BAB III

TEORI PERMAINAN META

3.1. STRUKTUR PERMAINAN META

Untuk menganalisa suatu permainan meta terlebih dahulu dibangun bentuk luas atau bentuk normalnya.
Bentuk luas sebuah permainan meta adalah sebagai berikut

Misalkan k adalah seorang pemain yang memilih strateginya setelah para pemain lain, dengan pengetahuan akan pilihan-pilihan para pemain lain. Bentuk luas permainan berupa pohon permainan dengan decision node pemain k muncul terakhir yaitu sebelum hasil akhir. Untuk setiap decision node k memiliki satu himpunan informasi. Permainan meta ini disebut k-permainan meta (gambar (3.1)).

CONTOH 3.1

PERMAINAN 2 ORANG

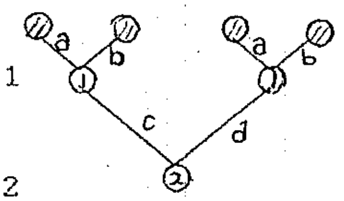
$X_1 = \{ a,b \}$ $X_2 = \{ c,d \}$

hasil

decision node 1

decision node 2

k = 1



gambar (3.1)

Bentuk luas dari 1-permainan meta

Sedangkan untuk bentuk normal sebuah permainan meta dibangun sebagai berikut :

Misalkan :

N adalah himpunan pemain yaitu $\{ 1,2,\ldots,n \}$.

k adalah himpunan singleton dan merupakan himpunan bagian dari N.

X_k adalah himpunan strategi-strategi pemain k.

X_{N-k} adalah himpunan strategi-strategi pemain selain k.

F adalah himpunan semua fungsi f : $X_{N-k} \longrightarrow X_k$

Bentuk normal k-permainan meta didapat dari penggantian X_k dengan himpunan F. Pada umumnya k-permainan meta akan mempunyai pendapatan khas yaitu $(f_{x_{N-k}}, x_{N-k})$ atau dijabarkan menjadi $(x_k, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

CONTOH 3.2

permainan dasar 2 orang

Permasalahan antara kapal perang-kapal dagang. Sebuah kapal perang mencoba untuk menenggelamkan sebuah kapal dagang, dimana keduanya dapat pergi ke utara atau ke selatan sebuah pulau.

Pihak 1 adalah kapal perang

Pihak 2 adalah kapal dagang

$$\begin{array}{lccc} & & \textbf{kapal dagang} & (2) \\ & & U & S \\ \text{kapal perang (1)} & \begin{array}{c} U \\ S \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,0) \end{array}\right]} \end{array}$$

gambar (3.2)

$X_1 = X_2 = \{ U,S \}$ $\quad X = \{ (U,U),(U,S),(S,U),(S,S) \}$

$v_i(x_1,x_2) = 1$ berarti kemenangan bagi pemain i

$v_i(x_1,x_2) = 0$ berarti kekalahan bagi pemain i

Untuk membentuk 2-permainan meta, terdapat empat fungsi f dari X_1 ke X_2. Fungsi f dimana $f(U) = r$, $f(S) = s$ ditunjukkan dengan r/s.

Himpunan F dari strategi-strategi pemain 2 pada permainan meta adalah {U/U, S/S, U/S, S/U }.

Himpunan pendapatan $X_1 \times F$ dari 2-permainan meta adalah { (U,U/U),(U,S/S),...,(S,S/U) }.

Bentuk normal 2-permainan meta adalah gambar (3.3).

$$\begin{array}{lcc} & & \text{pihak 2} \\ \text{pihak 1} & \begin{array}{c} U \\ b \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} (1,0) & (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,0) & (1,0) & (0,1) \end{array}\right] \end{array}$$

gambar (3.3)

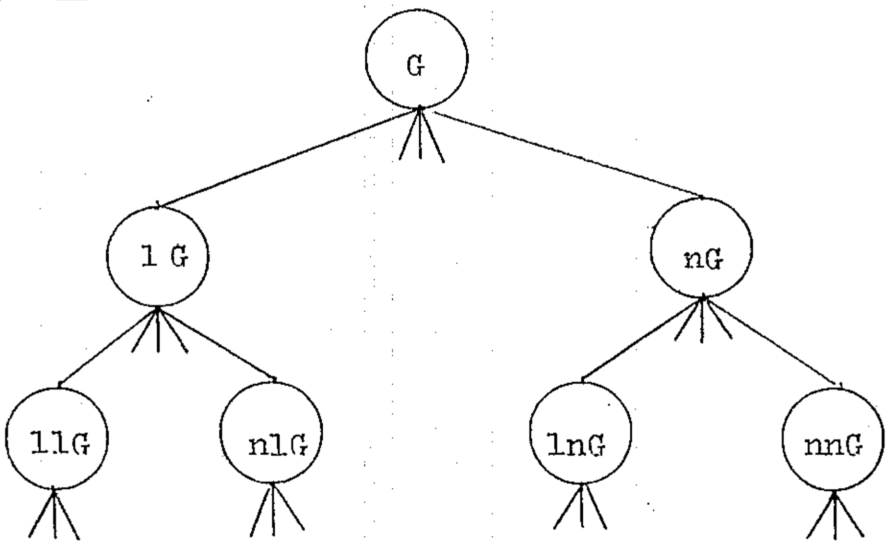
Pada gambar (3.3), pendapatan 2-permainan meta (x_1,f) menimbulkan pendapatan dasar yang unik, yaitu pendapatan dari permainan dasar. untuk (S,U/S) akan menimbulkan (S,S), karena (S,U/S) berarti bahwa pemain 2 memilih S, ketika 1 memilih S. Jika 1 memilih U maka 2 akan memilih U.

Dengan melihat bentuk normal dan bentuk luas suatu permainan meta diketahui bahwa untuk n banyaknya pemain akan ada n banyaknya k-permainan meta, satu untuk tiap pemain. Terdapat 1-permainan meta, 2-permainan meta,..., n-permainan meta berdasarkan pada permainan itu. Bila permainan biasa (asli) dilambangkan dengan "G", maka untuk k-permainan meta dilambangkan dengan"kG". k-permainan meta dibentuk dengan mengasumsikan bahwa pemain k memilih strategi yang akan dipakainya setelah para pemain lain dengan pengetahuan (berupa prediksi) akan pilihan-pilihan mereka dalam permainan G.

Karena permainan meta kG dibentuk berdasarkan G, maka akan ada pembentukan permainan meta berdasarkan pada kG yang dapat ditulis 1-k,2-k,...,n-k-permainan meta. Untuk j-k-permainan meta dapat ditulis jkG. Ini dibentuk dengan asumsi bahwa pemain j menentukan pilihannya dengan pengetahuan pilihan pemain lain dalam k-permainan meta. Dengan demikian dapat dibentuk tingkat ketiga n permainan meta berdasarkan jkG, yaitu 1jkG,2jkG,...,njkG. Pembentukan ini dapat berlanjut sedemikian hingga jika akan mempertimbangkan permainan G secara penuh, harus dipertimbangkan semua permainan dalam infinite tree seperti pada gambar (3.4). Dalam infinite tree terlihat setiap permainan dalam bentuk $k_1 k_2 \ldots k_r G$, dimana r adalah sebarang bilangan bulat non negatip dan setiap k_i berada dalam $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Infinite tree ini merupakan obyek matematika yang dipelajari dalam teori permainan meta.Jadi infinite tree merupakan struktur dasar teori permainan meta.

Alasan penyusunan permainan meta adalah :
Jika seorang pemain berusaha untuk bersikap rasional obyektip (berdasarkan keadaan nyata dari konflik), ia harus memilih strateginya dalam permainan meta, agar memiliki keadaan kesetimbangan atau keadaan yang disebut stabilitas nyata. Keadaan stabilitas nyata artinya suatu keadaan dimana para pemain memperkirakan strategi-strategi yang akan dipilih para pemain lain dengan benar, karena sebuah pendapatan dipengaruhi oleh keadaan kesetimbangan. Sehingga strategi-strategi yang digunakan pada permainan meta adalah strategi murni yang tidak mengubah permainan asli yang menjadi dasarnya.



gambar (3.4)

infinite tree

3.2. PERMAINAN META DAN KESETIMBANGAN META

Sesuai dengan definisi 2.1 dan definisi 2.2 dalam sebuah permainan n orang G dapat dipertimbangkan pendapatan mana yang stabil pada 1G. Pada permainan ini tiap pemain kecuali pemain 1, memilih strategi mereka dalam permainan dasar G, kemudian pemain 1 memilih strateginya dalam permainan dasar G dengan pengetahuan akan pilihan-pilihan para pemain lain. Dengan melihat permainan seperti ini dapat diketahui apa yang akan dipilih 1 untuk dikerjakan jika ia dapat meramalkan strategi-strategi para pemain lain sebelum ia memilih strategi yang akan dimainkannya, sehingga ada pendapatan rasional untuk 1 dalam permainan ini, yang dilambangkan dengan $R_1(1G)$. Kemudian dapat dicari kesetimbangan $E(1G)$ pada permainan ini, yaitu pendapatan yang ada jika semua pemain menjalankan tipe permainan ini dan dengan tepat meramalkan strategi-strategi lawannya. Untuk permainan 2 orang, pendapatan rasional untuk 1 pada bentuk normal adalah pendapatan yang memaksimalkan pembayaran (payoff) pemain 1 dalam sebuah kolom, dan untuk pemain 2 dalam sebuah baris. Pendapatan yang setimbang dari $E(1G)$ berkorespondensi dengan pendapatan dalam permainan dasar G.

DEFINISI 3.1

Sebuah pendapatan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ dalam permainan asli G yang timbul dari sebuah kesetimbangan dalam sebuah permainan $k_1 k_2 \ldots k_r G$, dimana r adalah sebarang himpunan bilangan bulat non negatip dan $k_1k_2...k_r$ sebarang barisan pemain termasuk pengulangan disebut sebuah kesetimbangan meta.

Himpunan semua kesetimbangan meta yang timbul dari $k_1k_2...k_rG$, dilambangkan dengan $\hat{E}(k_1k_2...k_rG)$ dan $k_1k_2...k_r$ disebut titel dari permainan G. $\hat{E}(G)$ melambangkan himpunan semua kesetimbangan meta yaitu gabungan dari $\hat{E}(1G), \hat{E}(2G), ..., \hat{E}(k_1k_2...k_n)G$ untuk n pemain.

Pada permainan 2 orang untuk mencari semua anggota $\hat{E}(G)$ pertama harus melihat pada 1G dan 2G dengan dasar pada G. Kemudian 1G dan 2G dapat dijadikan sebagai permainan dasar dan pemainan meta yang dibangun darinya adalah 11G,21G pada 1G dan 12G,22G, pada 2G. Untuk 21G berarti keadaan dimana pemain 2 mencoba untuk memprediksi strategi pilihan pemain 1, dan ia juga memperhitungkan kenyataan bahwa pemain 1 juga mencoba memprediksi strategi pilihannya. Hal ini dapat diteruskan dengan 11G,21G,12G dan 22G sebagai dasar demikian seterusnya. Akan tetapi pada sub bab selanjutnya terlihat bahwa untuk mendapatkan semua kesetimbangan meta $\hat{E}(G)$ tidak perlu mencari kesetimbangan dalam semua permainan pada infinite tree.

3.3. PERMAINAN META DAN PENDAPATAN RASIONAL META

Pada bagian yang telah lalu terlihat bahwa permainan meta lebih luas daripada permainan asli sebagai dasarnya. Untuk menuliskan matrik pembayaran pada permainan meta akan merupakan suatu tugas yang cukup sulit, khususnya untuk permainan n orang. Dengan teorema berikut hal itu tidak perlu dilakukan, karena dengan teorema ini akan dapat diidentifikasikan semua pendapatan rasional meta untuk sebarang i dan $k_1k_2\ldots k_rG$ yang diberikan dari permainan dasar G. Untuk membentuk teorema tersebut yaitu teorema karakteristik untuk pendapatan rasional meta dan teorema lainnya akan terlebih dahulu diberikan beberapa definisi dan metode untuk mengidentifikasikan suatu pendapatan rasional meta untuk pemain i dari suatu permainan meta.

DEFINISI 3.2

Sebarang permainan meta $H = k_1k_2\ldots k_rG$ dimana :

G = permainan asli (disebut permainan dasar)

r = bilangan bulat non negatip

k_i = pemain i $i = 1,2,\ldots,n$

Untuk r = 0 disebut permainan tingkat nol atau G.

untuk $r \neq 0$ disebut permainan meta proper

DEFINISI 3.3

Untuk $H = k_1k_2\ldots k_rG$

Sebarang permainan meta berbentuk $k_sk_{s+1}\ldots k_rG$ ($s\geq1$) disebut ancestor dari H.

$k_2k_3\ldots k_rG$ disebut ancestor dekat dari H

H adalah ancestor dari dirinya sendiri (s=1)

Untuk G tidak mempunyai ancestor dekat.

DEFINISI 3.4

Untuk $H = k_1k_2...k_rG$

sebarang permainan meta berbentuk

$j_1j_2...j_sk_1k_2...k_rG$ (s>0)

disebut **turunan** dari H.

Sebarang bentuk $j_1k_1k_2...k_rG$ disebut turunan dekat dari H.

H bukan turunan dari dirinya sendiri, sedangkan turunan dari G adalah permainan meta proper.

DEFINISI 3.5

Permainan meta $k_1k_2...k_rG$ disebut permainan meta tingkat ke-r.

Jadi ada n^r permainan meta pada tingkat ke-r.

DEFINISI 3.6

Sebuah permainan meta $k_1k_2...k_rG$ disebut permainan meta **utama** jika tiap pemain i dimana i =1,2,...,n terdapat pada daftar $k_1k_2...k_r$ paling banyak satu kali.

jika tiap pemain i terdapat sedikitnya satu kali pada daftar itu maka disebut permainan meta lengkap.

Jadi ada n! permainan meta utama lengkap. Terlihat bahwa tiap ancestor dari permainan meta utama merupakan permainan utama juga sehingga ada $\sum_{r=0}^{n} n^r$ permainan meta utama.

DEFINISI 3.7

Untuk $H = k_1 k_2 \ldots k_r G$

Wakil utama dari H adalah permainan meta utama yang diperoleh dengan menghapus semua kecuali penampakan terakhir (barisan paling kanan) tiap pemain i dari titel H.

CONTOH 3.3

Wakil utama dari 6362122G adalah 3612G.

Bila operator β adalah sebuah fungsi dari himpunan pendapatan dari suatu permainan meta ke himpunan pendapatan ancestor dekatnya maka :

$\beta R_i(kG)$ adalah himpunan pendapatan rasional pemain i dari kG. Sedangkan $\beta^r R_i(H)$ adalah himpunan pendapatan rasional pemain i dari H.

Karena H adalah tingkat ke-r maka β^r (operator β digunakan r kali) menghasilkan sebuah pendapatan dasar yaitu pendapatan dari G atau himpunan pendapatan dasar. Kemudian sebagai suatu permasalahan dalam pemberian notasi dapat dituliskan β^* untuk operasi penggunaan β beberapa kali agar diperoleh pendapatan dasar. $\beta^* R_i(H)$ untuk pendapatan rasional meta pemain i dari sebuah permainan meta H dapat juga ditulis $\hat{R}_i(H)$.

Untuk mengidentifikasikan pendapatan rasional meta untuk seorang pemain i dari permainan meta H, yaitu pendapatan-pendapatan dari G yang dimiliki $\hat{R}_i(H)$

diberikan dua metode yaitu :

METODE 1

Pada permainan 2 orang

X_i = himpunan strategi pemain i $\qquad i = 1,2.$

M_i = fungsi preferensi pemain i

v_i = fungsi preferensi numerik pemain i berharga riil

Pemain i akan mempunyai sebuah fungsi preferensi numerik v_i dengan preferensinya yaitu M_i sehingga

$$s \in M_i(t) \iff v_i(s) \leq v_i(t)$$

$\hat{R}_1(2G)$ adalah himpunan semua $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ dimana terdapat fungsi $f\colon X_1 \rightarrow X_2$ sedemikian hingga berlaku :

$$f(\bar{x}_1) = \bar{x}_2 \quad \text{dan} \quad v_1(\bar{x}_1, f(\bar{x}_1)) = \max_{x_1} v_1(x_1, f(x_1)) \ldots (3.1)$$

Untuk mendapatkan himpunan semua $\bar{x}$ yang memenuhi syarat (3.1) dimisalkan :

f^* adalah sebuah fungsi sedemikian hingga untuk setiap x_1 berlaku $x_2 = f^*(x_1)$ yang meminimumkan $v_1(x_1, x_2)$.

$f^*_{\bar{x}}$ adalah sebuah fungsi yang identik dengan f^* kecuali bahwa $f^*_{\bar{x}}(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$.

Syarat (3.1) terpenuhi bila terpenuhi untuk $f^*_{\bar{x}}$, sebaliknya jika ini tidak terpenuhi untuk $f^*_{\bar{x}}$ maka tidak terpenuhi untuk sebarang f.

Syarat menjadi

$$v_1(\bar{x}) = \max_{x_1} v_1(x_1, f^*_{\bar{x}}(x_1))$$

akan ada x_1 yang membuat v_1 maksimum , jadi :

$$v_1(\bar{x}) \geq \max_{x_1} v_1(x_1, f^*(x_1))$$

dapat diperoleh sebuah f^* yang dibutuhkan karena akan ada f^* sedemikian hingga $f^*(x_1)$ yang minimal ada (jadi ada x_2 yang meminimalkan nilai v_1) membuat syarat menjadi :

$$v_1(\bar{x}) \geq \max_{x_1} \min_{x_2} v_1(x_1, x_2)$$

merupakan syarat $\bar{x}$ rasional meta untuk pemain 1 dalam permainan 2G.

ini dapat diperluas untuk permainan n orang.

METODE 2

Permainan 2 orang

X_i = himpunan strategi pemain i $\quad$ i = 1,2.

M_i = fungsi preferensi pemain i

$\hat{R}_2(1G)$adalah himpunan pendapatan $\bar{x}$ dimana terdapat fungsi f: $X_2 \longrightarrow X_1$ sedemikian hingga berlaku :

$f(\bar{x}_2) = \bar{x}_1$ dan $\forall x_2 \in X_2 : (f(x_2), x_2) \in M_2(\bar{x})$.....(3.2)

tetapi disini $f(\bar{x}_2) = \bar{x}_1$ redundan karena jika sebuah fungsi f^* ada memenuhi syarat kedua maka akan ada fungsi $f^*_{\bar{x}}$ yang identik dengan f^* kecuali bahwa $f^*_{\bar{x}}(\bar{x}_2) = \bar{x}_1$ akan memenuhi kedua syarat, karena selalu $\bar{x} \in M_2(\bar{x})$.

(3.2) menjadi

$$\exists f\ \forall x_2 : (f(x_2), x_2) \in M_2(\bar{x}) \qquad \text{......(3.3)}$$

Untuk mendapatkan fungsi f ini, harus dicari untuk setiap x_2 sebuah x_1 sehingga $x \in M_2(\bar{x})$

(3.3) menjadi

$$\forall x_2\ \exists x_1 : x \in M_2(\bar{x})$$

atau

$\overline{\exists x_2 \forall x_1} \quad : x \notin \bar{M}_2(\bar{x})$

$\hat{R}_2(1G)$ dapat dicari dengan mengambil setiap pendapatan $\bar{x}$ secara bergiliran dan diperiksa apakah ada sebuah x_2 sedemikian hingga ada pilihan yang lebih baik dari $\bar{x}$ untuk pemain 2 . Jika ada x_2 yang memenuhi maka $\bar{x} \notin \hat{R}_2(1G)$, dan jika tidak ada x_2 yang memenuhi maka $\bar{x} \in \hat{R}_2(1G)$.

Ini dapat diperluas untuk permainan n orang.

Jadi untuk mengidentifikasikan $\hat{R}_i(H)$ dapat menggunakan metode 1 atau metode 2. Untuk metode 1 memakai fungsi preferensi numerik v, sedangkan pada metode 2 memakai fungsi preferensi M.

TEOREMA 3.1

Jika sebuah pendapatan $\bar{x} = (\bar{x}_{F_i}, \bar{x}_{P_i}, \bar{x}_{U_i}, \bar{x}_i)$ dalam G adalah rasional meta untuk i dalam H <u>bhb</u>

$$\exists x_{P_i} \; \forall x_i \; \exists x_{F_i} \; : (\bar{x}_{U_i}, x_{N-U_i}) \in M_i(\bar{x}) \quad \ldots\ldots(3.4)$$

dimana :

F_i adalah himpunan pemain yang terletak di sebelah kanan i terakhir dalam $k_1k_2 \ldots k_r$, atau himpunan semua pemain dalam $k_1k_2 \ldots k_r$ bila i tidak berada dalam $k_1k_2 \ldots k_r$;

P_i adalah himpunan pemain yang tidak berada dalam F_i dan terletak di sebelah kiri i terakhir dalam $k_1 k_2 \ldots k_r$.

U_i adalah himpunan pemain yang tidak berada dalam P_i atau F_i atau $\{i\}$.

N adalah himpunan semua pemain pada permainan G.

CONTOH 3.6

Jika N = 4 H = 212$\underline{1}$32G dan i = 3

maka

$F_3 = \{2\}$ $P_3 = \{1\}$ $U_3 = \{4\}$

Sebelum membuktikan teorema 3.1 akan diberikan ilustrasi, sebuah aksioma dan sebuah lemma.

Jika k adalah himpunan kosong, x_k tidak tertulis, hal ini berlaku untuk semua simbol yang bergantung pada x_k karena artinya. Dengan demikian bila k = Ø maka $\exists x_k$ tidak tertulis. Untuk H = G pernyataan (3.4) menjadi

$$\forall x_i : (\bar{x}_{N-i}, x_i) \in M_i(\bar{x})$$

merupakan syarat $\bar{x}$ menjadi rasional untuk i.

Syarat teorema untuk $\bar{x} \in \hat{R}_1(2G)$

sesuai metode 2 : $\forall x_1 \exists x_2 : (x_1, x_2) \in M_1(\bar{x})$

untuk metode 1 : $v_1(\bar{x}) \geq \max_{x_1} \min_{x_2} v_1(x_1, x_2)$

atau

$$\forall x_1 : [\, v_1(\bar{x}) \geq \min_{x_2} v_1(x_1, x_2) \,]$$

atau

$$\forall x_1 : [\, \exists x_2 : v_1(\bar{x}) \geq v_1(x_1, x_2) \,]$$

Jadi sesuai dengan syarat teorema 3.1.

Biasanya dalam sebuah kasus pilihan-pilihan pemain i disajikan oleh sebuah fungsi preferensi numerik

v_i sehingga pernyataan (3.4) akan sama dengan :

$$v_i(\bar{x}) \geq \min_{x_{P_i}} \max_{x_i} \min_{x_{F_i}} v_i(\bar{x}_{U_i}, x_{P_i}, x_i, x_{F_i})$$

Hal ini akibat dari kenyataan bahwa pernyataan

$$v_i(\bar{x}) \geq \min_{x_k} v_i(x_k, \bar{x}_{N-k})$$

sama dengan pernyataan

$$\exists x_k : (x_k, \bar{x}_{N-k}) \in M_i(\bar{x})$$

dan pernyataan

$$v_i(\bar{x}) \geq \max_{x_k} v_i(x_k, \bar{x}_{N-k})$$

sama dengan pernyataan

$$\forall x_k : (x_k, \bar{x}_{N-k}) \in M_i(\bar{x})$$

Dengan menggunakan prosedur pada metode dua dapat ditetapkan suatu lemma dengan mempertimbangkan bahwa pernyataan

$$\exists f\ \forall x_2 : (f(x_2), x_2) \in M_2(\bar{x})$$

ekivalen dengan pernyataan

$$\forall x_2\ \exists x_1 : (x_1, x_2) \in M_2(\bar{x})$$

Bila secara umum diberikan :

X , Y : sebarang himpunan-himpunan tak kosong.

$P \subseteq X \times Y$ dimana

$X \times Y = \{(x_i, y_j) /\ x_i \in X \cap y_j \in Y, i=1,\ldots,n$
$j=1,\ldots,m\}$

$f: X \longrightarrow Y \qquad x \in X \quad , \quad y \in Y$

pernyataan

$$\exists f\ \forall x : (x, f(x)) \in P \qquad \ldots\ldots(3.5)$$

akan dilihat apakah secara umum ekivalen dengan pernyataan

$$\forall x\ \exists y : (x,y) \in P \qquad \ldots\ldots(3.6)$$

Untuk membuktikan ekivalen harus diperlihatkan bahwa tiap pernyataan secara tak langsung termuat dalam pernyataan yang lain. Terlihat bahwa pernyataan (3.5) termuat dalam pernyataan (3.6), karena y yang dibutuhkan oleh pernyataan (3.6)dapat diambil sebagai $y = f(x)$ untuk setiap x. Sebaliknya pernyataan (3.6) secara tak langsung termuat dalam pernyataan (3.5) merupakan dasar anggapan matematika yang tak terbukti yaitu sebagai aksioma pilihan. Untuk X dan Y terhingga fungsi f yang dibutuhkan pada pernyataan (3.5) dapat dibentuk dengan memilih untuk setiap x sebuah $y=f(x)$ sedemikian hingga $(x,y) \in P$.

AKSIOMA PILIHAN

Misalkan :

X , Y : himpunan-himpunan tak kosong

$P \subseteq X \times Y$

$f: X \longrightarrow Y \qquad x \in X \qquad y \in Y$

berlaku :

$$\forall x\ \exists y : (x,y) \in P \longrightarrow \exists f\ \forall x : (x,f(x)) \in P$$

LEMMA

Jika $Q^0, Q^1, \ldots, Q^r$ adalah r+1 kuantor

$Y, X_1, X_2, \ldots, X_r$ adalah r+1 himpunan-himpunan tak kosong.

$y \in Y$ dan $x_i \in X_i$

$x \in X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_r$

$f: X \longrightarrow Y$

maka $Q^1 x_1 \ldots Q^{k-1} x_{k-1}\ Q^o f\ Q^k x_k \ldots Q^r x_r : (x, f(x)) \in P$

ekivalen dengan

$Q^1 x_1 \ldots Q^r x_r\ Q^o f : (x, f(x)) \in P$

atau

$Q^1 x_1 \ldots Q^r x_r\ Q^o y : (x, y) \in P$

BUKTI LEMMA

Berdasarkan aksioma pilihan, jika aksioma benar maka pernyataan (3.6) $(\forall x\ \exists y : (x,y) \in P)$ ekivalen dengan pernyataan (3.5)

$(\exists f\ \forall x : (x, f(x)) \in P)$

karena sebelumnya telah diketahui bahwa pernyataan (3.5) secara tak langsung termuat dalam pernyataan (3.6). Untuk setiap x akan ada sebuah $y = f(x)$ sehingga (3.6) menjadi $(\forall x\ \exists f : (x, f(x)) \in P)$ ......(3.7)

membandingkan (3.5) dengan (3.7) didapat

"$\exists f$" bertukar tempat dengan "$\forall x$" bila diikuti $(x,f(x)) \in P$

"$\forall f$" bertukar tempat dengan "$\exists x$" bila diikuti pernyataan yang sama.

Untuk pernyataan

$(\forall f\ \exists x : (x, f(x)) \in P)$ ......(3.8)

ekivalen dengan

$(\overline{\exists f\ \forall x} : (x, f(x)) \notin P)$

dengan pertukaran berdasarkan perbandingan diatas, pernyataan menjadi :

$(\overline{\forall x\ \exists f} : (x,f(x)) \notin P)$

atau

$(\exists x\ \forall f : (x,f(x)) \in P)$ ......(3.9)

dengan membandingkan (3.8) dengan (3.9) terlihat bahwa : "$\forall f$" bertukar tempat dengan "$\exists x$" bila diikuti $(x,f(x)) \in P$ dengan demikian untuk "$\exists x$" dapat bertukar tempat dengan "$\exists f$" dan "$\forall x$" dengan "$\forall f$" jika diikuti pernyataan apapun. Jadi secara umum dapat dikatakan :

jika Q^0 dan Q^1 dua kuantor sebarang, masing-masing sama dengan kuantor eksistensial $\exists$ atau kuantor universal $\forall$ maka

$$Q^0 f\ Q^1 x : (x,f(x)) \in P$$

ekivalen dengan

$$Q^1 x\ Q^0 f : (x,f(x)) \in P$$

atau dengan

$$Q^1 x\ Q^0 y : (x,y) \in P$$

ini dapat diperluas untuk r+1 kuantor sehingga lemma terbukti.

BUKTI TEOREMA 3.1

Misalkan $H = k_1 k_2 \ldots k_r G$

Teorema benar untuk r = 0 karena untuk r = 0 H = G berlaku

$$\forall x_i : (\bar{x}_{N-i}, x_i) \in M_i(\bar{x})$$

atau

$$v_i(\bar{x}) \geq \max_{x_i} v_i(\bar{x}_{N-i}, x_i)$$

dengan $F_i = \emptyset$ $P_i = \emptyset$ $U_i = N-i$

Andaikan teorema benar untuk r, akan dibuktikan benar untuk r+1.

Syarat untuk sebuah pendapatan $\bar{x}$ dari G dalam $\hat{R}_i(H) = \beta^r R_i(k_1 k_2 \ldots k_r G)$ adalah :

$$\exists x_{P_i} \; \forall x_i \; \exists x_{F_i} \; : \; (\bar{x}_{U_i}, x_{P_i}, x_i, x_{F_i}) \in M_i(\bar{x})$$

himpunan-himpunan U_i, P_i dan F_i diperoleh dari H berdasarkan definisi pada teorema.

Selanjutnya jika sebuah permainan meta kG dianggap sebagai sebuah permainan dasar maka syarat untuk sebuah pendapatan $(\bar{f}, \bar{x}_{N-k})$ dari permainan meta kG berada dalam $\beta^r R_i(k_1 k_2 \ldots k_r(kG))$ tergantung apakah $k \in U_i, P_i, \{i\}$ atau F_i dimana :

$$\bar{f} : \bar{x}_{N-k} \longrightarrow \bar{x}_k \text{ dan } f : x_{N-k} \longrightarrow x_k$$

jika $k \in U_i$ maka

$$\exists x_{P_i} \; \forall x_i \; \exists x_{F_i} \; : \; (\bar{f}, \bar{x}_{U_i - k}, x_{P_i}, x_i, x_{F_i}) \in M_i'(\bar{f}, \bar{x}_{N-k})$$

jika $k \in P_i$ maka

$$\exists f \; \exists x_{P_i - k} \; \forall x_i \; \exists x_{F_i} \; : \; (\bar{x}_{U_i}, f, x_{P_i - k}, x_i, x_{F_i}) \in M_i'(\bar{f}, \bar{x}_{N-k})$$

jika $k = i$ maka

$$\exists x_{P_i} \; \forall x_i \; \exists x_{F_i} \; : \; (\bar{x}_{U_i}, x_{P_i}, f, x_{F_i}) \in M_i'(\bar{f}, \bar{x}_{N-k})$$

jika $k \in F_i$ maka

$$\exists x_{P_i} \; \forall x_i \; \exists f \; \exists x_{F_i - k} \; : \; (\bar{x}_{U_i}, x_{P_i}, x_i, f, x_{F_i - k}) \in M_i'(\bar{f}, \bar{x}_{N-k})$$

himpunan himpunan U_i, P_i dan F_i ditetapkan dari daftar $k_1 k_2 \ldots k_r$ bukan dari daftar $k_1 k_2 \ldots k_r k$, dan M_i' adalah himpunan preferensi pemain i dalam permainan kG, bukan dalam permainan G, karena kG dianggap sebagai permainan dasar.

Dari definisi M_i' didapat syarat perlu dan cukup untuk $\bar{x} \in \beta^{r+1}R_i(k_1k_2\ldots k_r(kG))$ yaitu :

jika $k \in U_i$

$$\exists \bar{f} \begin{cases} \exists x_{P_i}\ \forall x_i\ \exists x_{F_i} : \beta(\bar{f}, \bar{x}_{U_i-k}, x_{P_i}, x_i, x_{F_i}) \in M_i(\bar{x}) \\ \bar{f}(\bar{x}_{N-k}) = \bar{x}_k \end{cases} \qquad \ldots\ldots(3.10)$$

jika $k \in P_i$

$$\exists \bar{f} \begin{cases} \exists f\ \exists x_{P_i-k}\ \forall x_i\ \exists x_{F_i} : \beta(\bar{x}_{U_i}, f, x_{P_i-k}, x_i, x_{F_i}) \in M_i(\bar{x}) \\ \bar{f}(\bar{x}_{N-k}) = \bar{x}_k \end{cases} \qquad \ldots\ldots(3.11)$$

jika $k = i$

$$\exists \bar{f} \begin{cases} \exists x_{P_i}\ \forall x_i\ \exists x_{F_i} : \beta(\bar{x}_{U_i}, x_{P_i}, f, x_{F_i}) \in M_i(\bar{x}) \\ \bar{f}(\bar{x}_{N-k}) = \bar{x}_k \end{cases} \qquad \ldots\ldots(3.12)$$

jika $k \in F_i$

$$\exists \bar{f} \begin{cases} \exists x_{P_i}\ \forall x_i\ \exists f\ \exists x_{F_i-k} : \beta(\bar{x}_{U_i}, x_{P_i}, x_i, f, x_{F_i-k}) \in M_i(\bar{x}) \\ \bar{f}(\bar{x}_{N-k}) = \bar{x}_k \end{cases} \qquad \ldots\ldots(3.13)$$

dimana M_i berarti preferensi i dalam permainan G.

Untuk pernyataan (3.10)-(3.13) membutuhkan sebuah $\bar{f}$ yang memenuhi kedua syarat. Fungsi $\bar{f}$ yang memenuhi kedua syarat ada jika memenuhi syarat pertama, karena misalkan ada fungsi f^* yang memenuhi syarat pertama, selanjutnya dengan mempertimbangkan sebuah fungsi $f^*_{\bar{x}}$ identik dengan f^* kecuali bahwa $f^*_{\bar{x}}(\bar{x}_{N-k}) = \bar{x}_k, f^*_{\bar{x}}$ ini akan memenuhi syarat kedua karena definisi dan syarat pertama karena selalu $\bar{x} \in M_i(\bar{x})$. Karena itu syarat kedua redundan, dengan menghapus syarat kedua pada pernyataan-pernyataan (3.10)-(3.13)

pernyataan (3.10) menjadi

$\exists f\ \exists x_{P_i}\ \forall x_i\ \exists x_{F_i}\ :\ \beta(f,\bar{x}_{U_i-k},x_{P_i},x_i,x_{F_i}) \in M_i(\bar{x})$

dan berdasarkan lemma menjadi

$\exists x_{P_i}\ \forall x_i\ \exists x_{F_iUk}\ :\ (\bar{x}_{U_i-k},x_{P_i},x_i,x_{F_iUk}) \in M_i(\bar{x})$

pernyataan (3.11) menjadi

$\exists f\ \exists x_{P_i-k}\ \forall x_i\ \exists x_{F_i}\ :\ \beta(\bar{x}_{U_i},f,x_{P_i-k},x_i,x_{F_i}) \in M_i(\bar{x})$

dan berdasarkan lemma menjadi

$\exists x_{P_i-k}\ \forall x_i\ \exists x_{F_iUk}\ :\ (\bar{x}_{U_i},x_{P_i-k},x_i,x_{F_iUk}) \in M_i(\bar{x})$

pernyataan (3.12) menjadi

$\exists x_{P_i}\ \forall x_i\ \exists x_{F_i}\ :\ \beta(\bar{x}_{U_i},x_{P_i},f,x_{F_i}) \in M_i(\bar{x})$

dan berdasarkan lemma menjadi

$\exists x_{P_iUF_i}\ \forall x_i\ :\ (\bar{x}_{U_i},x_{P_iUF_i},x_i) \in M_i(\bar{x})$

pernyataan (3.13) menjadi

$\exists x_{P_i}\ \forall x_i\ \exists f\ \exists x_{F_i-k}\ :\ \beta(\bar{x}_{U_i},x_{P_i},x_i,f,x_{F_i-k}) \in M_i(\bar{x})$

dan berdasarkan lemma menjadi

$\exists x_{P_i}\ \forall x_i\ \exists x_{F_i}\ :\ (\bar{x}_{U_i},x_{P_i},x_i,x_{F_i}) \in M_i(\bar{x})$

ini merupakan syarat-syarat teorema untuk

$\bar{x} \in \hat{R}_i(k_1k_2\ldots k_r(kG))$

dimana $k \in U_i$, $k \in P_i$, $k = i$ atau $k \in F_i$ didapat dari daftar $k_1k_2\ldots k_r$. Teorema benar untuk r+1.

Teorema juga benar untuk r+p, dengan menjalankan prosedur seperti diatas sampai p kali.

Teorema terbukti. ∎

Jika permainan G hanya mempunyai 2 pemain, yaitu pemain 1 dan pemain 2 maka berdasarkan teorema 3.1

berlaku :

dalam 1G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\max_{x_1} v_1(x_1,\bar{x}_2) \leq v_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \qquad .....(3.14)$$

karena $F_1=P_1=\emptyset$, $U_1=\{2\}$ untuk 1G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\max_{x_2} \min_{x_1} v_2(x_1,x_2) \leq v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \qquad .....(3.15)$$

karena $F_2=\{1\}$, $P_2=U_2=\emptyset$ untuk 1G

dalam 21G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\min_{x_2} \max_{x_1} v_1(x_1,x_2) \leq v_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \qquad .....(3.16)$$

karena $P_1=\{2\}$, $F_1=U_1=\emptyset$ untuk 21G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\max_{x_2} \min_{x_1} v_2(x_1,x_2) \leq v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \qquad .....(3.17)$$

karena $F_2=\{1\}$, $P_2=U_2=\emptyset$ untuk 21G

ini sama dengan syarat (3.15)

dalam 2G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\max_{x_1} \min_{x_2} v_1(x_1,x_2) \leq v_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \qquad .....(3.18)$$

karena $F_1=\{2\}$, $P_1=U_1=\emptyset$ untuk 2G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\max_{x_2} v_2(\bar{x}_1,x_2) \leq v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \qquad .....(3.19)$$

karena $F_2=P_2=\emptyset$, $U_2=\{1\}$ untuk 2G

dalam 12G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\max_{x_1} \min_{x_2} v_1(x_1,x_2) \leq v_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \quad .....(3.20)$$

karena $F_1=\{2\}$, $P_1=U_1=\emptyset$ untuk 12G

ini sama dengan syarat (3.18)

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\min_{x_1} \max_{x_2} v_2(x_1,x_2) \leq v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \quad .....(3.21)$$

karena $F_2=U_2=\emptyset$, $P_2=\{1\}$

CONTOH 3.7

Dalam konflik antara Inggris dan Argentina mengenai kepulauan Falkland berdasarkan pengamatan didapat pilihan strategi sebagai berikut :

Pihak 1 : Inggris

memiliki strategi : 1. meninggalkan Falkland (a)

2. meneruskan pertempuran (c)

Pihak 2 : Argentina

memiliki strategi : 1. menarik mundur pasukan (w)

2. tetap mempertahankan Falkland (m)

Keempat pendapatan yang ada yaitu :

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ & & \begin{array}{cc} w & m \end{array} \\ 1 & \begin{array}{c} a \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} (4,2) & (1,4) \\ (3,1) & (2,3) \end{bmatrix} \end{array}$$

Bilangan 4 lebih disukai dari pada 3, 2 atau 1.

Dalam kenyataannya Inggris tetap meneruskan pertempuran dan Argentina tetap mempertahankan yaitu strategi (c,m) apakah hal ini dapat dihindari ? apakah ada pendapatan lain yang stabil ?

Untuk mencari jawabnya harus dicari kesetimbangan meta sebagai solusi digunakan syarat-syarat (3.14)-(3.21)

untuk 1G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\max_{x_1} v_1(x_1,\bar{x}_2) \le v_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$\bar{x}_2 = w \qquad \max_{x_1} v_1(x_1,w) = 4$

$$4 = v_1(a,w)$$

$\bar{x}_2 = m \qquad \max_{x_1} v_1(x_1,m) = 2$

$$2 = v_1(c,m)$$

jadi $\hat{R}_1(1G) = \{ (a,w),(c,m) \}$

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\max_{x_2} \min_{x_1} v_2(x_1,x_2) \le v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$x_2 = w \qquad \min_{x_1} v_2(x_1,w) = 1$

$x_2 = m \qquad \min_{x_1} v_2(x_1,m) = 3$

$$\max_{x_2} \min_{x_1} v_2(x_1,x_2) = 3$$

$$3 \le v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$v_2(c,m) = 3 \qquad 3 = v_2(c,m)$

$v_2(a,m) = 4 \qquad 3 < v_2(a,m)$

$\hat{R}_2(1G) = \{ (c,m),(a,m) \}$

$\hat{E}\ (1G) = \hat{R}_1(1G) \cap \hat{R}_2(1G)$

$\quad = \{ (c,m) \}$

untuk 21G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\min_{x_2} \max_{x_1} v_1(x_1,x_2) \le v_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$x_2 = w$ $\quad \max_{x_1} v_1(x_1, w) = 4$

$x_2 = m$ $\quad \max_{x_1} v_1(x_1, m) = 2$

$$\min_{x_2} \max_{x_1} v_1(x_1, x_2) = 2$$

$$2 \leq v_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$v_1(a,w) = 4$ $\quad 2 < v_1(a,w)$

$v_1(c,w) = 3$ $\quad 2 < v_1(c,w)$

$v_1(c,m) = 2$ $\quad 2 = v_1(c,m)$

$\hat{R}_1(21G) = \{ (a,w),(c,w),(c,m) \}$

$\hat{R}_2(21G) = \hat{R}_2(1G) = \{ (a,m).(c,m) \}$

$\hat{E}\ (21G) = \{ (c,m) \}$

untuk 2G

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\max_{x_1} \min_{x_2} v_1(x_1, x_2) \leq v_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$x_1 = a$ $\quad \min_{x_2} v_1(a, x_2) = 1$

$x_1 = c$ $\quad \min_{x_2} v_1(c, x_2) = 2$

$$\max_{x_1} \min_{x_2} v_1(x_1, x_2) = 2$$

$$2 \leq v_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$v_1(a,w) = 4$ $\quad 2 < v_1(a,w)$

$v_1(c,w) = 3$ $\quad 2 < v_1(c,w)$

$v_1(c,m) = 2$ $\quad 2 = v_1(c,m)$

$\hat{R}_1(2G) = \{ (a,w),(c,w),(c,m) \}$

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\max_{x_2} v_2(\bar{x}_1,x_2) \le v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$\bar{x}_1 = a \quad \max_{x_2} v_2(a,x_2) = 4$

$$4 = v_2(a,m)$$

$\bar{x}_1 = c \quad \max_{x_2} v_2(c,x_2) = 3$

$$3 = v_2(c,m)$$

$\hat{R}_2(2G) = \{ (a,m),(c,m) \}$

$\hat{E}\ (2G) = \{ (c,m) \}$

untuk 12G

$\hat{R}_1(12G) = \hat{R}_1(2G) = \{ (a,w),(c,w),(c,m) \}$

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\min_{x_1} \max_{x_2} v_2(x_1,x_2) \le v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$\bar{x}_1 = a \quad \max_{x_2} v_2(a,x_2) = 4$

$\bar{x}_1 = c \quad \max_{x_2} v_2(c,x_2) = 3$

$$\min_{x_1} \max_{x_2} v_2(x_1,x_2) = 3$$

$$3 \le v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$v_2(a,m) = 4 \qquad 3 < v_2(a,m)$

$v_2(c,m) = 3 \qquad 3 = v_2(c,m)$

$\hat{R}_2(12G) = \{ (a,m),(c,m) \}$

$\hat{E}\ (12G) = \{ (c,m) \}$

$\hat{E}\ (G) = \hat{E}\ (1G) \cup \hat{E}\ (21G) \cup \hat{E}\ (2G) \cup \hat{E}\ (12G)$

$= \{ (c,m) \}$

Jadi kesetimbangan meta pada permainan tersebut adalah (c,m). Ini merupakan satu-satunya pendapatan rasional untuk semua pemain dalam setiap permainan meta, sehingga hanya ada satu pendapatan stabil sebagai solusi pada situasi ini.

Beberapa akibat timbul dari teorema 3.1,yang merupakan dasar dari teori pendapatan rasional meta. Akibat pertama bahwa syarat pada teorema3.1 adalah sama untuk sebarang dua permainan meta yang mempunyai wakil utama yang sama.

TEOREMA 3.2

Jika H^* wakil utama dari H maka $\hat{R}_i(H) = \hat{R}_i(H^*)$

BUKTI

H^* wakil utama dari H

Sesuai syarat teorema 3.1, sebuah pendapatan $\bar{x}$ dari G akan berada dalam $\hat{R}_i(H)$ bila :

$$\exists x_{P_i} \ \forall x_i \ \exists x_{F_i} \ : (\bar{x}_{U_i}, x_{P_i}, x_i, x_{F_i}) \in M_i(\bar{x})$$

dimana himpunan-himpunan F_i, P_i dan U_i didapat dari G. Sesuai dengan definisi H^* (definisi 3.7) akan didapat bahwa himpunan-himpunan F_i^*, P_i^* dan U_i^* pada H^* akan mempunyai anggota-anggota yang sama dengan himpunan-himpunan F_i, P_i dan U_i pada H. Jadi untuk $\hat{R}_i(H^*)$ juga berlaku syarat yang sama sehingga :

$$\hat{R}_i(H) = \hat{R}_i(H^*)$$

terbukti■

CONTOH 3.8

Untuk H = 3122311G i = 3 dan N = 3

sesuai definisi pada teorema 3.1

$F_3 = \{1\}$ $P_3 = \{2\}$ $U_3 = \emptyset$

syarat $\hat{R}_3(H)$ adalah

$$\exists x_{P_3}\ \forall x_3\ \exists x_{F_3} : (\bar{x}_{U_3}, x_{P_3}, x_3, x_{F_3}) \in M_3(\bar{x})$$

Sedangkan H^* = 231G adalah wakil utama dari H

sesuai definisi pada teorema 3.1

$F_3^* = \{1\}$ $P_3^* = \{2\}$ $U_3^* = \emptyset$

karena himpunan-himpunan pada H^* dan H mempunyai anggota sama maka $\hat{R}_i(H) = \hat{R}_i(H^*)$

Dari teorema 3.2 diketahui bahwa untuk permainan dasar 2-orang hanya diperlukan permainan meta 1G, 2G, 12G dan 21G untuk mencari semua kemungkinan pendapatan rasional meta yang ada pada permainan itu. Untuk permainan dasar (asli) n-Orang , hanya diperlukan sampai n tingkatan permainan meta, yang merupakan semua permutasi pada angka satu sampai n (n!).Misalkan pada permainan dasar 3-orang pada permainan meta tingkatan tertinggi yang perlu diperhatikan adalah permainan meta tingkat ketiga yaitu 123G, 132G, 213G, 231G, 312G dan 321G yang semua berjumlah 6 permainan meta atau 3!.

3.4. KESIMETRIAN KESETIMBANGAN META

Pada pembahasan tentang pendapatan rasional dalam permainan meta, terlihat bahwa jika sebuah pendapatan raional meta untuk G, ia juga akan rasional meta untuk 1G, 2G,12G, dan 21G.Bila sebuah pendapatan rasional meta untuk 1G ia akan rasional meta untuk 21G. Jadi sebuah pendapatan rasional meta dari suatu permainan meta adalah juga rasional untuk semua permainan meta dengan orde yang lebih tinggi berdasarkan pada G. Dapat dikatakan bahwa sebuah pendapatan yang rasional meta dari H akan tetap rasional meta pada tiap turunan (descendent) dari H, terlihat pada teorema 3.3.

TEOREMA 3.3

Jika H' adalah sebuah turunan dari H,

maka $\hat{R}_i(H') \supseteq \hat{R}_i(H)$

BUKTI

Misalkan $\bar{x}$ rasional meta untuk pemain i dari H maka $\bar{x}$ memenuhi syarat :

$$\exists x_{P_i}\ \forall x_i\ \exists x_{F_i} : (\bar{x}_{U_i}, x_{P_i}, x_i, x_{F_i}) \in M_i(\bar{x}) \qquad .....(3.12)$$

F_i, P_i dan U_i sesuai dengan definisi pada teorema 3.1.

Jika H' adalah sebuah turunan dari H

H^* adalah wakil utama dari H'

menurut definisi 3.4 dan 3.7

$H^* = j_1 j_2 \ldots j_t H$ dimana $t \geq 0$.

$H = k_1 k_2 \ldots k_r G$

$$H^* = j_1 j_2 \dots j_t k_1 k_2 \dots k_r G$$

dimana $j_m \neq k_n$ $\quad m = 1,2,\dots,t \quad n = 1,2,\dots,r$

maka menurut teorema 3.2

$$\hat{R}_i(H') = \hat{R}_i(H^*) \; ,$$

sehingga misalkan $A = \{j_1 j_2 \dots j_t\}$ karena $j_m \neq k_n$,bila $t = 0$ maka $\hat{R}_i(H') = \hat{R}_i(H^*) = \hat{R}_i(H)$,sedangkan bila $t > 0$ maka A akan merupakan himpunan bagian U_i yang diambil dari daftar $k_1 k_2 \dots k_r$.

Jadi syarat $\bar{x}$ rasional meta untuk i dari H' adalah :

$$\exists x_A \; \exists x_{P_i} \; \forall x_i \; \exists x_{F_i} : \quad (\bar{x}_{U_i - A}, x_A, x_{P_i}, x_i, x_{F_i}) \in M_i(\bar{x}) \quad ..(3.23)$$

Dengan menggunakan fungsi preferensi numerik syarat (3.22) dan (3.23) berturut-turut menjadi

$$\min_{x_{P_i}} \max_{x_i} \min_{x_{F_i}} v_i(\bar{x}_{U_i}, x_{P_i}, x_i, x_{F_i}) \leq v_i(\bar{x})$$

dan

$$\min_{x_A} \min_{x_{P_i}} \max_{x_i} \min_{x_{F_i}} v_i(\bar{x}_{U_i - A}, x_A, x_{P_i}, x_i, x_{F_i}) \leq v_i(\bar{x})$$

sehingga

$$\min_{x_A} \min_{x_{P_i}} \max_{x_i} \min_{x_{F_i}} v_i(\bar{x}_{U_i - A}, x_A, x_{P_i}, x_i, x_{F_i})$$

$$\leq \min_{x_{P_i}} \max_{x_i} \min_{x_{F_i}} v_i(\bar{x}_{U_i}, x_{P_i}, x_i, x_{F_i})$$

terlihat bahwa $\bar{x} \in \hat{R}_i(H)$ termuat dalam $\bar{x} \in \hat{R}_i(H')$.

terbukti∎

CONTOH 3.8

Diambil contoh 3.7 diketahui bahwa

$\hat{R}_1(1G) = \{ (a,w),(c,m) \}$

$\hat{R}_1(21G) = \{ (a,w),(c,w),(c,m) \}$

jadi $\hat{R}_1(1G) \leq \hat{R}_1(21G)$

Teorema 3.3 menunjukkan bahwa untuk mencari kesetimbangan meta $\hat{E}(G)$ cukup dengan mencari pendapatan rasional meta pada permainan meta tingkat ke-n, yaitu pada 12...nG,dan semua permutasi dari 1,2,...,n. Jadi pada permainan n orang G, untuk mencari pendapatan rasional yang stabil (yang mempunyai kesetimbangan meta) diambil dari gabungan (union) semua kesetimbangan meta untuk permainan tingkat ke-n.

CONTOH 3.9

Diambil contoh 3.7

Permainan dua orang sehingga n=2

permainan meta tingkat ke-2 adalah 12G dan 21G

$\hat{E}\ (12G) = \{ (c,m) \}$

$\hat{E}\ (21G) = \{ (c,m) \}$

$\hat{E}\ (G) = \hat{E}\ (12G) \cup \hat{E}\ (21G)$

$= \{ (c,m) \}$

Pada suatu konflik yang penyelesaiannya menggunakan permainan biasa (dasar) pendapatan yang dihasilkan mungkin berbeda dengan kenyataan yang biasa berlaku, ini disebabkan pada permainan dasar seorang pemain hanya mempertimbangkan pilihannya saja tanpa mempertimbangkan apa yang akan dipilih oleh pemain lain. Pada suatu konflik biasanya pilihan suatu pihak akan turut mempengaruhi keputusan yang diambil oleh pihak lain. Dengan menggunakan permainan meta akan didapatkan kemungkinan-kemungkinan lain sebagai solusi dari suatu konflik yang tidak akan didapatkan pada permainan dasar.

CONTOH 3.10

Prisoners' dilemma

Untuk penyelesaian suatu konflik yang dapat dibentuk dalam permainan dasar 2 orang G, akan digunakan dua cara yaitu : 1. penggunaan permainan asli (biasa)

2. penggunaan permainan meta

Bentuk normal permainan dasar 2 orang G

Diambil dari contoh 2.1.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & 2 \\
 & & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\
1 & \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} (-9,-9) & (0,-10) \\ (-10,0) & (-1,-1) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

1. Penggunaan permainan asli (biasa)

Dari definisi 2.1

Pendapatan rasional untuk pemain 1, $R_1(G)$ diperoleh dengan memaksimalkan pembayaran pemain 1 dalam sebuah kolom.

Pada kolom pertama didapat (c,c),

pada kolom kedua didapat (c,d),

sehingga $R_1(G) = \{ (c,c),(c,d) \}$

Pendapatan rasional untuk pemain 2, $R_1(G)$ diperoleh dengan memaksimalkan pembayaran pemain 2 dalam sebuah baris.

Pada baris pertama didapat (c,c),

pada baris kedua didapat (d,c),

sehingga $R_2(G) = \{ (c,c),(d,c) \}$

Dari definisi 2.2

Pasangan kesetimbangan pada permainan tersebut adalah :

$E(G) = R_1(G) \cap R_2(G)$

$\quad\;\; = \{ (c,c) \}$

2. penggunaan permainan meta.

Menurut teorema 3.3 untuk mencari kesetimbangan meta hanya perlu mencari pendapatan rasional meta pada permainan tingkat ke-2, yaitu 12G dan 21G untuk tiap pemain.

untuk 12G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\max_{x_1} \min_{x_2} v_1(x_1,x_2) \le v_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$x_1 = c \qquad \min_{x_2} v_1(c,x_2) = -9$

$x_1 = d \qquad \min_{x_2} v_1(d,x_2) = -10$

$$\max_{x_1} \min_{x_2} v_1(x_1,x_2) = -9$$

$$-9 \le v_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$v_1(c,c) = -9 \qquad -9 = v_1(c,c)$

$v_1(c,d) = 0 \qquad -9 < v_1(c,d)$

$v_1(d,d) = -1 \qquad -9 < v_1(d,d)$

$\hat{R}_1(12G) = \{ (c,c),(c,d),(d,d) \}$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\min_{x_1} \max_{x_2} v_2(x_1, x_2) \le v_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$\bar{x}_1 = c \qquad \max_{x_2} v_2(c, x_2) = -9$

$\bar{x}_1 = d \qquad \max_{x_2} v_2(d, x_2) = 0$

$$\min_{x_1} \max_{x_2} v_2(x_1, x_2) = -9$$

$$-9 \le v_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$v_2(c,c) = -9 \qquad -9 = v_2(c,c)$

$v_2(d,c) = 0 \qquad -9 < v_2(d,c)$

$v_2(d,d) = -1 \qquad -9 < v_2(d,d)$

$\hat{R}_2(12G) = \{ (c,c),(d,c),(d,d) \}$

$\hat{E}\ (12G) = \{ (c,c),(d,d) \}$

untuk 21G

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\min_{x_2} \max_{x_1} v_1(x_1, x_2) \le v_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$x_2 = c \qquad \max_{x_1} v_1(x_1, c) = -9$

$x_2 = d \qquad \max_{x_1} v_1(x_1, d) = 0$

$$\min_{x_2} \max_{x_1} v_1(x_1, x_2) = -9$$

$$-9 \le v_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$v_1(c,c) = -9 \qquad -9 = v_1(c,c)$

$v_1(c,d) = 0 \qquad -9 < v_1(c,d)$

$v_1(d,d) = -1 \qquad -9 < v_1(d,d)$

$\hat{R}_1(21G) = \{ (c,c),(c,d),(d,d) \}$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\max_{x_2} \min_{x_1} v_2(x_1,x_2) \leq v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$x_2 = c \qquad \min_{x_1} v_2(x_1,c) = -9$

$x_2 = d \qquad \min_{x_1} v_2(x_1,d) = -10$

$$\max_{x_2} \min_{x_1} v_2(x_1,x_2) = -9$$

$$-9 \leq v_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$v_2(c,c) = -9 \qquad -9 = v_2(c,c)$

$v_2(d,c) = 0 \qquad -9 < v_2(d,c)$

$v_2(d,d) = -1 \qquad -1 < v_2(d,d)$

$\hat{R}_2(21G) = \{ (c,c),(d,c),(d,d) \}$

$\hat{E}\ (21G) = \{ (c,c),(d,d) \}$

$\hat{E}\ (G) = \hat{E}\ (21G) \cup \hat{E}\ (12G)$

$\qquad = \{ (c,c),(d,d) \}$

Pasangan kesetimbangan meta pada permainan tersebut adalah $\{ (c,c),(d,d) \}$

Terlihat bahwa pasangan kesetimbangan termuat dalam pasangan kesetimbangan meta. Pada pasangan kesetimbangan meta kemungkinan terdapat pendapatan lain yang dapat dijadikan sebagai solusi permainaan tersebut. Jadi terdapat dua solusi untuk permainan ini yaitu : $\{ (c,c),(d,d) \}$

DEFINISI 3.8

Sebuah pendapatan $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ adalah sebuah kesetimbangan meta yang simetri jika ini merupakan kesetimbangan meta dalam semua permainan lengkap.

Kesetimbangan meta yang simetri adalah stabil untuk semua pemain jika mereka memikirkan permainan dengan cara :

Semua permain memikirkan mengenai permainan meta dimana mereka memilih strategi pilihannya setelah pemain lain, sehingga mereka dapat terlebih dahulu memperkirakan langkah-langkah pemain lain. Mereka mengasumsikan bahwa pemain lain hanya memperkirakan kebijaksanaan mereka. Jika G merupakan permainan dasar 2 orang maka kesimetrian kesetimbangan meta untuk G adalah $\hat{E}$ (21G) $\cap$ $\hat{E}$ (12G). Sehingga untuk contoh 3.10 akan mempunyai kesimetian kesetimbangan meta yaitu kesetimbangan meta itu sendiri. Pada tiap permainan akan mempunyai kesetimbangan meta tetapi belum tentu memiliki kesimetrian. Pada permainan yang tidak mempunyai kesetimbangan, biasanya memiliki kesetimbangan meta tetapi tidak memiliki kesimetrian.(contoh 3.11)

CONTOH 3.11

Berdasarkan contoh 3.2.

$$\begin{array}{llcc} & & \multicolumn{2}{c}{\text{kapal dagang (2)}} \\ & & U & S \\ \text{kapal perang (1)} & \begin{array}{c} U \\ S \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,0) \end{bmatrix}} \end{array}$$

Akan dicari kesetimbangan, kesetimbangan meta dan kesimetrian kesetimbangan meta yang ada dalam permainan ini.

Berdasarkan definisi 2.1 dan 2.2 didapat:

$R_1(G) = \{ (U,U),(S,S) \}$

karena jika $\bar{x}_2 = U$ maka $v_1(U,U) > v_1(S,U)$

$1 > 0$

dan jika $\bar{x}_2 = S$ maka $v_1(S,S) > v_1(U,S)$

$1 > 0$

$R_2(G) = \{ (U,S),(S,U) \}$

karena jika $\bar{x}_1 = U$ maka $v_2(U,U) < v_2(S,U)$

$0 < 1$

dan jika $\bar{x}_1 = S$ maka $v_2(S,S) < v_2(U,S)$

$0 < 1$

$E(G) = R_1(G) \cap R_2(G)$

$= \emptyset$

jadi tidak ada kesetimbangan dalam permainan ini.

Untuk permainan meta.

Untuk 21G

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\min_{x_2} \max_{x_1} v_1(x_1,x_2) \leq v_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$x_2 = U$ $\max_{x_1} v_1(x_1,U) = 1$

$x_2 = S$ $\max_{x_1} v_1(x_1,S) = 1$

$$\min_{x_2} \max_{x_1} v_1(x_1,x_2) = 1$$

$$1 \leq v_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$

$\hat{R}_1(21G) = \{ (U,U),(S,S) \}$

$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\max_{x_2} \min_{x_1} v_2(x_1, x_2) \le v_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$x_2 = U$ $\quad \min_{x_1} v_2(x_1, U) = 0$

$x_2 = S$ $\quad \min_{x_1} v_2(x_1, S) = 0$

$$\max_{x_2} \min_{x_1} v_2(x_1, x_2) = 0$$

$$0 \le v_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$\hat{R}_2(21G) = \{ (U,U),(U,S),(S,S),(S,U) \}$

$\hat{E}\ (21) = \{ (U,U),(S,S) \}$

untuk 12G

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 1 jika

$$\max_{x_1} \min_{x_2} v_1(x_1, x_2) \le v_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$x_1 = U$ $\quad \min_{x_2} v_1(U, x_2) = 0$

$x_1 = S$ $\quad \min_{x_2} v_1(S, x_2) = 0$

$$\max_{x_1} \min_{x_2} v_1(x_1, x_2) = 0$$

$$0 \le v_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$R_1(12G) = \{ (U,U),(S,S),(U,S),(S,U) \}$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ rasional meta untuk 2 jika

$$\min_{x_1} \max_{x_2} v_2(x_1, x_2) \le v_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$\bar{x}_1 = U$ $\quad \max_{x_2} v_2(U, x_2) = 1$

$\bar{x}_1 = S$ $\quad \max_{x_2} v_2(S, x_2) = 1$

$$\min_{x_1} \max_{x_2} v_2(x_1, x_2) = 1$$

$$1 \le v_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$\hat{R}_2(12G) = \{ (U,S),(S,U) \}$

$\hat{E}\ (12G) = \{ (U,S),(S,U) \}$

$\hat{E}(G) = \{(U,U),(S,S),(U,S),(S,U)\}$

Semua pendapatan merupakan kesetimbangan meta.

$\hat{E}(21G) \cap \hat{E}(12G) = \emptyset$

Tidak ada kesetimbangan meta yang simetris.

Contoh 3.11 memperlihatkan psikologis dibalik bermacam-macam permainan meta. Dalam 12G, pemain 2 mengasumsikan ia dapat mememperkirakan langkah pemain 1, sementara itu pemain 1 berasumsi ia dapat memperkirakan kebijaksanaan pemain 2. Jika 2 akan pergi berlawanan arah dengan 1, tidak ada yang dapat dilakukan 1 untuk menentang kebijaksanaan itu, demikian juga sebaliknya dalam 21G.