2.1 Himpunan

Definisi.1

Himpunan adalah sekelompok objek-objek yang berada dalam satu kesatuan. Objek-objek ini dinamakan dengan elemen atau anggota dari himpunan. Suatu himpunan dilambangkan dengan huruf besar dan elemen-elemennya dengan huruf kecil.

Definisi.2

Himpunan semesta adalah suatu himpunan dari mana himpunan lainnya dibentuk. Himpunan semesta biasanya dilambangkan dengan huruf S atau X.

Definisi.3

Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B, jika setiap elemen A juga elemen B dan dinotasikan dengan $A \subseteq B$. Jika A bukan himpunan bagian B, dinotasikan dengan $A \nsubseteq B$. Jika $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$ yaitu setiap elemen A dalam B dan ada paling sedikit satu elemen B yang tidak dalam A, maka dinamakan A himpunan bagian sejati B, dan dinotasikan dengan $A \subset B$. Dua himpunan A dan B dikatakan sama, jika $A \subset B$ dan $B \subset A$.

Definisi 4

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen sama sekali dan dinotasikan dengan 0.

Definisi 5

Union himpunan A dan B adalah himpunan yang elemen-elemennya terdiri dari semua elemen himpunan A saja, atau elemen-elemen himpunan B saja atau semua elemen-elemen di himpunan A dan B dan dinotasikan dengan $A \cup B$. Secara matematis ditulis :$A \cup B = \{ x | x \in A$ atau $x \in B \}$

Definisi 6

Irisan himpunan A dan himpunan B adalah himpunan yang elemen-elemennya terdiri dari elemen-elemen himpunan A yang sekaligus elemen-elemn himpunan B dan dinotasikan $A \cap B$. Secara matematis ditulis :$A \cap B = \{ x | x \in A$ dan $x \in B \}$

Definisi 7

Beda himpunan dan himpunan B adalah himpunan yang elemen-elemennya terdri dari himpunan A tetapi tidak merupakan elemen himpunan B dan dinotasikan dengan $A - B$.Secara matematis ditulis : $A - B = \{ x | x \in A$ atau $x \notin B \}$.

Definisi.8

Jika A suatu himpunan dan X adalah himpunan semestanya, maka himpunan komplemen A adalah himpunan yang elemen-elemennya merupakan himpunan X tetapi bukan merupakan elemen himpunan A, dan dinotasikan dengan A^c. Secara matematis ditulis : $A^c = \{x | x \in X \text{ dan } x \notin A\}$.

Definisi.9

Diberikan suatu himpunan A, maka himpunan kuasa dari A adalah himpunan dari semua himpunan bagian dari A, dan dinotasikan dengan 2^A.

Definisi.10

Jika I adalah suatu himpunan indeks sehingga A_i adalah himpunan berindeks untuk setiap $i \in I$, maka dinotasikan $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x |$ ada $i \in I$ sehimgga $x \in A_i\}$.

Definisi.11

Pergandaan Cartesius dari himpunan A dan B, dinotasikan A X B adalah himpunan pasangan berurutan $\{(a,b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$.

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ merupakan himpunan, maka n-fold pergandaan Cartesius $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ adalah himpunan semua urutan n-tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dengan $a \in A_i$ untuk

$i=1,2,\ldots,n$. Pergandaan Cartesius dari himpunan A dan B dinamakan relasi biner.

2.2 Relasi

Definisi.12

Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan bagian dari A X B. Jika A=B, maka dikatakan relasi pada A. Jika R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka dinotasikan a R b, untuk $(a,b) \in R$.

Definisi.13

Diberikan himpunan A, dan R adalah relasi pada A. Dikatakan bahwa relasi R adalah :

1). Refleksif, jika a R a untuk semua $a \in A$.

2). Simetris, jika a R b maka b R a untuk $a,b \in A$.

3). Transitif, jika a R b dan b R c maka a R c untuk $a,b,c \in A$. Relasi yang meliputi 1). 2). 3). di atas dinamakan relasi ekivalensi.

Contoh.1

Relasi kesejajaran garis-garis lurus pada bidang datar merupakan relasi ekivalensi.

2.2.1 Penutup relasi

Definisi.14

k-fold pergandaan dari suatu relasi R (pada himpunan A) dinotasikan R^k, didefinisikan sebagai berikut:

1. a R^1b jika dan hanya jika a R b.
2. a R^ib jika dan hanya jika ada c dalam A sehingga a R c dan c R^{i-1} b untuk i>1.

Definisi di atas merupakan definisi berulang. Andaikan bahwa a R^3 b. Dengan definisi 14.1, maka ada c_1 sehingga a R c_1 dan c_1 R^2 b. Dengan definisi 14.1 lagi, ada c_2 sehingga c_1 R $c_2$dan c_2 R^1b. Terakhir dengan definisi 14.2, maka ada c_2 R b. Jika a R^3 b maka ada barisan elemen-elemen c_1, c_2, dalam A sehingga a R c_1, c_1 R c_2 dan c_2 R b.

Definisi.15

Diberikan himpunan A dan R adalah relasi pada A, maka R^+ adalah penutup transitif dari relasi R. Didefinisikan a R^+ b jika dan hanya jika a R^i b untuk i≥i.

Definisi.16

Diberikan himpunan A dan R adalah relasi pada A, maka R^* adalah penutup refleksif-transitif dari relasi R. Didefinisikan a R^* b sebagai berikut :

1. a R a untuk semua $a \in A$.

2. a R^* b jika a R^+ b.

Definisi 17

Didefinisikan R dengan menyatakan a R^0b jika a= b, sehingga a R^* b jika a R^i b untuk i>0.

Contoh 2

Diberikan himpunan A={1,2,3} dan R relasi pada A dengan R ={(1,2),(2,2),(2,3)}. Maka :

R^+ = {(1,2),(2,2),(2,3),(1,3)}

R^* = {(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)}.

2.3 Fungsi/Pemetaan

Definisi 18

Suatu pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang pada setiap anggota A menentukan dengan tunggal suatu anggota B.

2.4 Graph berarah

Definisi 19

Suatu graph berarah adalah himpunan pasangan berurutan (V,E) dengan V adalah himpunan titik(node) dan tidak kosong dan E adalah himpunan garis(edge) yang menghubungkan dua titik. Garis dari v_1 ke v_2

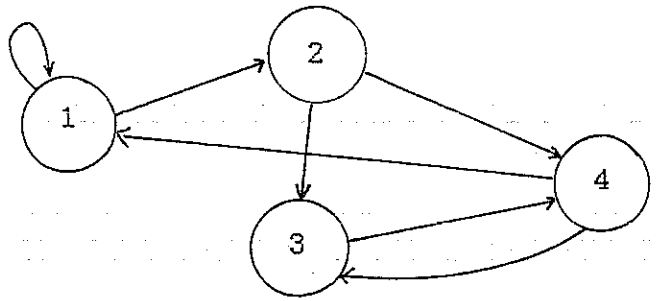
dengan $v_1 \longrightarrow v_2$ dengan $(v_1,v_2) \in E$ dan $v_1, v_2 \in V$.

Jika dalam graph berarah antara dua titik terdapat lebih dari satu garis yang menghubungkan kedua titik tersebut dinamakan multi graph berarah.

Contoh.3

Diberikan graph berarah G =(V,E) dengan V={1,2,3,4} dan E ={(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,1),(4,3)}.

Graph berarahnya adalah :



Gbr 1. Graph berarah G=(V,E).

Jika garis dari v_i ke v_i dengan $v_i \in V$ maka dinamakan loop. Dalam contoh.3 di atas garis (1,1) merupakan loop. Jika (v_1,v_2) merupakan garis dengan $v_1,v_2 \in V$, maka v_1 dinamakan titik awal dan v_2 dinamakan titik akhir.

2.5 Kata(string) dan bahasa(language)

Dimulai dengan konsep alpabet yaitu simbol-simbol yang muncul pada kata. Istilah simbol diidentikkan dengan karakter atau huruf sedangkan kata dengan string.

Suatu kata merupakan barisan simbol berhingga pada alpabet. Barisan simbol aabbc, adalah kata pada alpabet $\Sigma=\{a,b,c\}$. Ada suatu kata yang tidak mempunyai simbol dan dinotasikan secara khusus yaitu e. Kata ini dinamakan dengan kata kosong.

Agar tidak membingungkan di dalam istilah pemakaian kata dan simbol, maka akan digunakan huruf a,b,c, dan numerik untuk mewakili simbol, dan huruf u,v,w,x,y,z untuk mewakili kata. Ini berlaku jika tidak dinyatakan lain.

Definisi.20.

Suatu kata pada alpabet Σ adalah sebagai berikut:

1). e adalah suatu kata pada alpabet Σ.

2). Jika x adalah kata pada alpabet Σ dan $a \in \Sigma$ maka xa adalah kata.

Dapat dikatakan bahwa e merupakan kata pada setiap alpabet. Jika x adalah kata pada alpabet Σ, maka panjang kata x dinotasikan dengan $|x|$ adalah banyaknya elemen simbol pada kata(string) x. Misal barisan simbol aabbc di atas dinyatakan dengan kata w, maka $|w| = 5$.

Kebalikan dari suatu kata x dinotasikan dengan x^T adalah kata yang ditulis dalam urutan terbalik. Jika $x = a_1a_2a_3 \ldots a_n$ dengan $a_i \in \Sigma$ $(i=1,2,3,\ldots n)$, maka $x^T = a_na_{n-1}\ldots a_1$. Jika e adalah kata kosong maka $e^T = e$.

Andaikan x dan y merupakan kata pada alpabet Σ. Penjalinan (concatenation) dari kata x dan y dinotasikan dengan xy adalah kata x dikuti oleh kata y.

Definisi.21

Untuk setiap kata w dan bilangan i $(i \geq 0)$, maka kata w^i didefinisikan sebagai berikut :

1). $w^0 = e$

2). $w^{i+1} = w^iw$ untuk $i \geq 0$

Contoh.4

Diberikan kata x = 001 dan y = 000, maka :

x^3 = 001001001 dan xy = 001000.

Andaikan x dan y sebarang kata pada alpabet Σ, maka x adalah awalan(prefix) dari kata xy,dan y adalah akhiran(suffix) dari kata xy. x juga merupakan subkata(substring) dari xy. Kata x dapat menjadi kata kosong sehingga setiap kata merupakan subkata dari kata itu sendiri. Kata ab adalah awalan dan subkata dari abc. Catatan bahwa kata kosong merupakan awalan, akhiran dan

subkata dari setiap kata. Jadi kata abbe=abeb=eabb=abb.

Definisi.22

Diberikan suatu alpabet Σ. Perulangan(iteration) Σ dinotasikan dengan Σ^*, adalah himpunan semua kata pada alpabet Σ termasuk kata kosong. Σ bebas e dinotasikan dengan Σ^+. adalah himpunan semua kata pada alpabet Σ kecuali kata kosong.

Contoh.5

Diberikan $\Sigma = \{0,1\}$, maka :

$\Sigma^* = \{ e,0,1,00,11,00,10,01,\ldots \}$

$\Sigma^+ = \{ 0,1,00,11,01,10,\ldots \}$

2.5.2 Bahasa(language)

Bahasa merupakan himpunan kata pada alpabet Σ. Jadi setiap bahasa merupakan himpunan bagian dari Σ^*.

Definisi.23

Diberikan bahasa L_1 pada alpabet Σ_1 dan L_2 pada alpabet Σ_2 , maka penjalinan L_1L_2 adalah :

$$L_1 L_2 = \{ xy \mid x \in L \text{ dan } y \in L \}.$$

$$L_1\{e\}=\{e\}L_1 = L_1 \quad \text{dan} \quad L_1\emptyset = \emptyset L_1 = \emptyset.$$

Definisi.24

Perulangan bahasa L dinotasikan dengan L^*, didefinisikan sebagai berikut :

1). $L^0 = \{e\}$

2). $L^n = LL^{n-1}$ untuk $n \geq 1$

3). $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$.

Contoh.6

Diberikan $L_1=\{0,101\}$ dan $L_2=\{10,11,0110\}$ pada alpabet $\Sigma=\{0,1\}$. Maka :

$L_1L_2=\{010,011,00110,10110,10111,1010110\}$

$L^*_1 = \bigcup_{n\geq 0} L^n = L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup \ldots$

$=\{e\} \cup \{0,101\} \cup \{00,0101,1010,101101\} \cup \ldots$

$=\{e,0,101,00,0101,1010,101101, \ldots\}$.