2.1. GRAPH

2.1.1. BEBERAPA PENGERTIAN DAN ISTILAH DALAM GRAPH

Di bawah ini akan dikemukakan beberapa pengertian dan istilah dalam teori graph serta sifat yang diperlukan.

Himpunan simpul dari G, notasi V(G) ialah suatu himpunan tak kosong dan berhingga dari unsur-unsur yang disebut simpul dengan notasi V_i, i = 1,2,3, ... n

Himpunan garis dari G, notasi E(G) ialah himpunan berhingga dari pasangan tak terurut dari elemen-elemen V(G) yang berbeda yang disebut garis dengan notasi (V_i, V_j) atau e_k dimana i,j,k mrupakan bilangan asli.

Famili garis dari G, notasi F(G) ialah famili berhingga dari pasangan tak terurut dan tak perlu berbeda dari elemen-elemen V(G).

Definisi 2.1.

Graph didefinisikan sebagai pasangan (V(G),F(G))

Definisi 2.2.

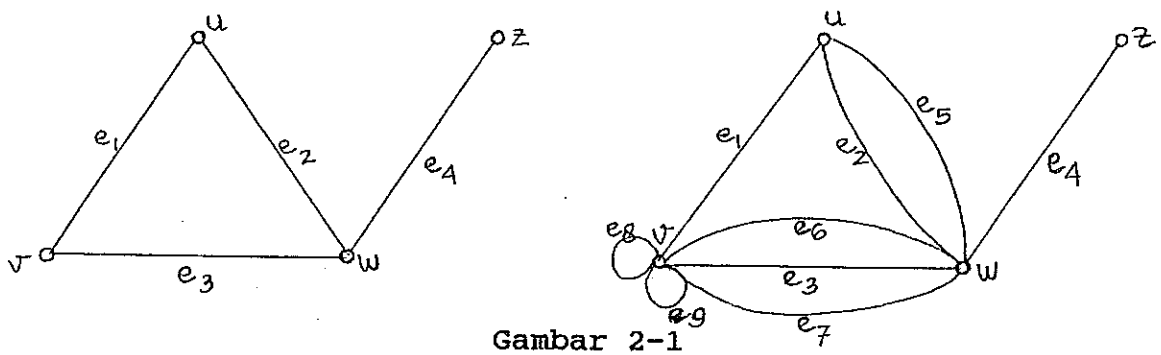
Graph sederhana didefinisikan sebagai pasangan (V(G),E(G)).

Definisi 2.3.

Subgraph dari suatu graph G didefinisikan sebagai pasangan $(V(G'),E(G'))$ dimana $V(G') \subseteq V(G)$ dan $R(G') \subseteq E(G)$ atau $F(G') \subseteq F(G)$

Sebagai ilustrasi, pandang dua graph dibawah ini :

G_1: G_2:



Gambar 2-1

$V(G_1) = \{u,v,w,z\}$

$V(G_2) = \{u,v,w,z\}$

$F(G_1) = \{(u,v),(v,w),(u,w),(w,z)\}=\{e1,e3,e2,e4\}$

$F(G_2) = \{(u,v),(v,v),(u,u),(V,w),(v,w),(u,w)m(u,w),(w,z)\}$

$= \{e_1,e_8,e_9,e_6,e_3,e_7,e_2,e_5,e_4\}$

Sesuai degan definisi diatas maka G_1 merupakan graph sederhana yang sekaligus juga merupakan subgraph dari graph G_2.

Pada G_2 terdapat sebah garis yang berawal dan berakhir di v yang dinamakan loop di v, serta garis jamak e_2, e_5 yang menghubungkan u dan w. Untuk garis e_3 di kedua graph menghubungkan v dan w, maka kedua simpul ini disebut adjacent, sedangkan garis e_3

simpul-simpul dan garis dengan kondisi yang sama pada graph secara umum. Kemudian dapat disimpulkan bahwa : pada graph dapat terjadi garis jamak dan loop, sedangkan pada graph sederhana tidak akan terjadi.

Derajat suatu simpul v pada graph G adalah jumlah garis-garis yang insiden ke v, dan ditulis $\rho(v)$. Pada perhitungan derajat suatu simpul v, kita akan membuat perjanjian bahwa suatu loop di v menyumbang atau memberi nilai dua (lebih dari satu) untuk derajat dari v.

Sembarang simpul dengan derajat nol dikatakan simpul yang terisolasi dan suatu simpul dengan derajat satu adalah simpul akhir. Pada gambar 2.1. kita lihat G_2 mempunyai satu simpul akhir, satu simpul dengan derajat tiga, satu simpul dengan derajat enam dan satu simpul dengan derajat delapan.

Selanjutnya dalam suatu graph dapat kita bentuk suatu barisan garis berhingga, dengan notasi V_0V_1, V_1V_2,... Vm-1Vm atau $V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \ldots V_{m-1} \longrightarrow V_m$ dengan sifat bahwa simpul akhir suatu garis merupakan simpul awal dari garis berikutnya, kecuali simpul pemula (V_0) dan simpul akhir (V_m). Barisan garis yang berhingga ini disebut **walk** dalam graph G. Berdasarkan konsep suatu walk, akan kita definisikan trail dan path.

Trail adalah suatu walk yang semua garis-garis-nya berbeda

Definisi 2.5.

Path adalah trail dengan simpul-simpul yang berbeda, kecuali mungkin simpul awal dan simpul akhirnya.

Baik trail maupun path disebut trail atau path tertutup jika simpul awal sama dengan simpul akhirnya. ($V_o = V_m$)

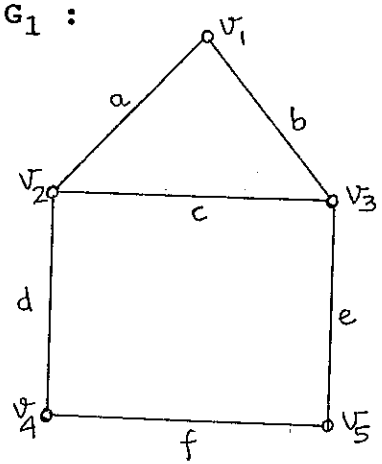
Path tertutup yang mengandung minimal satu garis disebut **sirkuit**. Perhatikan kembali G_2 pada gambar 2.1. Suatu contoh trail di G_2 adalah : $v \longrightarrow v \longrightarrow w \longrightarrow u \longrightarrow v \longrightarrow w \longrightarrow z$, suatu path di G_2 : $v \longrightarrow u \longrightarrow w \longrightarrow z$, kemudian sirkuit di G_2 : $u \longrightarrow v \longrightarrow w \longrightarrow u$, $v \longrightarrow w \longrightarrow v$ dan $u \longrightarrow w \longrightarrow u$.

Penggabungan dua buah graph $G_1 = (V1, F1)$ dan $G_2=(V_2,F_2)$ adalah graph G_3 (ditulis sebagai $G_3 = G_1 \cup G_2$) yang mana himpunan simpul $V_3 = V_1 \cup V_2$ dan famili garis $F_3 = F_1 \cup F_2$.

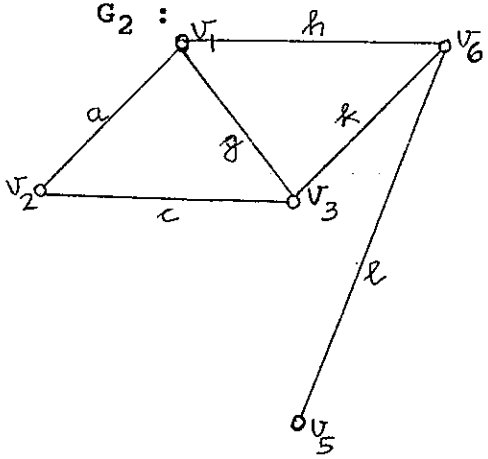
Demikian pula interseksi (perpotongan) $G_1 \cap G_2$ dari graph G_1 dan G_2 adalah graph G_4 yang hanya terdiri dari simpul-simpul dan garis-garis yang berada baik di G_1 dan G_2.

Sebagai contoh :

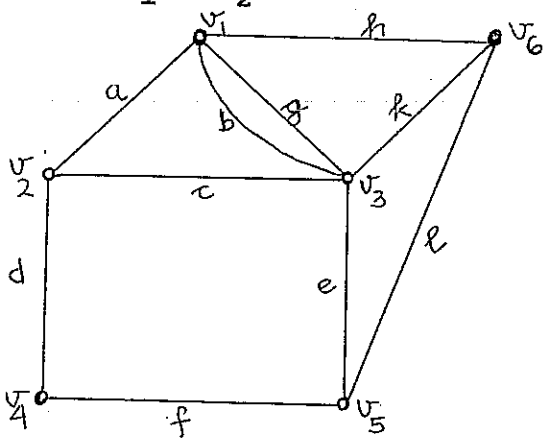
G_1 :



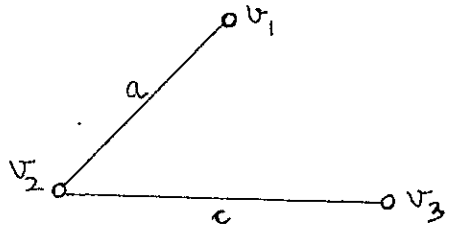
G_2 :



untuk $G_1 \cup G_2$:



dan $G_1 \cap G_2$:

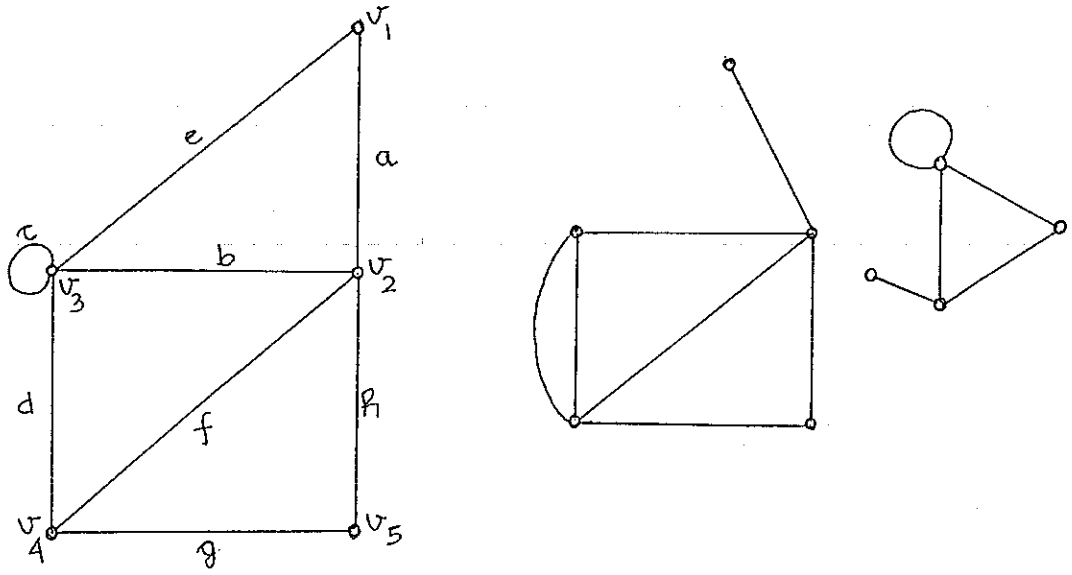


Gambar 2-2

2.1.2. BEBERAPA TEOREMA DAN LEMMA DALAM GRAPH

Suatu graph G dikatakan terhubung jika terdapat paling sedikit satu path di antara setiap pasangan simpul-simpul dalam graph G. Jika tidak demikian, maka G tak terhubung.

Sebagai contoh, perhatikan dua graph di bawah ini :



(a) (b)

Gambar 2-3

Graph pada gambar 2-3 (a) merupakan graph terhubung, tetapi yang (b) tak terhubung. Terlihat bahwa suatu graph yang tak terhubung terdiri dari dua atau lebih graph terhubung. Masing-masing dari sub-graph itu dinamakan suatu komponen. Pada gambar 2-3

Teorema 2.1.

Graph G tak terhubung jika dan hanya jika himpunan simpul-simpul V(G) dapat dipartisi ke dalam dua himpunan tak kosong saling lepas yaitu V_1 (G) dan V_2 (G) sehingga tidak ada garis dalam G yang satu ujungnya berada di V_1 (G) dan yang lain dalam V_2 (G).

Bukti :

<=== Misalkan terdapat suatu partisi V(G) = $V_1(G) \cup V_2(G)$ dan $V_1(G) \cap V2(G) = \phi$. Ambil dua simpul sembarang a dan b di G sedemikian a ϵ $V_1(G)$ dan b ϵ $V_2(G)$. Maka tidak ada path yang menghubungkan a dan b. Sebab jika ada, maka terdapat paling sedikit satu path yang satu ujungnya di $V_1(G)$ dan yang lainnya di $V_2(G)$. Karena itu, jika suatu partisi ada maka G tak terhubung.

===> Sebaliknya, misalkan G graph tak terhubung, ambil a dalam G. Misalnya V_1 (G) himpunan dari semua simpul dimana terdapat suatu path yang menghubungkan masing-masing simpul tersebut dengan a. Karena G tak terhubung maka $V_1(G)$ tidak memuat semua simpul dari G. Sisa-sisa simpul membentuk himpunan tak kosong sebut $V_2(G)$. Ini menun-

dihubungkan ke sembarang simpul dalam $V_2(G)$ oleh suatu path. Sehingga terjadi partisi. Dari sini diambil kesimpulan bahwa jika G tak terhubung maka ada partisi pada V(G).

Dengan pembuktian di atas jika graph G tak terhubung maka G diekspresikan sebagai gabungan dari graph-graph terhubung dan masing-masing disebut komponen terhubung atau komponen saja.

Pandang suatu graph G dengan N simpul dan banyak garis n_e dan $\rho(V_i)$ derajat simpul V_i

Lemma 2.1. (Lemma Jabat Tangan) :

Jumlah derajat semua simpul di graph G adalah sama dengan dua kali jumlah garis. Dengan kata lain :

$$\sum_{Vi \in V(G)} \rho(v_i) = 2.\ n_e$$

Bukti :

Ambil sembarang garis e di G, e menghubungkan dua simpul sembarang v_i dan v_j di G (garis e insiden di kedua simpul tersebut). Maka garis e memberikan nilai satu untuk derajat v_i dan juga nilai satu untuk derajat v_j jika v_i sama dengan v_j, garis e

... pada kalimat 4, memberikan nilai derajat dua untuk $v_i = v_j$. Karena e garis sembarang, maka hal di atas juga berlaku untuk garis-garis yang lain, beserta simpul-simpul yang insiden padanya di G. Jadi jumlah derajat dari semua simpul-simpul di G adalah dua kali banyak garis dalam graph G.

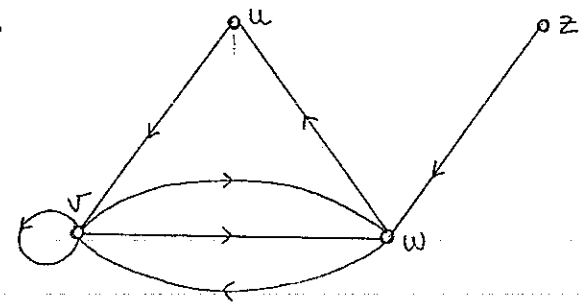
2.2. GRAPH BERARAH

Definisi 2.6

Graph berarah D didefinisikan sebagai pasangan (V(D),A(D)). Dengan V(D) adalah suatu himpunan tak kosong yang berhingga dari elemen-elemen yang disebut simpul dan A(D) adalah suatu famili berhingga pasangan terurut dari elemen-elemen V(D) yang disebut busur.

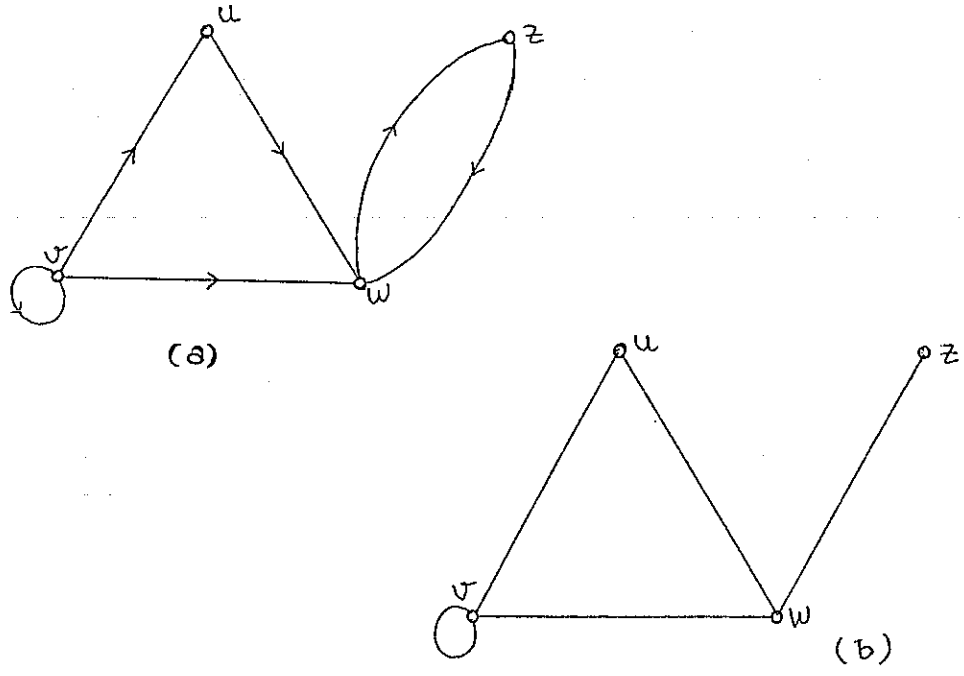
Suatu busur dari V ke W ditulis VW. Dua busur dari bentuk VW dan WV berbeda.

Gambar 2.4. menggambarkan suatu graph berarah D yang busur-busurnya adalah UV, VV, VW, WV, WU dan ZW. Urutan dari simpul-simpul dari suatu busur dinyatakan oleh arah panah.



Graph dasar (underlying graph) dari D adalah suatu graph yang diperoleh dari D dengan menghilangkan arah panah-arah panah, yaitu dengan mengganti setiap busur dari bentuk vw dengan garis yang bersesuaian vw.

Sebagai contoh, gambar 2-5 (b) menggambarkan graph dasar dari graph berarah pada gambar 2-5 (a).



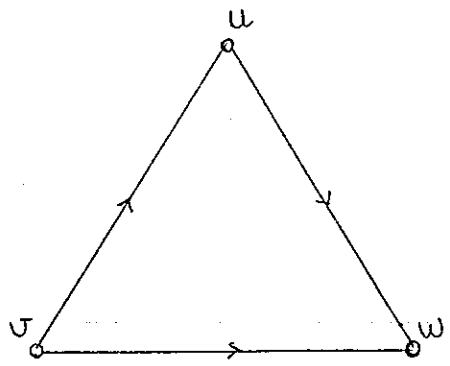
Gambar 2-5

Definisi 2.8 :

D dikatakan graph berarah sederhana jika semua busur dari D berbeda dan tidak terdapat loop (busur dengan bentuk vv)

Subgraph berarah dari D adalah suatu graph berarah yang semua simpulnya merupakan anggota dari V((D) dan semua busurnya anggota dari A(D).

Sebagai contoh gambar di bawah ini merupakan subgraph berarah dari graph pada gambar 2-5 (a).

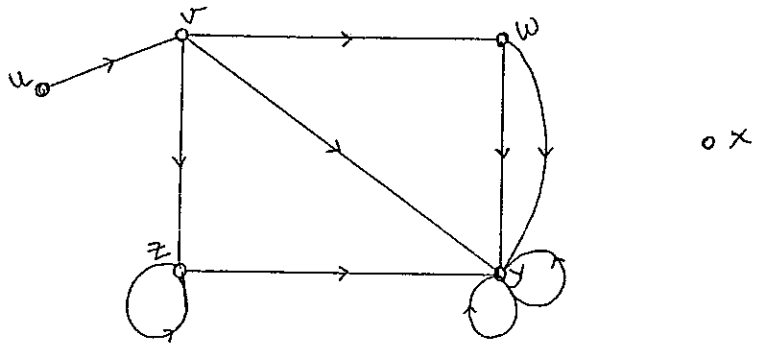


Gambar 2-6

v dan w simpul dari suatu graph berarah dikatakan adjacent jika v dan w dihubungkan oleh sebuah busur e. Jika busur e ditarik dari v ke w maka busur e dikatakan insiden dari v dan insiden ke w.

Dalam suatu graph berarah, derajat luar (out-degree) dari simpul v adalah jumlah busur yang insiden dari v, dan dikatakan dengan outdeg v. Sedangkan derajat masuk (in degree) dari v adalah

mempunyai in-degree dan out-degree sebagai berikut :



Gambar 2-7.

Outdeg u=1, out deg v=3, outdeg w=2

Outdeg x=o, out deg y=2, outdeg z=2

Indeg u=0, indeg v=1, indeg w=1

Indeg x=0, indeg y=6, indeg z=2

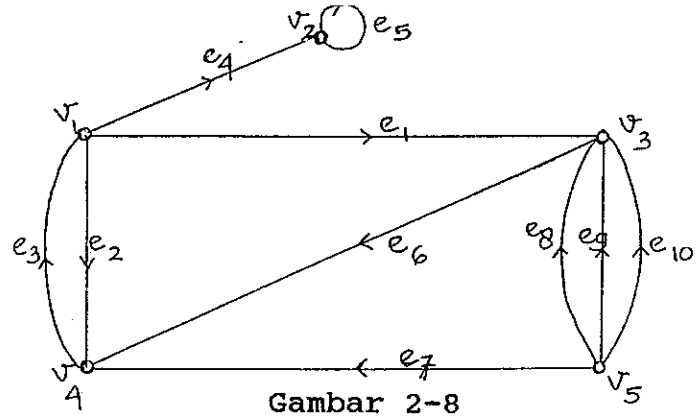
Jumlah derajat-keluar dari graph berarah di atas adalah 10. Dan jumlah derajat-masuk sama dengan 10. Sedangkan graph berarah di atas mempunyai 10 busur. Dengan kata lain, jumlah derajat-keluar dan jumlah derajat-masuk adalah sama dengan jumlah busur-nya. Ini mengarah pada lemma berikut ini, yang analog dengan lemma jabat-tangan.

Lemma : 2.2. (Handshaking Di lemma) :

Pada sembarang graph berarah, jumlah dera-jat - keluar dan jumlah derajat-masuk masing-masing sama dengan jumlah busurnya.

Ambil sembarang busur e di D, e menghubungkan dua simpul sembarang u dan v di D (e insiden dari u dan e insiden ke v atau sebaliknya). Maka busur e memberikan nilai satu untuk derajat-keluar u dan memberi nilai satu untuk derajat-masuk v. Jika u sama dengan v, busur e berupa loop di simpul u=v dan sesuai dengan perjanjian pada halaman 4, maka memberikan nilai dua dengan perincian satu untuk derajat ke luar u=v dan satu untuk derajat masuk u=v. Karena e busur sembarang, maka hal di atas juga berlaku untuk busur-busur yang lain, beserta simpul- simpul di D. Jadi jumlah derajat-keluar dan jumlah derajat-masuk masing- masing sama dengan jumlah busur dalam graph berarah D.

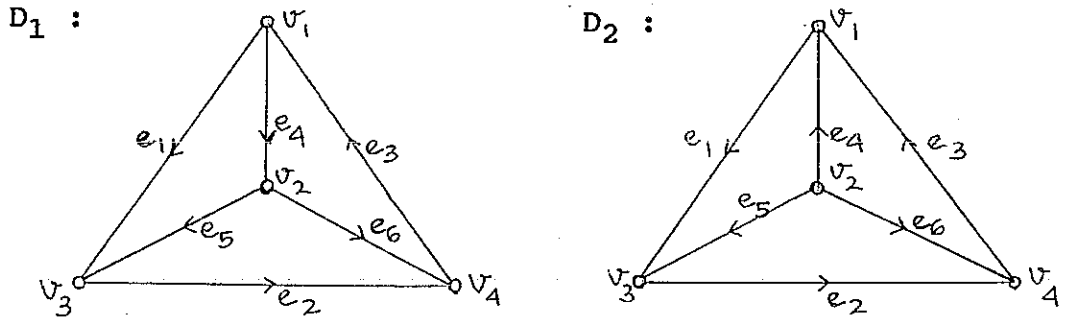
Dalam suatu graph berarah terdapat dua jenis path yang berbeda. Sebagai contoh, perhatikan gambar 2-8 dibawah ini. Barisan busur $v_5 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_1$ adalah suatu path berarah dari v_5 ke v_1, sedangkan barisan busur $v_5 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_1$ (meskipun merupakan suatu path pada graph dasar yang bersesuaian) tidak mempunyai arah yang tetap dari v_5 ke v_1. Untuk barisan busur yang pertama disebut path berarah dari v_5 ke v_1, sedangkan barisan busur yang ke dua disebut semi path.



Gambar 2-8

Sehubungan dengan terdapatnya dua jenis path yang berbeda dalam suatu graph berarah, maka terdapat pula dua jenis keterhubungan dalam graph berarah.

Suatu graph berarah D dikatakan terhubung dengan kuat (strongly connected) jika paling sedikitnya terdapat satu path berarah dari setiap simpul ke setiap simpul yang lain. Dan D dikatakan terhubung dengan lemah (weakly connected) jika graph dasar yang bersesuaian merupakan graph terhubung. Sebagai ilustrasi, pandang graph berarah di bawah ini :



Gambar 2-9

Pada gambar di atas, D_1 merupakan graph berarah yang terhubung dengan kuat, sedangkan D_2 merupakan graph bearah yang terhubung dengan lemah.

2.3. DASAR-DASAR GENETIKA.

Agar pokok permasalahan yang dihadapi dalam tulisan ini lebih jelas, maka perlu dibahas beberapa istilah dan pengertian dalam genetika.

Sebagaimana diketahui, makhluk hidup terdiri dari bagian-bagian kecil yang membentuknya yang dinamakan sel. Di dalam sel ini terdapat tiga bagian yang penting, yaitu: bagian luar (membran), bagian tengah (plasma) dan bagian dalam (inti sel) sebagai tempat beradanya kromosom.

Karena dalam sel tubuh kromosom terdapat dalam keadaan berpasang-pasangan, berarti terdiri atas dua set, maka disebut diploid. Sedang pada sel gamet tidak terdapat berpasangan-pasangan atau hanya terdapat satu set kromosom maka disebut haploid. Kadangkala dalam sel tubuh yang mengalami kelainan, misalnya karena kanker, jumlah kromosomnya lebih dari dua set, misalnya triploid, tetraploid dan selebihnya disebut polyploid.

Untuk mengembangkan dirinya, suatu orgnisme

* Mitosis : yaitu pembelahan satu sel menjadi dua sel baru dengan struktur sama dengan induknya.

  Fungsi pembelahan ini untuk pertumbuhan seluruh jaringan tubuh.

* Meiosis : yaitu pembelahan satu sel menjadi se-sel haploid. Pembelahan ini erat hubungannya dengan pembentukan sel kelamin atau gamet. Jadi pembelahan ini berfungsi untuk reproduksi.

Kromosom terdiri atas untaian butiran halus yang merupakan bahan sifat keturunan yang dapat diteruskan dari individu leluhur kepada keturunannya, dan dinamakan "gen". Gen-gen ini tersusun dalam urutan yang linier sepanjang kromosom-kromosom.

Setiap kali sebelum suatu sel membelah, masing-masing kromosom membuat duplikatnya dengan gen-gen yang sama dalam urutan yang sama. Maka bila terjadi dua sel anak, masing-masing akan menerima kromosom-kromosom dan gen-gen dari tipe dan jumlah yang sama.

Gen menempati tempat tertentu dalam kromosom yang disebut lokus. Gen-gen yang terletak pada lokus yang bersesuaian dari kromosom homolog yang mempunyai tugas yang sama disebut alela. Banyak gen

sebab sebab gen untuk golongan darah O mempunyai alel I^O dari gen I pada lokus tertentu dari koromosomnya.

Jika kita anggap gen golongan darah I, maka terdapat tiga kemungkinan sehubungan dengan dua alel I^O dan I^A. Jika dua alel dari lokus ini sama., yaitu I^OI^O dan I^AI^A maka disebut **homozygote.** Untuk I^OI^A disebut **heterozygote** jika alel-alelnya berbeda. Kita sebut I^AI^A dan I^OI^A sebagai dua genotip dan fenotipnya adalah golongan darah A. Untuk alel I^A dikatakan dominan terhadap alel I^O, dan sebaliknya I^O resesif terhadap I^A. Jika kedua alel tersebut sama kuat disebut kodominan.

2.3.1. UKURAN-UKURAN KINSHIP

Hubungannya kekeluargaan dari dua individu merupakan akibat dari kenyataan bahwa diantara leluhur-leluhur suatu individu, kita dapat menemukan satu atau lebih leluhur-leluhur dari individu yang lain atau individu yang lain itu sendiri.

Bagaimanapun rumitnya hubungan antara dua individu X dan Y tetapi implikasi genetik dari hubungan tersebut bisa sederhana. Hal ini disebabkan karena terdapat suatu kemungkinan bahwa pada beberapa

gen yang diturunkan dari satu generasi ke generasi berikutnya tanpa mengalami perubahan disebut **identik.** Informasi genetika bahwa individu X mempunyai hubungan kekeluargaan dengan individu Y terkandung dalam koefisien identitas.

Definisi 2.10

Koefisien identitas adalah probabilitas bahwa satu dari gen-gen X dan satu sari gen-gen homolog Y identik.

2.3.1.1. KOEFISIEN IDENTITAS DETAIL

Pada lokus autosomal dari individu X dan Y terdapat ge-gen, yaitu :

G_x diturunkan ke X oleh ayah

G_x^* diturunkan ke X oleh ibu.

G_y diturunkan ke Y oleh ayah

G_y^* diturunkan ke Y oleh ibu

Ke empat gen ini dapat identik atau tidak satu sama lain. Untuk relasi identik dilambangkan dengan tanda "≡". Relasi keidentikan ini bersifat transitive, sebagai conntoh :

atau

Jika $G_x \equiv G_x^*$ dan $G_x^* \equiv G_y$ maka

$G_x \equiv G_y$

Karena sifat transitive ini, terdapat lima belas kasus yang bisa terjadi dalam hal keidentikan gen-gen dari individu X dan individu Y yang disebut " Ke lima belas keadaan Identitas S", yaitu :

S_1 : $G_x \equiv G_x^* \equiv G_y \equiv G_y^*$

S_2 : $(G_x \equiv G_x^* \equiv G_y) \not\equiv G_y^*$

S_3 : $(G_x \equiv G_x^* \equiv G_y^*) \not\equiv G_y^*$

S_4 : $(G_x \equiv G_y \equiv G_x^*) \not\equiv G_x^*$

S_5 : $(G_y \equiv G_y^* \equiv G_x^*) \not\equiv G_x$

S_6 : $(G_x \equiv G_x^*) \not\equiv (G_y \equiv G_y^*)$

S_7 : $(G_x \equiv G_x^*) \not\equiv G_y \not\equiv G_y^*$

S_8 : $G_x \not\equiv G_x^* \not\equiv (G_y \equiv G_y^*)$

S_9 : $(G_x \equiv G_y) \not\equiv (G_x^* \equiv G_y^*)$

S_{10} : $(G_x \equiv G_y) \not\equiv G_x^* \not\equiv G_y^*$

S_{11} : $(G_x \not\equiv G_y) \not\equiv (G_x^* \equiv G_y^*)$

S_{12} : $(G_x \equiv G_y^*) \not\equiv G_x^* \equiv G_y^*$

S_{13} : $(G_x \equiv G_y^* \not\equiv G_y \equiv G_x^*$

S_{14} : $(G_x^* \equiv G_y) \not\equiv G_x \not\equiv G_y^*$

S_{15} : $G_x \not\equiv G_x^* \not\equiv G_y \not\equiv G_y^*$

Simbol-simbol dari ke lima belas keadaan identitas ini diberikan pada tabel 1, dimana titik-titik menunjukkan gen-gen dari ke dua individu dan untuk gen-gen yang identik dihubungkan oleh sebuah garis.

Bila silsilah keturunan dari dua individu X dan Y diketahui, ini memungkinkan untuk menentukan koefisien identitas detail (δ_i) dari X dan Y.

Definisi 2.11 :

Koefisien identitas detail (δ_i) adalah probabilitas terjadinya masing-masing keadaan identitas S_i.

Himpunan dari 15 koefisien tersebut memberikan suatu gambaran yang ringkas dari hubungan kekeluargaan dari X dan Y tanpa kehilangan informasi genetika. Setiap hubungan kekeluargaan ditunjukkan oleh nilai dari ke lima belas koefisien tersebut.

Sebagai contoh :

- Jika X dan Y tidak mempunyai leluhur bersama dan jika ayah dan ibu mereka tidak mempunyai hubungan saudara, maka $\delta_{15} = 1$ dan $\delta_i = 0$ untuk $i \neq 15$
- Jika X dan Y anak lahir kembar monozygote

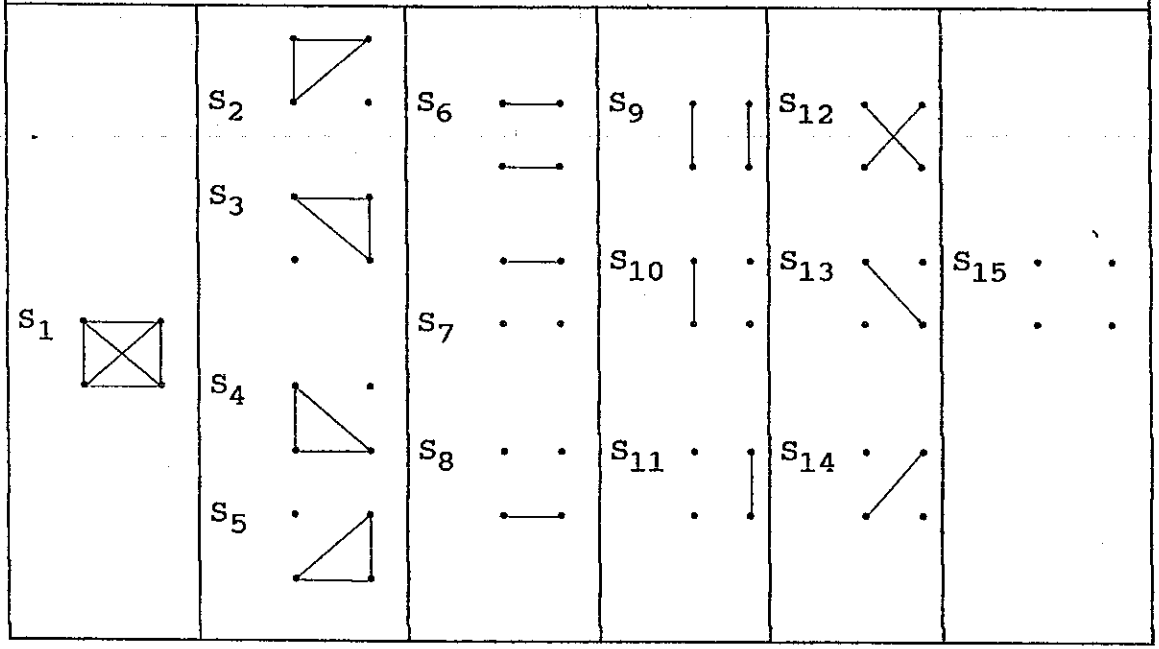
dengan gen dari sumber yang sama dari 1, merupakan suatu keadaan yang sesuai dengan keadaan S_9, maka $\delta_9=1$, dan δ_i untuk $i \neq 9$

Tabel 1

Keadaan Identitas Detail

Gen - gen yang identik dihubungkan oleh sebuah garis

Kedudukan dari ke empat gen :



2.3.1.2. KOEFISIEN IDENTITAS RINGKAS

Pada banyak kasus, asal usul suatu gen (dari pihak ayah atau dari pihak ibu) diabaikan, maka genotype $a_i a_j$ adalah sama, baik a_i berasal dari ayah, dan a_j berasal dari ibu ataupun sebaliknya.

Keadaan seperti S_{10}, S_{11}, S_{13} dan S_{14} yang telah dijelaskan diatas adalah ekuivalen dan ini memungkinkan untuk meringkasnya menjadi satu keadaan. Sehingga untuk menentukan hubungan kekeluargaan antara X dan Y hanya diperlukan sembilan keadaan yang disebut "keadaan identitas ringkas". Dengan kata lain keadaan identitas ringkas adalah keadaan identik dimana asal usul suatu gen diabaikan.

Untuk mendefinisikan ke sembilan keadaan identitas ringkas harus diperhatikan faktor-faktor berikut :

(1). Kedua gen dari X identik (dengan notasi C_x) atau tidak ($C_{\bar{x}}$).

(2). Kedua gen dari Y identik (dengan notasi C_y) atau tidak (dengan notasi $C_{\bar{y}}$)

(3). N menyatakan jumlah keidentikan antara gen X dan gen Y, yang mempunyai nilai 0,1,2 atau 4

Kesembilan keadan identitas ringkas tersebut adalah :

Z_1 : C_x, C_y, N = 4

Z_2 : C_x, C_y, N = 0

Z_4 : C_x, $C_{\bar{y}}$, N = 0

Z_5 : $C_{\bar{x}}$, C_y, N = 2

Z_6 : $C_{\bar{x}}$, C_y, N = 0

Z_7 : $C_{\bar{x}}$, $C_{\bar{y}}$, N = 2

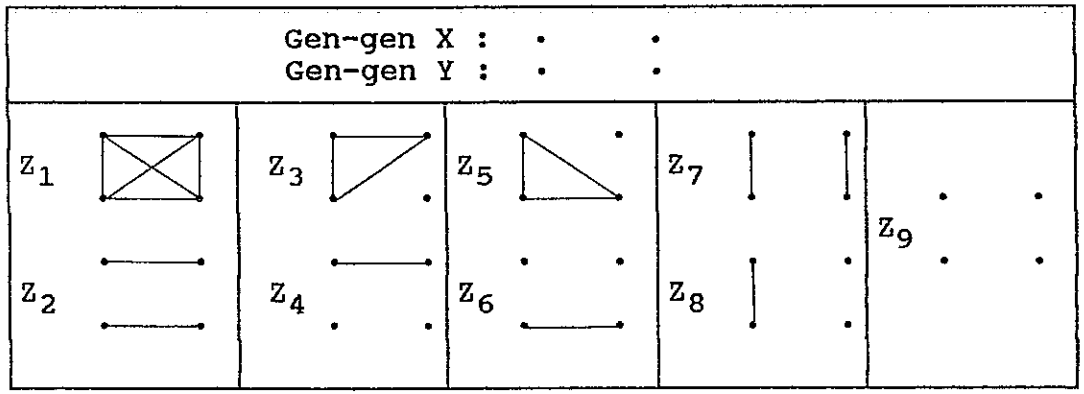
Z_8 : $C_{\bar{x}}$, $C_{\bar{y}}$, N = 1

Z_9 : $C_{\bar{x}}$, $C_{\bar{y}}$, N = 0

Masing-masing dari keadaan Z_i ekuivalen dengan satu atau lebih keadaan S_i, sebagai contoh: Z_8 ekuivalen dengan S_{10}, S_{11}, S_{13} dan S_{14}.

Tabel 2

Keadaan Identitas Ringkas



Bila silsilah keturunan dari dua individu X dan Y diketahui, maka dapat ditentukan koefisien identitas ringkas (Δ_i) dari X dan Y.

Definisi 2.12 :

Koefisien identitas ringkas (Δ_i) adalah probabilitas terjadinya masing-masing keadaan identi-

satu atau lebih keadaan S_i, maka koefisien identitas ringkas $\blacktriangle_i$ dan koefisien identitas detail δ_i mempunyai hubungan sebagai berikut :

$$\blacktriangle_1 = \delta_1 \qquad \blacktriangle_5 = \delta_4 + \delta_5$$
$$\blacktriangle_2 = \delta_6 \qquad \blacktriangle_6 = \delta_8$$
$$\blacktriangle_3 = \delta_2 + \delta_3 \qquad \blacktriangle_7 = \delta_9 + \delta_{12}$$
$$\blacktriangle_4 = \delta_7 \qquad \blacktriangle_8 = \delta_{10} + \delta_{11} + S_{13} + \delta_{14}$$
$$\blacktriangle_9 = \delta_{15}$$

..... (1)

Persamaan (1) diperoleh dari :

$\longrightarrow Z_1 = S_1$

dari definisi 2.7, probabilitas terjadinya keadaan ringkas Z_1 adalah $\blacktriangle_1$. Sedangkan probabilitas terjadinya keadaan identitas S_1 adalah δ_1. Dari dua definisi ini, kita dapatkan :

$$P(Z_1) = P(S_1)$$
$$\blacktriangle_1 = \delta_1$$

$\longrightarrow Z_2 = S_6$

$$P(Z_2) = P(S_6)$$
$$\blacktriangle_2 = \delta_6$$

$\longrightarrow \quad Z_3 = S_2 \text{ atau } S_3$

$$P(Z_3) = P(S_2 \text{ atau } S_3)$$
$$= P(S_2 \cup S_3)$$
$$= P(S_2) + P(S_3)$$
$$\blacktriangle_3 = \delta_2 + \delta_3$$

$\longrightarrow \quad Z_4 = S_7$

$$P(Z_4) = P(S_7)$$
$$\blacktriangle_4 = \delta_7$$

$\longrightarrow \quad Z_5 = S_4 \text{ atau } S_5$

$$P(Z_5) = P(S_4 \text{ atau } S_5)$$
$$= P(S_4 \cup S_5)$$
$$= P(S_4) + P(S_5)$$
$$\blacktriangle_5 = \delta_4 + \delta_5$$

$\longrightarrow \quad Z_6 = S_8$

$$P(Z_6) = P(S_8)$$
$$\blacktriangle_6 = \delta_8$$

$\longrightarrow \quad Z_7 = S_9 \text{ atau } S_{12}$

$$P(Z_7) = P(S_9 \text{ atau } S_{12})$$
$$= P(S_9 \cup S_{12})$$
$$= P(S_9) + P(S_{12})$$
$$\blacktriangle_7 = \delta_9 + \delta_{12}$$

$\longrightarrow \quad Z_8 = S_{10} \text{ atau } S_{11} \text{ atau } S_{13} \text{ atau } S_{14}$

$$P(Z_8) = P(S_{10} \text{ atau } S_{11} \text{ atau } S_{13} \text{ atau } S_{14})$$

$$= P(S_{10} + S_{11} + S_{13} + S_{14})$$

$$\Delta_8 = \delta_{10} + \delta_{11} + \delta_{13} + \delta_{14}$$

$$\longrightarrow \quad Z_9 = S_{15}$$

$$P(Z_9) = P(S_{15})$$

$$\Delta_9 = \delta_{15}$$

2.3.1.3. KOEFISIEN KINSHIP

Untuk beberapa kasus, genotype dari individu-individu diabaikan. Genotype dari individu-individu ini hanya berguna untuk mengetahui susunan genetik dari gamet-gametnya. Dalam kasus tertentu satu-satunya hasil dari hubungan kekeluargaan adalah kemungkinan keidentikan dari suatu gen dalam gamet dari X dan gen dalam gamet Y. Keadaan seperti Z_3, Z_5 dan Z_7 dikatakan ekuivalen. Dengan demikian, kita dapat menentukan hubungan kekeluargaan dari individu X dan Y dengan suatu koefisien yang disebut koefisien kinship.

Definisi 2.13 :

Koefisien kinship dari individu X dan Y, ϕ (XY) adalah probabilitas dimana sebuah gen yang diambil secara acak dari X akan identik dengan sebuah gen yang diambil secara acak dari Y pada

$$\phi\ (XY) = \delta_1 + \tfrac{1}{2}\ (\delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_9 + \delta_{12}) + \tfrac{1}{4}\ (\delta_{10} + \delta_{11}) + \delta_{13} + \delta_{14}\ )$$

$$\phi\ (XY) = \Delta_1 + \tfrac{1}{2}\ (\Delta_3 + \Delta_5 + \Delta_7) + \tfrac{1}{4}\ \Delta_8 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Persamaan (2) diperoleh dari :

Dari tabel 1 keadaan-keadaan identik S_i yang menunjukkan keidentikan antara gen-gen dari individu X dan gen-gen dari individu Y adalah : S_1 atau S_2 atau S_3 atau S_4 atau S_5 atau S_9 atau S_{12} atau S_{10} atau S_{11} atau S_{13} atau S_{14}.

Untuk keadaan identik S_1 terdapat 4 relasi keidentikan antara gen-gen dari individu X dan individu Y.

Sedangkan untuk keadaan identik S_2 atau S_3 atau S_4 atau S_5 atau S_9 atau S_{12} terdapat 2 relasi keidentikan.

Dan keadaan S_{10} atau S_{11} atau S_{13} atau S_{14} terdapat 1 relasi keidentikan.

Sehingga jika dinyatakan dalam perbandingan adalah :

$$4 : 2 : 1 \quad \text{atau} \quad 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4}$$

Dari definisi 2.8, koefisien kinship merupakan probabilitas terjadinya keidentikan dari sebuah gen yang diambil secara acak dari X dengan gen yang diambil acak dari Y pada lokus yang sama.

Dari penjabaran diatas didapat hubungan antara

koefisien kinship dengan koefisien-koefisien identitas sebagai berikut :

P (Sebuah gen dari individu X identik dengan sebuah gen dari Y) = P (S_1 atau ½ (S_2 atau S_3 atau S_4 atau S_5 atau S_9 atau S_{12}) atau ¼ (S_{10} atau S_{11} atau S_{14})).

$$\begin{aligned}
\phi\ (XY) &= P(S_1 \cup \tfrac{1}{2}\ (S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_9 \cup S_{12}) \\
&\quad \cup \tfrac{1}{4}\ (S_{10} \cup S_{11} \cup S_{13} \cup S_{14})) \\
&= P(S_1) + \tfrac{1}{2}\ P(S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_9 \cup S_{12}) \\
&\quad \cup \tfrac{1}{4}\ (S_{10} \cup S_{11} \cup S_{13} \cup S_{14}) \\
&= P(S_1) + \tfrac{1}{2}\ (P(S_2) + P(S_3) + P(S_4) + P(S_5) + \\
&\quad P(S_9) + P(S_{12}) + \tfrac{1}{4}\ (P(S_{10})) + P(S_{11}) + \\
&\quad P(S_{13}) + P(S_{14})) \\
&= \delta_1 + \tfrac{1}{2}\ (\delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_9 + \delta_{12}) + \\
&\quad \tfrac{1}{4}\ (\delta_{10} + \delta_{11} + \delta_{13} + \delta_{14})
\end{aligned}$$

—> dari hubungan antara Δ_1 dan δ_i pada persamaan (1) didapat :

$$\phi\ (XY) = \Delta_1 + \tfrac{1}{2}\ (\Delta_3 + \Delta_5 + \Delta_7) + \tfrac{1}{4}\Delta_8$$

Koefisien kinship ini sendiri dapat dihitung dari persamaan :

$$\phi\ (XY) = \sum_i (\tfrac{1}{2})^{n_i+m_i+1}\ (1 + f_i)$$

dengan :

- i merupakan leluhur bersama yang ke-i
- n_i menyatakan jumlah generasi antara X dan i
- m_i menyatakan jumlah generasi antara Y dan i
- f_i merupakan koefisien inbreeding dari leluhur

dimana perhitungan diperluas (Σ) untuk semua path yang berasal dari X ke Y melalui leluhur bersama yang ke-i.

2.3.1.4. KOEFISIEN INBREEDING

Inbreeding merupakan personal karakteristik dari suatu individu X, sebagai akibat dari kenyataan bahwa ibu dan ayah dari X mempunyai hubungan saudara

Definisi 2.14.

Koefisien inbreeding dari suatu individu X, f, adalah probabilitas bahwa dua gen X pada suatu lokus identik.

Dengan jelas menurut definisi ini, koefisien inbreeding dari suatu individu sama dengan koefisien kinship dari kedua orang tuanya. selanjutnya koefisien inbreeding f_X dan f_Y dihubungkan dengan koefisien identitas oleh hubungan :

$$f_X = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_6 + \delta_7$$
$$= \blacktriangle_1 + \blacktriangle_2 + \blacktriangle_3 + \blacktriangle_4$$

$$f_Y = \delta_1 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_8$$
$$= \blacktriangle_1 + \blacktriangle_2 + \blacktriangle_5 + \blacktriangle_6$$

Dari tabel 1, keadaan-keadaan identik S_i yang menunjukkan keidentikan antara gen-gen dari individu X adalah :

S_1 atau S_2 atau S_3 atau S_6 atau S_7

dan untuk individu Y adalah :

S_1 atau S_4 atau S_5 atau S_6 atu S_8

Dari definisi 2.9, kofisien inbreeding merupakan probabilitas dua gen dari suatu individu identik. Berdasarkan hal tersebut diperoleh hubungan antara koefisien inbreeding f dengan $\blacktriangle_i$ dan S_i :

P(dua gen dari individu X identik) = P(S_1 atau S_2 atau S_3 atau S_6 atau S_7)

$$
\begin{aligned}
fx &= P(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_6 \cup S_7) \\
&= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) + P(S_6) + P(S_7) \\
&= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_6 + \delta_7
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ dari hubungan antara $\blacktriangle_i$ dan δ_i pada persamaan (1), didapat :

$$fx = \blacktriangle_1 + \blacktriangle_2 + \blacktriangle_3 + \blacktriangle_4$$

P(dua gen dari individu Y identik) = P (S_1 atau S_4 atau S_5 atau S_6 atau S_8)

$= P(S_1) + P(S_4) + P(S_5) + P(S_6) + P(S_8)$

$= \delta_1 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_8$

—> dari hubungan antara Δ_i dan S_i pada persamaan (1), didapat :

$f_y = \Delta_1 + \Delta_2 \Delta_5 + \Delta_6$

Koefisien inbreeding ini sendiri dapat dihitung dari persamaan :

$$f = \sum_{i=1}^{r} [\ 2^{-n_i}\ (\ 1 + f_i)]$$

dengan :

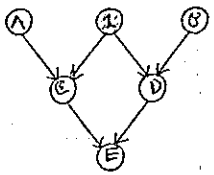
i merupakan leluhur bersama ke-i

n menyatakan jumlah individu dari path yang menghubungkan kedua gamet.

f_i menyatakan koefisien inbreeding dari leluhur bersama yang ke-i dalam path tersebut. Dan penjumlahan (Σ) untuk semua path yang berbeda yang tidak melewati suatu individu lebih dari sekali.

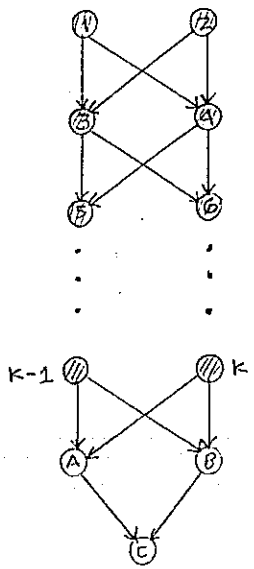
Berikut ini akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika bahwa persamaan diatas berlaku untuk sembarang r bilangan bulat positif:

i = 1



$$= (\tfrac{1}{2})^{n_1} (1 + f_1)$$

Diandaikan persamaan diatas benar untuk i = k.



$$f = \sum_{i=1}^{k} (\tfrac{1}{2})^{n_i} (1 + f_i)$$

$$= (\tfrac{1}{2})^{n_1} (1 + f_1) + (\tfrac{1}{2})^{n_2} (1 + f_2) + \ldots + (\tfrac{1}{2})^{n_k} (1 + f_k) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.1)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa persamaan diatas berlaku untuk i = k+1.

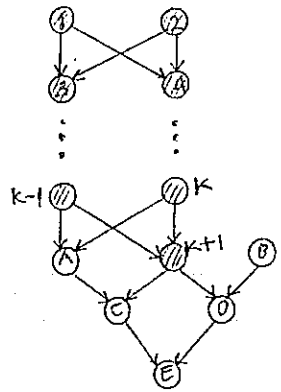
$$f = \sum_{i=1}^{k+1} (\tfrac{1}{2})^{n_i} (1 + f_i)$$

$$= \underbrace{(\tfrac{1}{2})^{n_1} (1 + f_1) + (\tfrac{1}{2})^{n_2} (1 + f_2) + \ldots + (\tfrac{1}{2})^{n_k} (1 + f_k)}_{\text{sama dengan (1.1)}} + (\tfrac{1}{2})^{n_{k+1}} (1+f_{k+1})$$

$$f = \sum_{i=1}^{k} (\tfrac{1}{2})^{ni} \; (1 + f_i) + \sum_{i=1}^{k+1} (\tfrac{1}{2})^{ni} \; (1 + f_i) -$$

$$\sum_{i=1}^{k} (\tfrac{1}{2})^{ni} \; (1 + f_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (\tfrac{1}{2})^{ni} \; (1 + f_i)$$



2.3.2. PERHITUNGAN KOEFISIEN INBREEDING DAN KOEFISIEN KINSHIP

Berikut ini diberikan suatu contoh perhitungan koefisien kinship dan koefisien inbreeding dengan menggunakan koefisien identitas ringkas, berdasarkan hubungan :

$$\phi\,(XY) = \Delta_1 + \tfrac{1}{2}(\Delta_3 + \Delta_5 + \Delta_7) + \tfrac{1}{4}\,\Delta_8$$

$$fx = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$$

$$fY = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_5 + \Delta_6$$

Contoh :

Individu A mempunyai genotip. Aa dan individu B mempunyai genotip Bb. Kedua individu A dan B

yaitu individu C dan D.

Akan dicari koefisien kinship dari individu C dan D dan koefisien inbreeding dari masing-masing individu C dan individu D.

P :	Aa	x	Bb
	A		B
	a		b
F_1 :	Ab		AB
	Ab	dan	Ab
	aB		aB
	ab		ab

Kemungkinan bentuk genotip dari individu C adalah AB, Ab, aB, dan ab. Demikian pula untuk individu D. Untuk genotip dari individu C berbentuk AB dan bentuk genotip dari individu D salah satu dari kemungkinan yang ada AB, Ab, aB, ab, maka keadaan identitas ringkas yang dapat dipenuhi adalah :

Z_7 untuk genotip individu C berbentuk AB dan genotip dari individu D berbentuk AB.

Z_8 untuk genotip dari individu C berbentuk AB dab genotip individu D berbentuk Ab.

Z_8 untuk genotip individu C berbentuk AB dan genotip individu D berbentuk aB.

Z_9 untuk genotip individu C berbentuk AB dn genotip individu D berbentuk ab.

perbandingan dari Z_7, Z_8, Z_9 sebagai berikut :

$$Z_7 : Z_8 : Z_9 = 1 : 2 : 1$$

sehingga didapat :

$$\Delta_7 = P(Z_7) = \tfrac{1}{4}$$

$$\Delta_8 = P(Z_8) = 2/4 = \tfrac{1}{2}$$

$$\Delta_9 = P(Z_9) = \tfrac{1}{4}$$

Hal ini berlaku juga untuk genotip individu C berbentuk Ab atau yang lainnya dan genotip individu D salah satu dari AB, Ab, aB, ab atau sebaliknya.

Sehingga didapat koefisien kinship dari individu C dan individu D sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\phi(CD) &= \Delta_1 + \tfrac{1}{2}(\Delta_3 + \Delta_5 + \Delta_7) + \tfrac{1}{4}\Delta_8 \\ &= 0 + \tfrac{1}{2}(0 + 0 + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{4}\end{aligned}$$

—> mempunyai arti bahwa bila sebuah gen diambil secara acak dari individu C daN sebuah gen dari individu D secara acak pula, maka probabilitas ke dua gen tersebut identik adalah $\tfrac{1}{4}$.

untuk harga koefisien inbreeding :

$$\begin{aligned}fC &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

—> mempunyai arti probabilitas kedua gen dari individu C pada lokus yang sama, identik adalah 0.

$$\begin{aligned}fD &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_5 + \Delta_6 \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

—> mempunyai arti probabilitas kedua gen dari individu D pada lokus yang sama, identik adalah 0.