3.1. MATRIK

Definisi 3.1. :

Matrik adalah himpunan skalar yang disusun secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom). Skalar-skalar itu disebut elemen matrik. Untuk batasnya diberikan :

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \text{atau} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \text{atau} \begin{Vmatrix} \quad \end{Vmatrix}$$

Matrik $A = (a_{ij})$ artinya suatu matrik A yang elemen-elemennya a_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen tersebut. Untuk i = 1,2, ..., m dan j=1,2,...,n berarti banyaknya baris = m serta banyaknya kolom = n.

contoh :

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris } 1 \\ \longrightarrow \text{baris } 2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \text{Kolom} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \end{array}$$

3.1.1. BEBERAPA JENIS MATRIK

Definisi 3.2. :

Matrik diagonal ialah suatu matrik dimana semua

dan paling tidak satu elemen pada diagonal pokok $\neq 0$.

Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 3.3 :

Matrik $A = (a_{ij})$; $i,j = 1,2, \ldots n$ disebut matrik simetrik bila $a_{ij} = a_{ji}$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32}$$

Definisi 3.4 :

Transpose dari suatu matrik $A = (a_{ij})$ ialah suatu matrik baru yang mana elemen-elemennya diperoleh dari elemen-elemen matrik A dengan syarat bahwa baris-baris dan kolom-kolom matrik menjadi kolom-kolom dan baris-baris dari matrik baru itu, dengan perkataan lain baris ke-i dari matrik A menjadi kolom ke-i dari matrik baru.

A'.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3

3.1.2. OPERASI - OPERASI MATRIK

*. <u>Penjumlahan</u> <u>matrik</u> :

Kalau matrik $A = (a_{ij})$, dengan m baris dan n kolom dan $B = (b_{ij})$ dengan m baris dan n kolom, dijumlahkan (dikurangkan) maka diperoleh matrik ke tiga, yaitu matrik $C = (c_{ij})$ dengan m baris dan n kolom dimana elemen-elemennya diperoleh dengan menjumlahkan (mengurangkan) elemen-elemen matrik A dengan elemen-elemen matrik B yaitu $c_{ij}=a_{ij} \pm b_{ij}$, untuk semua i dan j, dimana c_{ij} merupakan elemen dari baris ke-i dan kolom ke-j.

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = C$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = C$$

* <u>Perkalian Matrik</u> :

Apabila $a_{mxn} = (a_{ij})$ yaitu matrik dengan m baris dan n kolom, $B_{nxp} = (b_{ij})$ matrik dengan n baris dan p kolom, kemudian perkalian matrik A x B = A.B = AB (tanpa tanda hasil kali), dimaksudkan

baris dan p kolom, dimana elemen C dari baris ke-i kolom ke-j diperoleh dengan rumus :

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\, b_{tj} \qquad \text{dimana } i = 1,2, \ldots m \quad j = 1,2, \ldots p$$

Contoh :

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} & a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} \\ a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} & a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} \\ a_{31}\, b_{11} + a_{32}\, b_{21} & a_{31}\, b_{13} + a_{32}\, b_{22} \end{bmatrix}$$

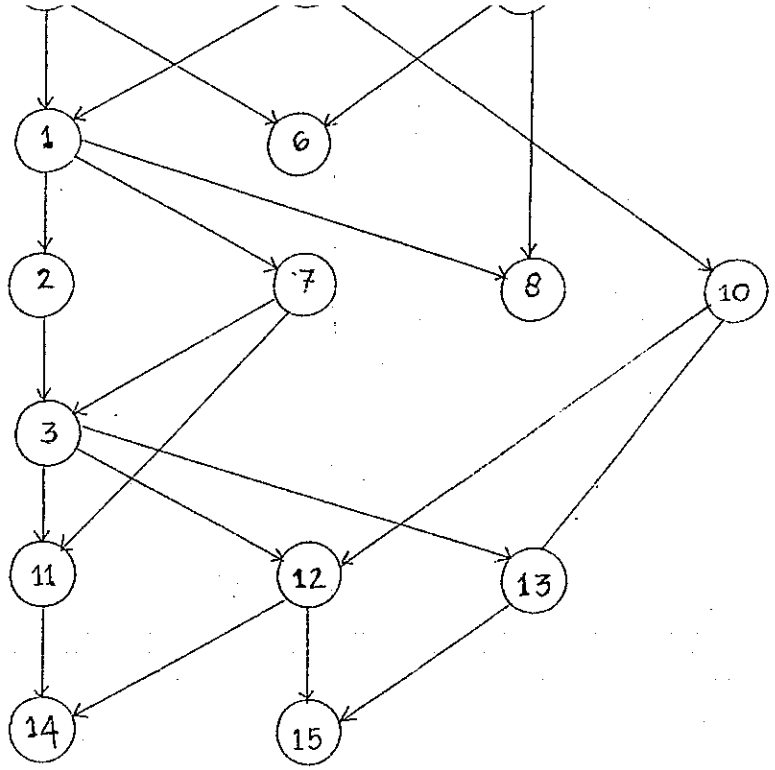
3.2. MATRIK RELASI DARI GRAPH BERARAH

Definisi 3.5 :

Matrik relasi dari suatu graph berarah adalah matrik 0-1 yang baris-baris dan kolomnya berhubungan dengan setiap simpul dari graph berarah. Elemen ke (i,j) dari matrik relasi R adalah :

$$\begin{cases} 1 & \text{, jika simpul } P_i \text{ dapat dicapai dari } P_j \text{ dengan satu langkah.} \\ 0 & \text{, jika keadaan lainnya.} \end{cases}$$

Untuk graph berarah dibawah ini :



Gambar 3-1

mempunyai matrik relasi atau matrik R sebagai berikut :

$$R = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

simpul P_2 dapat dicapai dari P_1 dengan satu langkah.

Operasi-operasi matrik yang telah dijabarkan di atas berlaku pula untuk matrik relasi dari graph berarah.

Dalam teori graph, kemampuan untuk mencapai suatu simpul dengan n langkah didapat dari pangkat ke-n dari matrik R. Elemen ke (i,j) dari matrik R^n menyatakan jumlah path untuk mencapai simpul P_i dari P_j dengan sejumlah n langkah.

Sebagai contoh :

Matrik R^2 dari graph berarah pada gambar 3-1 sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Elemen ke (4,2) menyatakan terdapat dua path dari P_4 ke P_2 dengan dua langkah, yaitu :

adalah matrik RR′ dimana R′ adalah transpose dari matrik R. Matrik RR′ ini menunjukkan kemampuan untuk mencapai suatu simpul dengan satu langkah mundur dan satu langkah maju sepanjang arah busur dari suatu graph berarah.

Elemen ke (i,j) dari RR′ menyatakan jumlah path dari simpul P_i ke simpul P_j dengan satu langkah mundur dan satu langkah maju.

Sebagai contoh:

Matrik RR′ untuk graph berarah pada gambar 3-1 diatas adalah :

$$RR' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemen ke (7,8) dari matrik RR′ diatas adalah 2_1 mempunyai arti :

Dari simpul P_7 ke simpul P_8 dengan satu langkah mundur dan satu langkah maju, terdapat dua lintasan,

$$P_7 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_8$$

$$P_7 \longrightarrow P_9 \longrightarrow P_8$$

Sehingga secara umum matrik R^m $(R')^n$ atau matrik ${}_mR_n$ mengandung informasi tentang kemmpuan untuk mencapai suatu simpul dengan m langkah mundur dan n langkah maju.