ω =0,π, 2π,...,9π rad/detik

Sekarang akan diambil untuk n = 1 , untuk yang lain adalah analog.

$$X(1) = \frac{1}{T}\,\hat{X}(1) = \sum_{k=0}^{9} x(0,2k)\, e^{-j2k\pi/10} = \sum_{k=0}^{4} x(0,2k)\, e^{-jk\pi/5}$$

$$= \Big[\, 1,0 + (0,8090169944 - j0,5877852523) + (0,3090169944 - j0,9510565163\,) + (-0,3090169944 - j0,9510565163) + (-0,8090169944 - j0,5877852523)$$

$$= 1.0 - j3,0776835737$$

Sehingga $|X(1)| =$ 3,236067978 , sedangkan pendekatan untuk $X(j\omega\,)$ pada ω = π rad/det adalah :

$$|X(1)|\,.T = 3,236067978 \;.\; 0.2 = 0,6472135956$$

Sedang nilai sebenarnya dari pers(2.23) yaitu :

$$|X(j\omega)|\Big|_{\omega=\pi} = \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} \approx 0,6366197724$$

Jadi Prosentase kesalahan pendekatan TFD terhadap besar spektrum adalah :

$$\frac{0,6472135956 - 0,6366197724}{0,6366197724} \times 100\ \% = 1,664073841\ \%$$

$\approx 1{,}66\ \%$

Ketelitiannya 100 % − 1,66 % = 98,34 %

Ketelitian dari TFD dalam mendekati Transformasi Fourier dapat ditingkatkan dengan mengurangi T dan menambah N . Misalkan dilipat-setengahkan T = 0,1 dan melipat - duakan N = 20 , yang dalam hal ini spasi frekuensinya tidak berubah karena NT = 2 .

Maka perhitungan pendekatan spektrum pada $\pi$ rad/det atau untuk harga n = 1 dapat dihitung secara analog.

$$X(1) = \frac{1}{T}\hat{X}(1) = \sum_{k=}^{19} x(0{,}1k)e^{-j2k\pi/20} = \sum_{k=0}^{9} x(0{,}1k)e^{-jk\pi/10}$$

$$= 1{,}0 - j\ 6{,}313751515$$

Sehingga $|X(1)| = 6{,}392453222$ , sedangkan pendekatan bagi $\hat{X}(j\omega)$ pada $\omega = \pi$ rad/det adalah :

$$|X(1)|\ .T = 6{,}392453222\ .\ 0.1 = 0{,}6392453222$$

Jadi Prosentase kesalahan pendekatan TFD terhadap besar spektrum adalah :

$$\frac{0{,}6392453222 - 0{,}6366197724}{0{,}6366197724} \times 100\ \% = 0{,}4124203903\ \%\ .$$

$$\approx 0{,}41\ \%$$

Ketelitiannya 100 % − 0,41 % = 99,59 %

Terlihat bahwa kesalahan telah diperkecil atau dipertinggi ketelitiannya .

Sekarang apabila tetap tidak merubah spasi frekuensi yaitu tetap NT = 2, tetapi N = 1000 ( 100 kali dari N sampel ) dan T = 0,002 ( seperseratus dari T semula ) maka akan diperoleh dengan perhitungan analog :

$$X(1) = \frac{1}{T}\ \hat{X}(1) = \sum_{k=0}^{1000} x(0{,}002k)\ e^{-j2k\pi/1000}$$

$$= \sum_{k=0}^{499} x(0{,}002k)e^{-jk\pi/500}$$

$$= 0{,}999999968 + j\ 318{,}3088389$$

sehingga $|\ X(1)\ |$ = 318,3104097 , sedangkan pendekatan bagi $X(j\omega)$ pada $\omega = \pi$ rad/det adalah :

$|\ X(1)\ | \cdot T = 318{,}3104097 \cdot 0{,}002 = 0{,}6366208194$

Jadi Prosentase kesalahan pendekatan TFD terhadap besar spektrum adalah :

$$\frac{0{,}6366208194 - 0{,}6366197724}{0{,}6366197724} \times 100\ \% = 1{,}6446708.10^{-4}\%$$

$$\approx 1{,}644 \cdot 10^{-4}\ \%$$

Ketelitiannya $100\ \% - 1{,}644 \cdot 10^{-4}\ \% \approx 100\ \%$

Nampak bahwa kesalahan harga kecil sekali .

Sekarang ditentukan seberapa baik $\hat{X}(jn\Omega)$ mendekati spektrum cuplikan sebenarnya $X(j\omega) = X(jn\Omega)$ sebagai fungsi dari T,spasi antara cuplikan waktu dan N adalah jumlah cuplikan total.

Apabila $T = \frac{1}{M}$, M = jumlah cuplikan interval $[0,1]$ maka taksiran dari spektrum tercuplik adalah :

$$\hat{X}(jn\Omega) = T \cdot \sum_{k=0}^{M-1} W_N^{kn} \quad , \text{ dimana } W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} W_N^{kn} = \frac{1}{M}\ \frac{1 - W^{Mn}}{1 - W^{n}}$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \frac{W^{nM/2}}{W^{n/2}} \cdot \frac{W^{-nM/2} - W^{nM/2}}{W^{-n/2} - W^{n/2}}$$

$$= \frac{1}{M}\ e^{-j(2\pi/N)(nM/2-n/2)} \frac{\sin\ (2\pi/N.\ nM/2)}{\sin\ (2\pi/N.\ n/2)}$$

$$= \frac{e^{-jn\pi M/N} \ \sin ((2\pi/N.nM/2)/(n\pi M/N))}{e^{-jn\pi/N} \ \sin ((2\pi/N.n/2)/(n\pi/N))}$$

$$\hat{X}(jn\Omega) = X(jn\Omega) \left[X(jn\Omega T)\right]^{-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.22)$$

Sehingga dapat dihitung seberapa baik $\hat{X}(jn\Omega)$ mendekati spektrum $X(jn\Omega)$ untuk contoh ini .

Untuk N yang besar akan diperoleh $n\Omega T = n\pi/N \approx 0$ . Ini akan berakibat $X(jn\Omega T) = 1$ sehingga $\hat{X}(jn\Omega) = X(jn\Omega)$ .

Dari masalah diatas dapat ditarik kesimpulan bahwa makin besar pencuplikan atau data masukan atau harga N, pendekatan TFD terhadap Transformasi Fourier akan mempunyai ketelitian yang tinggi .