BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Himpunan

Definisi 1 :

1.1. Suatu elemen a menjadi anggota himpunan H , maka dituliskan dengan $a \in H$.

1.2. Suatu himpunan dengan banyaknya anggota berhingga disebut himpunan berhingga .

1.3. Kardinalitas suatu himpunan berhingga H ,di maksudkan sebagai banyaknya anggota himpunan H dan dinotasikan dengan $|H|$.

1.4. Himpunan K disebut himpunan bagian dari himpunan H, dengan tanda $K \subset H$, jika setiap anggota K merupakan anggota H. jadi $K \subset H$ bhb $(\forall x).\ x \in K \Rightarrow x \in H$.

2.2. Relasi ekwivalensi

Definisi 2 :

Suatu relasi R adalah suatu aturan (hubungan) yang menyangkut anggota yang satu dengan yang lain dalam suatu semesta S (keseluruhan dari obyek-obyek yang dibicarakan). Atau untuk suatu $a,b \in S$ yang berada dalam relasi R dituliskan sebagai "aRb" (dibaca : a berada dalam relasi R dengan b)

Definisi 3 :

3.1. Relasi R disebut Refleksif bila untuk setiap anggota $a \in S$, berlaku aRa. Atau R refleksif bhb ($\forall a \in S$). aRa.

3.2. Relasi R disebut simetris bila untuk setiap anggota $a,b \in S$ berlaku : jika aRb maka bRa. atau : R simetris bhb ($\forall a,b \in S$) aRb $\Rightarrow$ bRa.

3.3. Relasi R disebut transitif bila untuk setiap anggota $a,b,c \in S$ berlaku : jika aRb dan bRc maka aRc. atau : R transitif bhb ($\forall a,b,c \in S$). aRb & bRc $\Rightarrow$ aRc

3.4. Relasi R disebut relasi ekwivalensi jika relasi R sekaligus memiliki sifat refleksif, simetris dan transitif.

Contoh 2 :

Relasi kongruensi antara bilangan-bilangan bulat positif, negatif dan nol, yang di definisikan sebagai : $a \equiv b \pmod m$ bhb $a-b=km$ ($k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$) atau a kongruen b modulo m (m=bilangan asli) jika a-b adalah kelipatan m. Akan ditunjukkan bahwa relasi tersebut merupakan relasi ekwivalensi :

1. $a-a=0=0.m$. Jadi $\forall a$ berlaku $a \equiv a \pmod m$ dan menurut definisi 3.1., R adalah refleksif.

2. Jika $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ maka $a-b=km$ dan $b-a=-k.m$ (suatu kelipatan negatif dari m). Jadi $\forall a,b$ berlaku : jika $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ maka $b \equiv a (\mathrm{mod}\ m)$ dan menurut definisi 3.2., R adalah simetris.

3. Jika $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ dan $b \equiv c (\mathrm{mod}\ m)$ maka $a-b=k_1 m$ dan $b-c=k_2 m$. Maka $(a-b)+(b-c)=k_1 m+k_2 m$. Atau $(a-c)=(k_1+k_2)m=k.m$ (kelipatan dari m). sehingga $a \equiv c (\mathrm{mod}\ m)$. Jadi $\forall a,b,c$ berlaku : jika $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ dan $b \equiv c (\mathrm{mod}\ m)$ maka

$a \equiv c \pmod{m}$. Dan menurut definisi 3.3., R adalah transitif.

Dari 1,2 dan 3 tersebut, maka menurut definisi 3.4. relasi kongruensi diatas merupakan relasi ekwivalensi.

Teorema 1 :

Suatu relasi ekwivalensi antara anggota-anggotanya dalam semesta S mengakibatkan adanya penggolongan dalam S.

Bukti :

Misal relasi tersebut adalah R. Maka menurut definisi 3, R memiliki sifat refleksif, simetris dan transitif.

Ambil elemen-elemen x dan a dalam S. Misal semua elemen x yang berada dalam relasi R dengan a dikumpulkan dalam himpunan Sa. Jadi $Sa=\{x \in S \mid xRa\}$. Himpunan Sa ini tidak kosong, sebab R refleksif (jadi aRa), sehingga $a \in Sa$ dan Sa sekurang-kurangnya memiliki satu anggota.

Dengan demikian disimpulkan bahwa setiap anggota dari semestanya pasti berada dalam sekurang-kurangnya satu golongan/klas yaitu klas yang memuat dirinya sendiri.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa :

"jika 2 klas/golongan itu berserikat pada satu elemen maka ke-2 klas itu berhimpit" (2.1)

Misal Sa dan Sb berserikat pada elmen c. Karena $c \in Sa$ maka cRa. Dan karena R simetris, jika cRa maka aRc. Karena $c \in Sb$. Selanjutnya, untuk sembarang elemen $p \in Sa$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa :

"jika 2 klas/golongan itu berserikat pada satu elemen maka ke-2 klas itu berhimpit" (2.1)

Misal Sa dan Sb berserikat pada elmen c. Karena $c \in Sa$ maka cRa. Dan karena R simetris, jika cRa maka aRc. Karena $c \in Sb$, maka cRb. Dari aRc dan cRb maka aRb, sebab R transi. Jadi $a \in Sb$. Selanjutnya, untuk sebarang elemen $p \in Sa$ berlaku pRa. Sehingga dari pRa dan aRb maka pRb. Berarti $Sa \subset Sb$ (2.2)

Dengan jalan yang sama, dan mengingat sifat simetris dari R, akan diperoleh $Sb \subset Sa$

Dari (2.2) dan (2.3) maka Sa=Sb. Jadi terbukti pernyataan (2.1) bahwa Sa dan Sb berimpit.

Kontraposisi dari pernyataan (2.1) berbunyi :

"jika klas-klas itu tidak ber-impit maka klas-klas tersebut tidak berserikat atau saling asing".

Dengan kontraposisi tersebut, maka terbuktilah teorema secara lengkap.

Catatan 1 :

Penggolongan dalam S sebagaimana pada teorema 1, dimaksudkan bahwa S terbagi atas himpunan-himpunan bagian (klas-klas/golongan-golongan) yang masing-masing tidak kosong dan saling asing sedemikian sehingga setiap anggota dari S berada dalam salah satu klas dari S. Klas-klas ini disebut klas-klas ekwivalensi dan biasanya disajikan dengan $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, ...

Contoh 3 :

Relasi ekwivalensi dalam contoh 2 dengan mengambil $m=5$. Maka S terbagi atas klas-klas ekwivalensi $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ dan $\overline{4}$.

Sebab misal diambil sebarang elemen a. Andaikan $a \in \overline{2}$ maka $a \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5)$. Yaitu $a-2=k.5$ atau $a=k.5+2$. Jadi anggota dari $\overline{2}$ terdiri atas kelipatan 5 ditambah 2. Yaitu 2,7,12, dan seterusnya. Dengan cara sama diperoleh $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{3}$ dan $\overline{4}$. Dalam hal ini tidak akan terdapat klas-klas $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$,... sebab bilangan 5,6,7,... dapat dikelompokkan dalam klas-klas $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ atau $\overline{4}$.

Misal $5 = 1.5 + 0$ maka $5 \in \overline{0}$, $6 = 1.5 + 1$ maka $6 \in \overline{1}$ dan seterusnya.

2.3. Pemetaan (fungsi/Mapping)

Definisi 4 :

Suatu fungsi f dari himpunan S (S=daerah sumber/domain) ke himpunan T(T=daerah kawan/kodomain) adalah suatu aturan yang pada setiap anggota dari S menentukan dengan tunggal satu anggota dari T, atau :

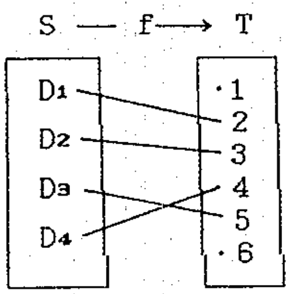
$$f:S \longrightarrow T \text{ bhb } (\forall s \in S)\ (\exists!\, t \in T).\ f(s)=t$$

Contoh 4 :

Diketahui $S=\{D_1,D_2,D_3,D_4\}$ himpunan 4 Dadu

$T=\{1,2,3,4,5,6\}$ himpunan bilangan mata dadu

Satu lemparan dari 4 dadu menentukan suatu fungsi f dari S ke T, yang ditunjukkan dalam skema berikut :



jadi $f(D_1)=2, f(D_2)=3,$
$f(D_3)=5, f(D_4)=4$

Catatan 2 :

1. Suatu fungsi merupakan kejadian khusus dari suatu relasi/hubungan.

2. Himpunan $t \in T$ disebut bayangan dari $s \in S$ oleh f dan himpunan $s \in S$ disebut bayangan invers dari $t \in T$, dinyatakan dengan $f^{-1}(t)=\{s \in S \mid f(s)=t\}$

Sehingga untuk Contoh 4 diatas, $f^{-1}(2)$: D_1 ,$f^{-1}(3)$: D_2 , $f^{-1}(5)$: D_3 dan $f^{-1}(4)$: D_4 .

Definisi 5 :

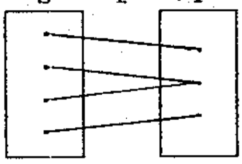
5.1. Suatu fungsi yang setiap $t \in T$ berasal dari suatu $s \in S$ disebut fungsi yang surjektif. Atau :

$f:S \longrightarrow T$ surjektif bhb $(\forall t \in T)(\exists s \in S).f(s)=t$

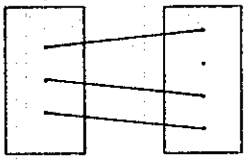
5.2. Suatu fungsi yang setiap $t=f(s) \in T$ hanya mempunyai satu kawan di dalam S disebut fungsi yang injektif. Jadi untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ berlaku $f(s_1)=f(s_2) \Rightarrow s_1=s_2$.

5.3. Suatu fungsi yang surjektif sekaligus injektif, disebut fungsi yang bijektif. Yaitu setiap anggota dalam S menentukan dengan **tunggal satu elemen dalam T dan sebaliknya.**

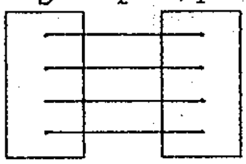
Lihat diagram berikut :



Surjektif



Injektif



Bijektif

Contoh 5 :

Diketahui : S=himpunan bilangan asli dan T=himpunan bilangan bulat genap positif dan f di definisikan sebagai $f:s\in S \longrightarrow 2s\in T$. Akan ditunjukkan bahwa f adalah fungsi yang bijektif :

$$f \begin{array}{ccccccc} S & : & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ T & : & 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots & 2n \end{array}$$

* f adalah fungsi sebab setiap anggota $s\in S$ mempunyai kawan yang tunggal dalam T, yaitu $2s\in T$. Jadi jika $s_1=s_2$ maka $2s_1=2s_2$ untuk $s_1,s_2\in S$.

* f adalah injektif sebab jika $2s_1=2s_2$ maka $s_1=s_2$ untuk $s_1,s_2\in S$.

* f adalah surjektif sebab untuk setiap bilangan bulat positif genap dalam T dapat ditemukan suatu $s\in S$ sedemikian sehingga $t=f(s)=2s$. Kawan dari t ini adalah $s=t/2$.

Sehingga menurut definisi 5, f adalah fungsi yang bijektif.

Definisi 6 :

Jika $D:\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$, $R=\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$, $\emptyset:D\longrightarrow R$ adalah fungsi dari D ke R dan $R^D=\{\emptyset|\emptyset:D\longrightarrow R\}$ himpunan semua fungsi yang mungkin dari D ke R, maka banyaknya anggota dari R^D adalah m^n. Dinotasikan dengan $|R^D| = |\{\emptyset | \emptyset : D \longrightarrow R\}| = m^n$ dan disebut kardinalitas himpunan R^D

Definisi 7 :

Suatu fungsi identitas i adalah suatu fungsi bijektif yang membawa setiap anggota $s \in S$ ke dirinya sendiri.

jadi $i : s \in S \longrightarrow i(s) = s \in S$.

Definisi 8 :

Dua fungsi $f : S \longrightarrow T$ dan $g : T \longrightarrow V$ dapat digandakan menjadi fungsi gf dengan aturan : s dikerjakan pada f duhulu dan hasilnya, yaitu f(s) dikerjakan pada g. Sehingga gf(s) : g(f (s)). Lihat skema :

$$\begin{array}{ccccc} S & & T & & V \\ s & \xrightarrow{f} & f(s) & \xrightarrow{g} & g(f(s)) \\ s & & \xrightarrow{gf} & & gf(s) \end{array}$$

Contoh 6 :

Misal f dan g adalah fungsi-fungsi dari himpunan bilangan riil ke himpunan bilangan riil yang ditentukan oleh rumus : $x \xrightarrow{f} f(x) = 2x$

$x \longrightarrow g(x) = x + 1$

Maka fungsi gf dan fg dapat ditentukan demikian :

$x \xrightarrow{f} 2x \xrightarrow{g} 2x+1$ dan $x \xrightarrow{g} x+1 \xrightarrow{f} 2(x+1)$

$x \xrightarrow{gf} 2x + 1$ $\quad$ $x \xrightarrow{fg} 2(x+1)$

jadi $gf : x \longrightarrow gf(x) = 2x+1$

$fg : x \longrightarrow fg(x) = 2(x+1)$

Catatan 3 :

Dari contoh 6 diatas, terlihat bahwa $fg \neq gf$. Sehingga pergandaan suatu fungsi, pada umumnya tidak komutatif.

Teorema 2 :

Pergandaan fungsi-fungsi mempunyai sifat assosiatif, yaitu $(fg)h = f(gh)$

Bukti :

Ambil suatu anggota $s \in S$. Menurut definisi 8, maka $(fg)h\ (s)=(fg)(h(s))=f(g(h(s)))$ dan $f(gh)(s)=(f((gh)(s))=f(g(h(s)))$. Jadi $(fg)h\ (s)=f(gh)\ (s)$ atau $(fg)h=f(gh)$.

Contoh 7 :

Misal fungsi f dan g ditentukan seperti pada contoh 6. Sedang fungsi h ditentukan oleh rumus :

$x \longrightarrow h(x)=10^x$. Maka

$x \xrightarrow{g} x+1 \xrightarrow{f} 2(x+1)$ dan $x \xrightarrow{h} 10^x \xrightarrow{g} 10^x+1$

$x \xrightarrow{\quad fg \quad} 2(x+1)$ $\qquad x \xrightarrow{\quad gh \quad} 10^x+1$

$x \xrightarrow{h} 10^x \xrightarrow{fg} 2(10^x+1)$ $\qquad x \xrightarrow{gh} 10^x+1 \xrightarrow{f} 2(10^x+1)$

$x \xrightarrow{\quad (fg)h \quad} 2(10^x+1)$ $\qquad x \xrightarrow{\quad f(gh) \quad} 2(10^x+1)$

Jadi $(fg)h=f(gh)=2(10^x+1)$

Teorema 3 :

Jika f^{-1} adalah fungsi invers dari f maka berlaku : $f^{-1}f=i=ff^{-1}$ dengan i = fungsi identitas

Bukti :

Misal $f:S \longrightarrow T$. Selanjutnya ambil $s \in S$ dan $t \in T$, maka menurut definisi 8 :

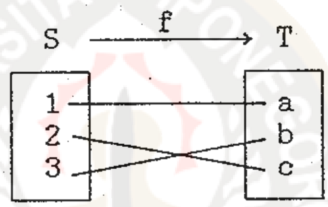
$s \xrightarrow{f} f(s) \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(f(s))$ dan $t \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(t) \xrightarrow{f} f(f^{-1}(t))$

$s \xrightarrow{f^{-1}f} (f^{-1}f)(s)$ $\qquad t \xrightarrow{ff^{-1}} (f\,f^{-1})(t)$

Jadi $f^{-1}(f(s))=(f^{-1}f)(s)$ dan $f(f^{-1}(t))=(ff^{-1})(t))$. Karena $f(s)=t$ maka $f^{-1}(t)=s$. Sehingga $f^{-1}(f(s))=f^{-1}(t)=s$ dan $f(f^{-1}(t))=f(s)=t$. Dengan menggunakan definisi 7 didapat : $f^{-1}(f(s))=(f^{-1}f)(s)=s=i(s)$ dan $f(f^{-1}(t))=(ff^{-1})(t)=t=i(t)$ atau $f^{-1}f=i=ff^{-1}$ (terbukti)

<u>Contoh 8 :</u>

Diketahui :



Ambil suatu elemen, misal $1 \in S$, maka $f(1)=a$ dan $f^{-1}(a)=1$. Sehingga $(f^{-1}f)(1)=f^{-1}(f(1))=f^{-1}(a)=1=i(1)$. Jadi $f^{-1}f=i$. Demikian juga $(ff^{-1})(a)=f(f^{-1}(a))=f(1)=a=i(a)$. Jadi $ff^{-1}=i$.

<u>Catatan 4 :</u>

Suatu fungsi f dari D ke R, yaitu $f : D \longrightarrow R$, dengan $D:\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$ dan $R:\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$ dapat dituliskan dengan $f=d_1 \longrightarrow f(d_1), d_2 \longrightarrow f(d_2),\ldots,f(d_n)$ atau

$$f=\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_n \\ f(d_1) & f(d_2) & \ldots & f(d_n) \end{pmatrix}$$

2.4. Permutasi

Definisi 9 :

Suatu permutasi θ adalah pemetaan bijektif dari suatu himpunan berhingga $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$ ke dirinya sendiri dan dituliskan dengan $\theta = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_n \\ \theta(d_1) & \theta(d_2) & \ldots & \theta(d_n) \end{pmatrix}$ atau $\theta: 1 \longrightarrow \theta(d_1), 2 \longrightarrow \theta(d_2), \ldots, n \longrightarrow \theta(d_n)$.

Contoh 9 :

Diketahui : $D=\{1,2,3\}$, maka pemetaan $\theta : D \longrightarrow D$ dibawah ini merupakan permutasi. Yaitu :

$$1 \xrightarrow{\theta} \theta(1) = 3 \qquad \text{atau} \qquad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 \longrightarrow \theta(2) = 1$$

$$3 \longrightarrow \theta(3) = 2$$

Definisi 10 :

Dua permutasi θ_1 dan θ_2 dapat digandakan menjadi permutasi $\theta_1\theta_2$ dengan aturan : permutasi θ_2 dikerjakan dahulu, baru kemudian dikerjakan pada θ_1.

Contoh 10 :

Diketahui : $\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ maka :

$\theta_1\theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Demikian juga $\theta_2\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Menurut definisi 10, karena θ_2 maka $1 \longrightarrow 2$. Dan karena θ_1 maka $2 \longrightarrow 1$. Sehingga $\theta_1\theta_2$ membawa $1 \longrightarrow 1$. Secara keseluruhan diberikan pada skema berikut :

$\theta_1\theta_2$: dan $\theta_2\theta_1$:

$$1 \xrightarrow{\theta_2} 2 \xrightarrow{\theta_1} 1 \qquad\qquad 1 \xrightarrow{\theta_1} 3 \xrightarrow{\theta_2} 3$$

$$2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \qquad\qquad 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$$

$3 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2$ $\qquad$ $3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$

Jadi $\theta_1\theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\theta_2\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Catatan 5 :

Dari contoh 10, terlihat $\theta_1\theta_2 \neq \theta_2\theta_1$. Sehingga untuk pergandaan permutasi pada umumnya tidak komu tatip.

Definisi 11 :

Permutasi $\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \ldots & d_{n-1} & d_n \\ d_2 & d_3 & d_4 & \ldots & d_n & d_1 \end{pmatrix}$, yaitu dengan $d_1 \longrightarrow d_2 \longrightarrow d_3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow d_{n-1} \longrightarrow d_n \longrightarrow d_1$ disebut suatu sikel dan ditulis $(d_1\ d_2\ d_3\ \ldots\ d_n)$

Contoh 11 :

Diketahui : Permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Maka $1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 1$ menghasilkan sikel (14527)

$3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3$ menghasilkan sikel (36)

$8 \longrightarrow 8$ menghasikan sikel (8)

$9 \longrightarrow 9$ menghasilkan sikel (9)

Jadi permutasi tersebut bisa ditulis dengan (14527)(36)(8)(9).

Teorema 4 :

Setiap permutasi dapat diuraikan atas sikel-sikel yang saling asing.

Bukti :

Misal permutasinya adalah P dan teorema ini akan dibuktikan dengan induksi matematik. Yaitu :

1. jikaPterdiri atas 1 elemen, maka teorema benar.

2. Misal teorema benar untuk P dengan banyak

elemen kurang dari n elemen. Akan dibuktikan bahwa teorema juga benar untuk permutasi yang terdiri atas n elemen.

Ambil anggota a_1. Andaikan $a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_3 \longrightarrow \; \ldots \; \longrightarrow a_r$, maka pada seterusnya a_r pasti dibawa ke salah satu diantara $a_1, a_2, \ldots, a_r$ dan haruslah ke a_1. Sebab andaikan a_r dibawa ke salah satu diantara $a_2, a_3, a_4 \ldots, a_r$ maka hal ini bertentangan dengan pengertian permutasi sebagai fungsi bijektif. Maka diperoleh $a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_3 \ldots \longrightarrow a_r \longrightarrow a_1$, atau $(a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_r)$. Berarti P = $(a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_r)$ Q, dengan Q adalah sikel dengan banyak elemen kurang dari n, Jadi P terbagi atas sikel-sikel yang saling asing.

Sehingga menurut hipotesa induksi matematik, terbukti teorema.

Contoh 12 :

Diketahui : Permutasi $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 3 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$= (125)(3746)(8)(9)$

Berarti P terbagi atas 4 sikel yang saling asing, yaitu (125),(3746),(8) dan (9).

2.5. Grup dan Grup Permutasi

Definisi 12 :

Misal H adalah suatu himpunan yang tidak kosong. Suatu operasi biner * dalam H adalah suatu aturan yang menentukan setiap pasangan $x, y \in H$ tepat pada satu elemen

$x*y \in H$.

Contoh 13 :

Diketahui : R=himpunan bilangan riil. Didefinisikan $*$ dengan aturan $x*y=xy$, untuk setiap $x,y \in R$. Maka untuk 3 dan 5 dalam R, $3*5 = 15 \in R$

6 dan 7 dalam R, $6*7 = 42 \in R$ dan seterusnya.

Definisi 13 :

Suatu grup G adalah suatu himpunan G dengan suatu operasi $*$ dalam G yang memenuhi sifat-sifat :

1. Tertutup : untuk setiap a,b dalam G maka $a*b=c$, dengan $c \in G$
2. Assosiatif ; untuk setiap a,b,c dalam G berlaku $a*(b*c)=(a*b)*c$
3. Terdapat elemen e dalam G yang memenuhi $e*a = a*e = a$ untuk setiap a dalam G, elemen e disebut elemen **identitas** .
4. Setiap elemen $a \in G$ mempunyai invers, yaitu $a^{i} \in G$ sedemikian sehingga $a^{i} * a = a * a^{i} = e$; **Elemen a^{i} disebut elemen invers dari a .**

Catatan 6 :

Suatu grup dengan banyaknya anggota berhingga disebut grup berhingga.

Definisi 14 :

Order suatu grup berhingga G dimaksudkan sebagai banyaknya anggota dari G, dan dituliskan dengan $|G|$.

Definisi 15 :

Suatu grup permutasi G dari himpunan berhingga A adalah himpunan permutasi-permutasi dari elemen-elemen dalam A yang membentuk suatu grup dibawah operasi pergandaan.

Contoh 15 :

Diketahui : A={1,2} dan G={e,a} dengan $e=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ dan $a=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ Maka G adalah grup permutasi, sebab :

1. Tertutup ; Misal $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \in G$
2. Assosiatif ; Misal untuk $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \in G$

   maka $\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ dan

   $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
3. Terdapat elemen identitas, yaitu $e=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \in G$
4. Setiap elemen dalam G mempunyai invers, yaitu

   $e=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ inversnya $e=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. sebab $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = e$

   $a=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ inversnya $a=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. sebab $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = e$

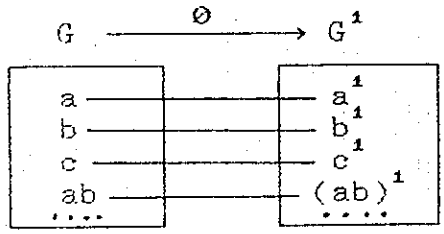
Jadi G merupakan grup permutasi dari himpunan A. Sedang order grup tersebut adalah $|G| = 2$.

Definisi 16 :

Suatu homomorfisma Ø dari grup G ke grup G^1 adalah suatu pemetaan dari G ke G^1 yang memenuhi $Ø(ab)=Ø(a)Ø(b)$ untuk setiap a,b dalam G, dengan G dan G^1 merupakan grup - grup terhadap pergandaan.

Contoh 16 :

Diketahui :



Misal G grup terhadap gandaan, dan $G^1=\{a\in G \mid a^1=a^n, n=\text{bilangan bulat} \neq 0\}$ maka $\varnothing : G \longrightarrow G^1$ adalah homomorfisma sebab : $a \longrightarrow \varnothing(a) = a^1 = a^n$

$$b \longrightarrow \varnothing(b) = b^1 = b^n$$

$$ab \longrightarrow \varnothing(ab) = (ab)^1 = (ab)^n = a^n b^n$$

$$= \varnothing(a)\varnothing(b)$$

2.6. Indeks Sikel Suatu Grup Permutasi

Definisi 17 :

Jika G suatu grup permutasi dari himpunan $D=\{d_1, d_2, \ldots d_n\}$ maka indeks sikel dari G adalah :

$$Z(G\ ;\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} s_1^{\lambda_1(g)} s_2^{\lambda_2(g)} \ldots s_n^{\lambda_n(g)} \qquad (2.4)$$

dengan : $s_i^{\lambda_i(g)}$ = sikel dengan panjang i dan terdapat sebanyak λ_i dalam permutasi $g \in G$

$|G|$ = order grup permutasi G

Catatan 7 :

1. Panjang sikel adalah banyaknya elemen yang terdapat dalam sikel tersebut.

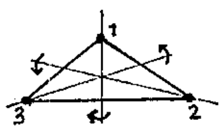
2. $s_1^{\lambda_1(g)} s_2^{\lambda_2(g)} \ldots s_n^{\lambda_n(g)}$ disebut struktur sikel dari $g \in G$.

3. Bentuk $(\lambda_1(g), \lambda_2(g), \ldots, \lambda_k(g))$ disebut tipe

suatu permutasi g. Dan dapat dituliskan sebagai $1^{\lambda_1(g)}2^{\lambda_2(g)}\ldots k^{\lambda_k(g)}$ dengan sifat memenuhi $1.\lambda_1(g)+2.\lambda_2(g)+\ldots+k.\lambda_k(g)=n$, jika permutasi g terbagi atas sikel-sikel i, i=1,2,...,k.

Contoh 17 :

Suatu grup permutasi diperoleh dari putaran-putaran segitiga sama sisi (lihat gambar), yang didefinisikan sebagai :



a:putaran identitas,yang tidak merubah letak 1,2,3.

b:putaran yang membawa 1 ke 2,2 ke 3 dan 3 ke 1.

c:putaran yang membawa 1 ke 3,2 ke 1 dan 3 ke 2.

d:putaran yang membawa 2 ke 3,3 ke 2 dan 1 tetap.

e:putaran yang membawa 1 ke 3,3 ke 1 dan 2 tetap.

f:putaran yang membawa 1 ke 2,2 ke 1 dan 3 tetap.

Jadi D={1,2,3} dan G={a,b,c,d,e,f}. Indeks sikel dari G dicari demikian :

Putaran	Bentuk permutasi	Struktur sikel	jumlah
a	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ = (1)(2)(3)	s_1^3	1
b	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ = (123)	s_3^1	1
c	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ = (1 3 2)	s_3^1	1
d	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ = (1)(2 3)	$s_1^1 s_2^1$	1
e	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ = (2)(1 3)	$s_1^1 s_2^1$	1
f	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ = (3)(1 2)	$s_1^1 s_2^1$	1

Menurut persamaan (2.4), maka ;

$$Z(G;s_1,s_2,s_3) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} s_1^{\lambda_1(g)} s_2^{\lambda_2(g)} s_3^{\lambda_3(g)} \quad ; |G|=6$$

$$= \frac{1}{6}(s_1^3 + s_3^1 + s_3^1 + s_1^1 s_2^1 + s_1^1 s_2^1 + s_1^1 s_2^1)$$

$$= \frac{1}{6}(s_1^3 + 2s_3^1 + 3s_1^1 s_2^1)$$

Contoh 18 :

Suatu grup permutasi pada himpunan G muka suatu kubus (lihat gambar diperoleh dari 24 putaran kubus yang dikelompokkan dalam 5 bentuk putaran, yaitu :

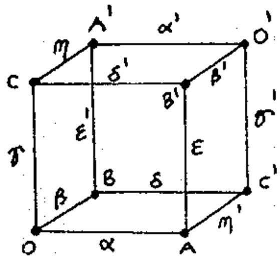
a:putaran identitas, yang tidak merubah letak muka-muka kubus

b:putaran 90^o(searah & berlawanan arah jarum jam);sumbu putar pada pusat-pusat muka yang saling berlawanan.

c:putaran 180^o, sumbu putar pada pusat muka seperti pada b

d:Putaran 120^o(searah & berlawanan arah jarum jam); sumbu putar pada titik sudut-titik sudut yang saling berlawanan.

e:putaran 180^o, sumbu putar pada titik tengah sisi-sisi yang saling berlawanan.



Muka 1 : OAC'B

Muka 2 : OBA'C

Muka 3 : OAB'C

Muka yang lain 1',2',3' berlawanan dengan muka 1,2,3

Sisi-sisi $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\eta$ berlawanan dengan $\alpha',\beta',\gamma',\delta',\varepsilon',\eta'$ dan titik sudut O,A,B,C berlawanan dengan O',A',B',C'.

Jadi D={1,2,3,1',2',3'} dan G={24 putaran}. Indeks sikel dari G dicari demikian :

PUTARAN	BENTUK PERMUTASI		STRUKTUR SIKEL	JUMLAH
a	(1)(1')(2)(2')(3)(3')		s_1^6	1
b	(1)(1')(23'2'3) (2)(2')(13'1'3) (3)(3')(12'1'2)	(1)(1')(232'3') (2)(2')(131'3') (3)(3')(121'2')	$s_1^2\ s_4^1$	6
c	(1)(1') (22') (33') (2)(2') (11') (33') (3)(3') (11') (22')		$s_1^2\ s_2^2$	3
d	(123)(1'2'3') (12'3)(1'23') (123')(1'2'3) (12'3')(1'23)	(132)(1'3'2') (132')(1'3'2) (13'2)(1'32') (13'2')(1'32)	s_3^2	8
e	(13)(22')(1'3') (12')(21')(33') (11')(23)(2'3')	(13')(22')(1'3) (12)(1'2')(33') (11')(23')(2'3)	s_2^3	6

Menurut persamaan (2.4) maka $Z(G;s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6)=$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g} s_1^{\lambda_1(g)} s_2^{\lambda_2(g)} s_3^{\lambda_3(g)} s_4^{\lambda_4(g)} s_5^{\lambda_5(g)} s_6^{\lambda_6(g)} =$$

$$\frac{1}{24}(s_1^6 + 6s_1^2 s_4^1 + 3s_1^2 s_2^2 + 8s_3^2 + 6s_2^3)$$

Contoh 19 :

Suatu grup permutasi G pada himpunan putaran-putaran sisi segi enam sama sisi (lihat gambar), diperoleh dari 12 putaran dalam 6 macam bentuk putaran. Yaitu :

1:putaran identitas, yang tidak berubah letak a,b,c,a´,b´,c´

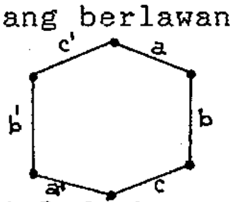
2:putaran yang membawa a ke b,b ke c,c ke a´,a´ ke b´, b´ ke c´,c´ ke a dan sebaliknya.

3:putaran yang membawa a ke c,b ke a´,c ke b´,a´ ke c´, b´ ke a,c´ ke b dan sebaliknya.

4:putaran yang membawa a ke a´,b ke b´,c ke c´,a´ ke a, b´ ke b,c´ ke c.

5:putaran 180° terhadap sumbu-sumbu diagonalnya.

6:putaran 180°, sumbu putar pada titik tengah sisi-sisi yang berlawanan



Sisi-sisi a,b,c berlawanan dengan sisi-sisi a´,b´,c´

Jadi D={a,b,c,a´,b´,c´} dan G={12 putaran segi enam}.

Indek sikel dari G dapat dicari demikian :

PUTARAN	BENTUK PERMUTASI	STRUKTUR SIKEL	JUMLAH
1	(a) (b) (c) (a') (b') (c')	s_1^6	1
2	(a b c a' b' c') (a c' b' a' c b)	s_6^1	2
3	(a c b') (b a' c') (a b' c) (b c' a')	s_3^2	2
4	(a a') (b b') (c c')	s_2^3	1
5	(a c') (b b') (c a') (a a') (b c) (b' c') (a b) (c c') (a' b')	s_2^3	3
6	(a) (a') (b c') (c b') (b) (b') (a c) (a' c') (c) (c') (a b') (b a')	$s_1^2 s_2^2$	3

Menurut persamaan (2.4) maka $Z(G;s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6)=$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} s_1^{\lambda_1(g)} s_2^{\lambda_2(g)} s_3^{\lambda_3(g)} s_4^{\lambda_4(g)} s_5^{\lambda_5(g)} s_6^{\lambda_6(g)} =$$

$$\frac{1}{12}(s_1^6 + 2s_6^1 + 2s_3^2 + 4s_2^3 + 3s_1^2 s_2^2)$$

2.7. Konsep Ekwivalensi Pada Grup Permutasi

Definisi 18 :

Misal $D:\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$ dan $R=\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$. G grup permutasi yang bekerja pada himpunan D. Maka 2 fungsi $\emptyset_1 : D \longrightarrow R$ dan $\emptyset_2 : D \longrightarrow R$ disebut ekwivalen pada G jika terdapat $g \in G$ sedemikian sehingga $\emptyset_1 g = \emptyset_2$ dan ditulis $\emptyset_1 \sim \emptyset_2$.

Contoh 20 :

Diketahui : $D=\{1,2,3\}$ himpunan titik-titik sudut segitiga sama sisi.

$R=\{merah, hijau\}$ himpunan warna merah dan hijau.

$G=\{a,b,c,d,e,f\}$ grup permutasi yang bekerja pada D, yang didefinisikan sebagaimana dalam contoh 17.

$\emptyset = D \longrightarrow R$ merupakan pemetaan dari D ke R atau suatu pewarnaan titik sudut segitiga sama sisi oleh warna merah dan hijau.

Menurut definisi 6, banyaknya pemetaan adalah $2^3=8$, yaitu:

$\emptyset_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & m & m \end{pmatrix}$; $\emptyset_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & h & m \end{pmatrix}$; $\emptyset_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & m & h \end{pmatrix}$; $\emptyset_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & h & h \end{pmatrix}$; $\emptyset_5 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h & h & h \end{pmatrix}$;
$\emptyset_6 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h & h & m \end{pmatrix}$; $\emptyset_7 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h & m & h \end{pmatrix}$; $\emptyset_8 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h & m & m \end{pmatrix}$.

Dapat ditunjukkan bahwa $\emptyset_2$ ekwivalen dengan $\emptyset_3$ atau $\emptyset_8$.

Sebab :

$\emptyset_2 . c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & h & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & m & h \end{pmatrix} = \emptyset_3$. jadi $\emptyset_2 \sim \emptyset_3$;

$\emptyset_2 . b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & h & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h & m & m \end{pmatrix} = \emptyset_8$. jadi $\emptyset_2 \sim \emptyset_8$;

$\emptyset_3 . c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & m & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h & m & m \end{pmatrix} = \emptyset_8$. jadi $\emptyset_3 \sim \emptyset_3$;

Sehingga $\emptyset_2, \emptyset_3, \emptyset_8$ saling ekwivalen. Demikian juga, dengan jalan yang sama, $\emptyset_4, \emptyset_6, \emptyset_7$ saling ekwivalen untuk $b, c \in G$. Sebab $\emptyset_4 b = \emptyset_6$, $\emptyset_4 . c = \emptyset_7$ dan $\emptyset_6 b = \emptyset_7$.

Teorema 5 :

Ekwivalensi, sebagaimana pada definisi 18, merupakan relasi ekwivalensi pada himpunan R^D (himpunan semua fungsi dari D ke R)

Bukti :

Menurut definisi 13, karena G grup, maka memenuhi sifat :

1. Tertutup;untuk $g_i, g_j \in G$ berlaku $g_i . g_j = g_k ; g_k \in G$.
2. Assosiatip; untuk $g_i, g_j, g_k \in G$ berlaku $g_i(g_j . g_k) = (g_i . g_j)g_k$.
3. Terdapat elemen identitas, misal $g_I \in G$ sedemikian sehingga berlaku $g_I . g_i = g_i . g_I = g_i$, untuk setiap $g_i \in G$.
4. Untuk setiap $g_i \in G$ mempunyai invers $g_i^{-1} \in G$ sedemikian sehingga berlaku $g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = g_I$.

Selanjutnya, ambil $\emptyset_i \in R^D ; R^D = \{\emptyset | \emptyset : D \longrightarrow R\}$. Maka :

i. sifat refleksif dipenuhi, sebab jika $g_I \in G$ elemen identitas maka $\emptyset_i . g_I = \emptyset_i$ atau $\emptyset_i \sim \emptyset_i$ dengan $\emptyset_i \in R^D$.

ii. Misal $\emptyset_i \sim \emptyset_j$ maka menurut definisi 18, terdapat $g_i \in G$ dengan $\emptyset_i . g_i = \emptyset_j$, untuk $\emptyset_i, \emptyset_j \in R^D$. jika g_i^{-1} elemen invers dari g_i maka $(\emptyset_i g_i)g_i^{-1} = \emptyset_j g_i^{-1}$ atau $\emptyset_i(g_i g_i^{-1}) = \emptyset_j g_i^{-1}$, atau $\emptyset_i g_I = \emptyset_j g_i^{-1}$ dan $\emptyset_i = \emptyset_j g_i^{-1}$. Karena $g_i^{-1} \in G$ maka $\emptyset_j \sim \emptyset_i$. Jadi jika $\emptyset_i \sim \emptyset_j$ maka $\emptyset_j \sim \emptyset_i$ atau sifat simetris dipenuhi.

iii. Misal $\emptyset_i \sim \emptyset_j$ dan $\emptyset_j \sim \emptyset_k$, dengan $\emptyset_i, \emptyset_j, \emptyset_k \in R^D$. Menurut definisi 18, terdapat $g_i, g_j \in G$ dengan $\emptyset_i g_i = \emptyset_j$ dan $\emptyset_j . g_j = \emptyset_k$. Maka $(\emptyset_i g_i)g_j = \emptyset_k$ atau $\emptyset_i(g_i g_j) = \emptyset_k$. Misal $g_i g_j =$

g_k, maka $g_k \in G$ (pergandaan permutasi adalah tertutup). Sehingga $\emptyset_i g_k = \emptyset_k$ atau $\emptyset_i \sim \emptyset_k$. Jadi sifat transitif terpenuhi.

Menurut definisi 3, maka relasi "~" pada definisi 18 merupakan relasi ekwivalensi pada R^D.

Contoh 21 :

Dengan menggunakan contoh 20, $D:\{1,2,3\}$, $R=\{m,h\}$ dan $\emptyset: D \longrightarrow R$. Serta $R^D:\{\emptyset_1,\emptyset_2,\emptyset_3,\emptyset_4,\emptyset_5,\emptyset_6,\emptyset_7,\emptyset_8\}$.

Relasi "~" yang didefinisikan : $\emptyset_1 \sim \emptyset_2$ jika $\emptyset_i g = \emptyset_2$ untuk suatu $g \in G$, adalah relasi ekwivalensi sebab :

1. Refleksif dipenuhi;misal $\emptyset_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & h & m \end{pmatrix}$ dan $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. maka $\emptyset_2 a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & h & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & h & m \end{pmatrix} = \emptyset_2$. Jadi $\emptyset_2 \sim \emptyset_2$.

2. Simetris dipenuhi, misal jika $\emptyset_2 \sim \emptyset_3$ maka $\emptyset_2 c = \emptyset_3$ untuk $c \in G$. c mempunyai invers b, sebab $c.b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ & $cb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = a$ (elemen identitas).

Sehingga $(\emptyset_2 c)b = \emptyset_3 b$, atau $\emptyset_2(cb) = \emptyset_3 b$, atau $\emptyset_2 a = \emptyset 3b$. Jadi $\emptyset_2 = \emptyset_3 b$ atau $\emptyset_3 \sim \emptyset_2$. Berarti jika $\emptyset_2 \sim \emptyset_3$ maka $\emptyset_3 \sim \emptyset_2$ atau simetris.

3. Transitif dipenuhi : misal jika $\emptyset_2 \sim \emptyset_3$ dan $\emptyset_3 \sim \emptyset_8$ maka $\emptyset_2 c = \emptyset_3$ dan $\emptyset_3 c = \emptyset_8$ untuk $c \in G$ dan $\emptyset_2, \emptyset_3, \emptyset_8 \in R^D$.

Sehingga $(\emptyset_2 c)c = \emptyset_8$ atau $\emptyset_2(b) = \emptyset_8$ atau $\emptyset_2 \sim \emptyset_8$. Jadi jika $\emptyset_2 \sim \emptyset_3$ & $\emptyset_3 \sim \emptyset_8$ maka $\emptyset_2 \sim \emptyset_8$ atau transitif.

Catatan 8 :

Dari teorema 5, karena pada himpunan R^D terdapat relasi ekwivalensi sebagaimana dalam definisi 18, maka R^D terbagi atas klas-klas ekwivalensi. Selanjutnya klas-klas ekwivalensi ini disebut POLA dari G dan dinotasikan dengan Φ.

Jadi pada contoh 20 diatas, R^D terbagi menjadi pola-pola :

m m m yang ditunjukkan oleh $\emptyset_1$

m h h yang ditunjukkan oleh $\emptyset_4, \emptyset_6, \emptyset_7$

m m h yang ditunjukkan oleh $\emptyset_2, \emptyset_3, \emptyset_8$

h h h yang ditunjukkan oleh $\emptyset_5$

Lemma 6 : (Lemma Burnside)

Misal $D=\{d_1,d_2,\ldots d_n\}$, $R=\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$ dan $\emptyset:D \longrightarrow R$. G grup permutasi yang bekerja pada D dan $R^D=\{\emptyset|\emptyset:D \longrightarrow R\}$. Didefinisikan $\emptyset_1 \sim \emptyset_2$ jika hanya jika terdapat suatu $g \in G$ sedemikian sehingga $\emptyset_1 g=\emptyset_2$, untuk $\emptyset_1,\emptyset_2 \in R^D$. Misal τ adalah homomorfisma dari G ke R^D maka banyaknya klas-klas ekwivalensi adalah $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g)$ dengan :

$\psi(g)=|\{\emptyset \in R^D|\emptyset g=\emptyset\}|$=banyaknya $\emptyset$ yang tidak berubah oleh permutasi $g \in G$.

(τ $G \longrightarrow R^D$ didefinisikan sebagai $\tau: g \in G \longrightarrow \emptyset g \in R^D$ untuk suatu $\emptyset \in R^D$)

Bukti :

Anggap untuk setiap pasangan $(g,\emptyset)$ dengan $g \in G$ dan $\emptyset \in R^D$ berlaku $\emptyset g=\emptyset$. Banyaknya pasangan ini (misal N) bisa dicari dengan 2 cara. Pertama, untuk setiap $g \in G$, kita cari banyaknya $\emptyset \in R^D$ yang memenuhi $\emptyset g = \emptyset$. Jika ada sebanyak $\psi(g)$ maka $N = \sum_{g \in G} \psi(g)$. Kedua, untuk setiap $\emptyset \in R^D$, kita cari banyaknya $g \in G$ yang memenuhi $\emptyset g = \emptyset$. Jika ada sebanyak $\eta(\emptyset)$ maka $N = \sum_{\emptyset \in R^D} \eta(\emptyset)$. Jadi $N = \sum_g \psi(g) = \sum_\emptyset \eta(\emptyset)$.

Misal salah satu klas ekwivalensi dalam R^D adalah $S_o = \{\emptyset_1, \emptyset_2, \ldots, \emptyset_k\}$. Ambil sebarang $\emptyset \in S_o$ maka $\emptyset \sim \emptyset_1$ untuk $\emptyset_1 \in S_o$. Dihimpun elemen-elemen $h \in G$ yang memenuhi $\emptyset h = \emptyset$. Misal himpunan ini adalah $G\emptyset = \{h \in G \mid \emptyset h = \emptyset\}$. $G\emptyset$ ini mempunyai $\eta(\emptyset)$ anggota. Yaitu misalnya $h_1, h_2, \ldots, h_{\eta(\emptyset)}$ yang masing-masing saling berlainan.

Selanjutnya dibentuk suatu himpunan $B = \{h_1 g, h_2 g, \ldots, h_{\eta(\emptyset)} g\}$. Oleh pemetaan τ, maka bayangan dari elemen $h_i g \in B$ akan membawa $\emptyset$ ke $\emptyset_1$. Sebab $\tau(h_i g) = \tau h_i . \tau g$ sedang τh_i membawa $\emptyset$ ke $\emptyset$ (sebab $\emptyset h = \emptyset$) dan τg membawa $\emptyset$ ke $\emptyset_1$ (sebab $\emptyset g = \emptyset_1$). Sekarang, jika $g_o \in G$ maka $g_o \in B$. Sebab $g_o \in G$ dapat dibawa ke bentuk $hg \in B$, yaitu $g_o = g_o(g^{-1} g) = (g_o g^{-1})g$. $g_o g^{-1}$ elemen $h \in G\emptyset$ sebab $\emptyset(g_o g^{-1}) = \emptyset$

Karena banyaknya elemen dalam B adalah $\eta(\emptyset)$, berarti terdapat $\eta(\emptyset)$ dalam G yang bayangan τ - nya membawa $\emptyset$ ke $\emptyset_1$. Dengan cara yang sama, terdapat $\eta(\emptyset)$ elemen dari G yang bayangan τ nya membawa $\emptyset$ ke $\emptyset_2$ dalam S_o dan seterusnya. Berarti untuk setiap elemen $\emptyset_i \in S_o, i = 1, 2, \ldots, k$ terdapat $\eta(\emptyset)$ elemen dalam G yang bayangan τ nya membawa $\emptyset$ ke $\emptyset_i$. Jadi elemen-elemen dalam G terbagi menjadi :

$\eta(\emptyset)$ elemen yang bayangan τ nya membawa $\emptyset$ ke $\emptyset_1$

$\eta(\emptyset)$ elemen yang bayangan τ nya membawa $\emptyset$ ke $\emptyset_2$ — k kali

... ...

$\eta(\emptyset)$ elemen yang bayangan τ nya membawa $\emptyset$ ke $\emptyset_k$

Berarti $\eta(\emptyset)\times k=|G|$ atau , $\eta(\emptyset)=\frac{|G|}{k}$. sehingga untuk semua elemen $\emptyset\in S_o$ berlaku :

$$\sum_{\emptyset\in S_o}\eta(\emptyset) = \frac{|G|}{k} + \frac{|G|}{k} + \ldots + \frac{|G|}{k} \quad (k\ \text{suku})$$

$$= k\ .\ \frac{|G|}{k} = |G|$$

Dan untuk semua klas-klas ekwivalensi dalam R^D diperoleh :

$\sum_{\emptyset\in R^D}\eta(\emptyset) = |G|+|G|+|G|+\ldots$. Misal terdapat p klas ekwivalensi maka $\sum_{\emptyset\in R^D}\eta(\emptyset) = |G|+|G|+\ldots+|G|$ (p suku)

$$= p\ |G|$$

atau $p=\frac{1}{|G|}\sum_{\emptyset\in R^D}\eta(\emptyset) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi(g)$

<u>Contoh 22 :</u>

Dengan menggunakan contoh 20, $|G|=6$.

$\psi(g)=|\{\emptyset\in R^D|\emptyset g=\emptyset\}|$ dicari demikian :

1. Untuk $a\in G$, $\psi(a) = 8$. Sebab a tidak merubah 8 susunan pewarnaan. Jadi $\emptyset a=\emptyset$ untuk setiap $\emptyset\in R^D$ dan a=elemen identitas.

2. Untuk $b\in G$, $\psi(b)=2; b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$. Sebab b tidak merubah $\emptyset_1$ dan $\emptyset_5$. Yaitu $\begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}= \begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&h\end{pmatrix}$.

3. Untuk $c\in G$, $\psi(c)=2; c=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$. Sebab c tidak merubah $\emptyset_1$ dan $\emptyset_5$. yaitu $\begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&h\end{pmatrix}$.

4. Untuk d∈G, $\psi(d)=4; d=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$. sebab d tidak merubah 4 susunan pewarnaan yaitu $\emptyset_1, \emptyset_4, \emptyset_5, \emptyset_8$. Atau

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1&2&3\\m&h&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\m&h&h\end{pmatrix} ;$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&h\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1&2&3\\h&m&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\h&m&m\end{pmatrix} .$$

5. Untuk e∈G, $\psi(e)=4; e=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$. sebab e tidak merubah $\emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_5, \emptyset_7$. Yaitu :

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1&2&3\\m&h&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\m&h&m\end{pmatrix} ;$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&h\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1&2&3\\h&m&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\h&m&h\end{pmatrix} .$$

6. Untuk f∈G, $\psi(f)=4; f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$. sebab f tidak merubah $\emptyset_1, \emptyset_3, \emptyset_5, \emptyset_6$. yaitu :

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&h\end{pmatrix} ;$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&h\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\h&h&m\end{pmatrix} .$$

Sehingga menurut Lemma 6, Banyaknya klas-klas ekwivalensi adalah $\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \psi(g)$

$$= \frac{1}{6}(8+2+2+4+4+4)$$
$$= 24/6$$
$$= 4$$

Klas-klas ekwivalensi tersebut telah ditunjukkan dalam catatan 8, yaitu m m m, m m h, m h h dan h h h.

2.8. Analisa Kombinatorik

Definisi 19 :

Perkalian semua bilangan bulat positif dari 1 sampai dengan n disebut n faktorial dan dinyatakan dengan n!.

Jadi $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$

Catatan 9 :

$0! = 1$ sebab jika diambil $n = 1$ maka $1! = 1(0!) = 1$. Jadi $0! = 1$.

Definisi 20 :

Suatu kombinasi dari n obyek yang berlainan, yang diambil/dipilih sebanyak r obyek adalah penyusunan r dari n Obyek dengan urutan penyusunan tidak diperhatikan.

Jumlah kombinasi seperti ini dinyatakan dengan :

$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ dengan $r \leq n$.

Contoh 23 :

Disediakan 3 macam warna : merah, hijau, kuning. Akan dibuat susunan dalam 2 warna yang berbeda. Maka banyaknya susunan ini adalah $\binom{3}{2} = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{3!}{2!\ 1!} = \dfrac{3.2.1}{2.1.1} = 3$.

Yaitu merah + hijau, Merah + kuning dan hijau + kuning.

Teorema 7 :

Jika n obyek terbagi atas p kelompok yaitu $n_1, n_2, \ldots, n_p$ dengan $n_1+n_2+\ldots+n_p=n$ maka banyaknya kombinasi $n_1, n_2, \ldots, n_p$ dari n obyek adalah :

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_p} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_p!}$$

Bukti :

Misal banyaknya kombinasi tersebut adalah $\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_p}$.

Banyaknya kombinasi n_1 dari n obyek adalah $\binom{n}{n_1}$. Ini menyisakan $n-n_1$ obyek. Selanjutnya, banyaknya kombinasi

n_2 dari $n-n_1$ obyek adalah $\binom{n-n_1}{n_2}$. Ini menyisakan $n - n_1 - n_2$ obyek. Selanjutnya, banyaknya kombinasi n_3 dari $n - n_1 - n_2$ obyek adalah $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$. Dan seterusnya, hingga proses sampai pada kelompok n_p, dengan banyaknya kombinasi adalah $\binom{n-n_1-n_2-n_3- \ldots -n_{p-1}}{n_p}$.

Sehingga untuk keseluruhan, banyaknya kombinasi adalah :

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_p} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\ldots\binom{n-n_1-n_2-n_3- \ldots -n_{p-1}}{n_p}$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{p-1})!}{n_p!(n-n_1-n_2-\ldots-n_p!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!} \cdot \frac{1}{n_2!} \cdot \frac{1}{n_3!} \ldots \cdot \frac{1}{n_p!0!} \text{. karena } 0! = 1$$

maka :

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_p} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_p!}$$

Contoh 24 :

Disediakan 6 huruf ; dengan 3 huruf adalah a, 2 huruf b dan 1 huruf c. Ada beberapa susunan huruf berbeda yang terbentuk ?

Penyelesaian :

$n=6$; $n_1=3, n_2=2$ dan $n_3=1$. Jadi dipenuhi $n=n_1+n_2+n_3$

Menurut teorema 7 maka banyaknya susunan huruf berbeda yang terbentuk adalah :

$$\binom{6}{3\ 2\ 1} = \frac{6!}{3!\ 2!\ 1!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1.1} = \frac{120}{2}$$

$$= 60 \text{ susunan.}$$