BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Pengertian/Latar Belakang

Suatu grup G adalah suatu himpunan G dengan operasi * dalam G sedemikian sehingga memenuhi ke-4 sifat :

(1) Tertutup ; untuk setiap a,b dalam G maka $a*b=c$, dengan $c \in G$,

(2) Assosiatif ; untuk setiap a,b,c dalam G berlaku $a*(b*c) = (a*b)*c$,

(3) Terdapat elemen e dalam G yang memenuhi $e*a=a*e=a$ untuk setiap a dalam G ; elemen e disebut elemen identitas dari G,

(4) Untuk setiap elemen a dalam G, terdapat elemen a^i dalam G sedemikian sehingga $a*a^i=a^i*a=e$; Elemen a^i disebut elemen invers dari a.

Misal $D=\{d_1,d_2,...,d_n\}$, $R=\{r_1,r_2,...,r_m\}$ dan $\emptyset : D \rightarrow R$ pemetaan dari D ke R. Sedang G adalah grup permutasi yang bekerja pada D, yaitu grup yang memenuhi ke-4 sifat diatas terhadap pergandaan dengan anggota-anggotanya terdiri atas permutasi-permutasi dari n elemen dalam D. Klas-klas ekwivalensi diberikan dalam Bab II.

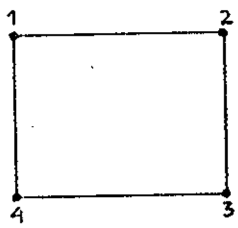
Jika ideks sikel dari G adalah Z $(G;s_1,s_2,...,s_n)$ maka banyaknya pola Φ ditulis sebagai $\sum_{\Phi} W(\Phi) = Z(G;\sum_r w(r), \sum_r (w(r))^2, ..., \sum_r (w(r))^n)$ (1.1)

dengan w(r) adalah bobot elemen $r \in R$. Persamaan (I.1)

tersebut merupakan rumus pokok yang digunakan dalam perhitungan banyaknya Pola Φ.
Pengertian indeks sikel dan bobot suatu elemen diberikan dalam Bab II dan Bab III.

Sedangkan theorema-theorema Polya digunakan untuk menghitung banyaknya pola Φ. Teorema-teorema tersebut adalah Teorema Polya 1, Teorema Polya 2 serta Teorema Polya 3. Dan contoh perluasan teorema Polya yang akan dibahas adalah perluasan teorema Polya dari de Brujn dan teorema hitungan grup kuasa dari Harary dan Palmer. Sebagai contoh penerapan dari teorema Polya diberikan sebagai berikut :

<u>Contoh 1 :</u>



D={1,2,3,4} himpunan titik sudut suatu bujur sangkar (lihat gambar)

R={merah,hijau} himpunan warna merah dan hijau

$\emptyset : D \longrightarrow R$ pemetaan dari D ke R, yang merupakan pewarnaan titik sudut bujur sangkar oleh warna merah atau hijau.

Banyaknya pemetaan yang terjadi adalah :

$\emptyset_1$: $1 \longrightarrow m$, $2 \longrightarrow m$, $3 \longrightarrow m$, $4 \longrightarrow m$

$\emptyset_2$: $1 \longrightarrow m$, $2 \longrightarrow m$, $3 \longrightarrow m$, $4 \longrightarrow h$

$\emptyset_3$: $1 \longrightarrow m$, $2 \longrightarrow m$, $3 \longrightarrow h$, $4 \longrightarrow m$

$\emptyset_4$: $1 \longrightarrow m$, $2 \longrightarrow h$, $3 \longrightarrow m$, $4 \longrightarrow m$

$\emptyset_5$: $1 \longrightarrow h$, $2 \longrightarrow m$, $3 \longrightarrow m$, $4 \longrightarrow m$

$\emptyset_6$: $1 \longrightarrow m$, $2 \longrightarrow h$, $3 \longrightarrow h$, $4 \longrightarrow h$

$\emptyset_7$: $1 \longrightarrow h$, $2 \longrightarrow m$, $3 \longrightarrow h$, $4 \longrightarrow h$

$\emptyset_{8}$: 1 $\longrightarrow$ h, 2 $\longrightarrow$ h, 3 $\longrightarrow$ m, 4 $\longrightarrow$ h

$\emptyset_{9}$: 1 $\longrightarrow$ h, 2 $\longrightarrow$ h, 3 $\longrightarrow$ h, 4 $\longrightarrow$ m

$\emptyset_{10}$: 1 $\longrightarrow$ m, 2 $\longrightarrow$ m, 3 $\longrightarrow$ h, 4 $\longrightarrow$ h

$\emptyset_{11}$: 1 $\longrightarrow$ m, 2 $\longrightarrow$ h, 3 $\longrightarrow$ h, 4 $\longrightarrow$ m

$\emptyset_{12}$: 1 $\longrightarrow$ h, 2 $\longrightarrow$ h, 3 $\longrightarrow$ m, 4 $\longrightarrow$ m

$\emptyset_{13}$: 1 $\longrightarrow$ h, 2 $\longrightarrow$ m, 3 $\longrightarrow$ m, 4 $\longrightarrow$ h

$\emptyset_{14}$: 1 $\longrightarrow$ m, 2 $\longrightarrow$ h, 3 $\longrightarrow$ m, 4 $\longrightarrow$ h

$\emptyset_{15}$: 1 $\longrightarrow$ h, 2 $\longrightarrow$ m, 3 $\longrightarrow$ h, 4 $\longrightarrow$ m

$\emptyset_{16}$: 1 $\longrightarrow$ h, 2 $\longrightarrow$ h, 3 $\longrightarrow$ h, 4 $\longrightarrow$ h

Selanjutnya akan dihitung banyaknya pola yang terjadi dari hasil pemetaan-pemetaan diatas :

Misalnya G terdiri atas permutasi - permutasi yang diperoleh dari pemutaran bujur sangkar searah jarum jam dengan sumbu putar pusat bujur sangkar sebesar : a. 0^{o} , yaitu $1 \longrightarrow 1, 2 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 4$ atau

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b. 90^{o}, yaitu $1 \longrightarrow 4, 2 \longrightarrow 1, 3 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 3$ atau

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c. 180^{o}, yaitu $1 \longrightarrow 3, 2 \longrightarrow 4, 3 \longrightarrow 1, 4 \longrightarrow 2$ atau

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d. 270^{o}, yaitu $1 \longrightarrow 2, 2 \longrightarrow 3, 3 \longrightarrow 4, 4 \longrightarrow 1$ atau

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Jadi $G = \{ \binom{1234}{1234}, \binom{1234}{4123}, \binom{1234}{3412}, \binom{1234}{2341} \}$. G adalah grup permutasi sebab :

(1) Tertutup;misal $\binom{1234}{4123}\binom{1234}{3412} = \binom{1234}{2341} \in G$

(2) Assosiatip;misal untuk $\binom{1234}{4123}, \binom{1234}{3412}, \binom{1234}{2341} \in G$

maka : $\binom{1234}{4123}\left[\binom{1234}{3412}\binom{1234}{2341}\right] = \binom{1234}{4123}\binom{1234}{4123} = \binom{1234}{3412}$

dan $\left[\binom{1234}{4123}\binom{1234}{3412}\right]\binom{1234}{2341} = \binom{1234}{2341}\binom{1234}{2341} = \binom{1234}{3412}$

(3) Terdapat elemen identitas yaitu $\binom{1234}{1234} \in G$

(4) Setiap elemen mempunyai invers; $\binom{1234}{1234}$ inversnya $\binom{1234}{1234}$, $\binom{1234}{4123}$ inversnya $\binom{1234}{2341}$ dan sebaliknya, $\binom{1234}{3412}$ inversnya $\binom{1234}{3412}$.

Indeks sikel dari G dihitung demikian :

Permutasi	Struktur sikel	Jumlah
$\binom{1234}{1234} = (1)(2)(3)(4)$	s_1^4	1
$\binom{1234}{4123} = (1432)$	s_4^1	1
$\binom{1234}{3412} = (13)(24)$	s_2^2	1
$\binom{1234}{2341} = (1234)$	s_4^1	1

$$Z(G;s_1,s_2,s_3,s_4)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} s_1^{\lambda_1(g)}\, s_2^{\lambda_2(g)}\, s_3^{\lambda_3(g)}\, s_4^{\lambda_4(g)}$$

; s_i = sikel dengan panjang i

λ_i = banyaknya s_i ; i = 1,2,3,4

$|G| = 4$

$$= \frac{1}{4}\ (s_1^4 + s_4^1 + s_2^2 + s_4^1)$$

$$= \frac{1}{4}\ (s_1^4 + 2\ s_4^1 + s_2^2)$$

Misal bobot elemen $r \in R$ adalah $w(r_1) = m$ dan $w(r_2)=h$ maka $\sum_r w(r)=m+h$, $\sum_r (w(r))^2=m^2+h^2$, $\sum_r (w(r))^3=m^3+h^3$, $\sum_r (w(r))^4=m^4+h^4$. Menurut persamaan (1.1) maka :

$$\sum_\Phi w(\Phi) = Z(G;\sum_r w(r),\sum_r (w(r))^2,\sum_r (w(r))^3,\sum_r (w(r))^4)$$

$$=Z(G;m+h,m^2+h^2,m^3+h^3,m^4+h^4)$$

$$= \frac{1}{4}((m+h)^4+2(m^4+h^4)+(m^2+h^2)^2)$$

$$= \frac{1}{4}\ (m^4+4m^3h+6m^2h^2+4mh^3+h^4+2m^4+2h^4+m^4+2m^2h^2+h^4)$$

$$\sum_\Phi w(\Phi)=m^4+m^3h+mh^3+2m^2h^2+h^4$$

Jadi terdapat 6 pola yaitu m^4 (ditunjukan oleh $\emptyset_1$), h^4 (ditunjukkan oleh $\emptyset_{16}$), m^3h (ditunjukkan oleh $\emptyset_2,\emptyset_3,\emptyset_4,\emptyset_5$), mh^3 (ditunjukkan oleh $\emptyset_6,\emptyset_7,\emptyset_8,\emptyset_9$), m^2h^2 (ditunjukkan oleh $\emptyset_{10}$, $\emptyset_{11}$, $\emptyset_{12}$, $\emptyset_{13}$) dan m^2h^2

(ditunjukkan oleh $\emptyset_{14}, \emptyset_{15}$). Fungsi-fungsi dalam kurung dari masing-masing pola menunjukkan saling ekuivalen. Konsep ekwivalen ini dibahas dalam Bab II.

1.2. Permasalahan

Bagaimana keterkaitan antara Teorema Polya maupun Perluasan Teorema Polya dalam penghitungan banyaknya pola dari G yang ter jadi dari pemetaan $\emptyset : D \rightarrow R$, jika G adalah grup permutasi yang bekerja pada D dengan $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ dan $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$?

1.3. Pembahasan

Berapa pengertian yaitu tentang himpunan, relasi ekwivalen, pemetaan, permutasi, grup, grup permutasi, indeks sikel dan konsep ekwivalensi dari grup permutasi serta analisa kombinatorik yang merupakan materi penunjang dari pembahasan torema-teorema Polya diberikan dalam Bab II.

Sedangkan teorema-teorema Polya (teorema Polya 1, teorema Polya 2, teorema Polya 3) dan beberapa contoh perluasan teorema Polya (teorema de Bruijn, teorema Harary dan Palmer) diberikan pada Bab III. Dalam pembahasan teorema-teorema tersebut selalu diawali dengan konsep-konsep pengantar yang langsung berkaitan dengan teorema-teorema yang bersangkutan. Yaitu tentang bobot fungsi ekwivalensi, partisi bilangan bulat positif n dan deret hitungan figure.

Dan dalam Bab IV akan diberikan beberapa kesimpulan dari pembahasan teorema-teorema Polya serta beberapa perluasannya.