BAB III

SEMIAUTOMATA

3.1. Definisi dari Semiautomata

Definisi 3.1

Suatu semiautomata A (juga sering dikatakan semiautomata deterministik) adalah suatu tripel A= (S^A, Σ^A, M^A) dimana :

$$S^A = \{ s_0, s_1, \ldots\ldots, s_{n-1} \}$$

adalah suatu himpunan berhingga (state A)

$$\Sigma^A = \{ \sigma_0, \sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_{m-1} \}$$

adalah suatu himpunan berhingga (input A) dan

$$M^A = \{ M\sigma_0, M\sigma_1, \ldots\ldots, M\sigma_{m-1} \}.$$

adalah himpunan pemetaan-pemetaan dari S into S.

Contoh 3.1

$$A = (\{ 1,2,3,4,5,6 \}, \{ \sigma_0, \sigma_1 \}, \{ M\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, M\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \}).$$

adalah suatu semiautomata dengan 6 state dan 2 input.

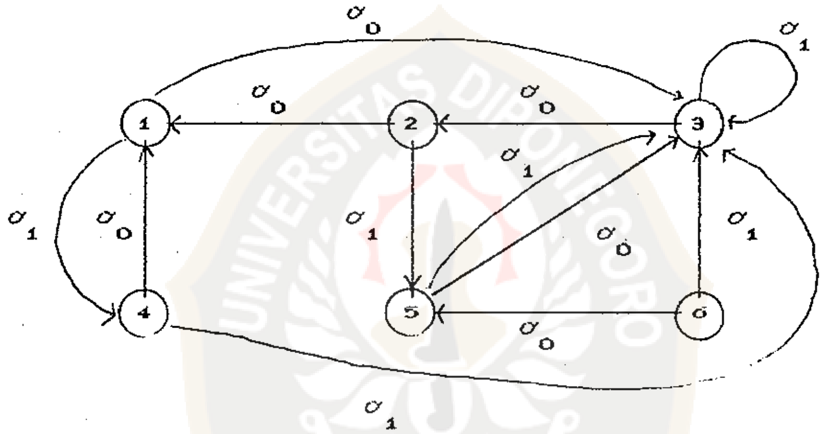
Suatu semiautomata sering ditunjukkan dengan suatu tabel yang dinamakan tabel state atau tabel transisi. Dari contoh 3.1 dapat digambarkan sebagai berikut:

state A

A	1	2	3	4	5	6
input A σ_0	3	1	2	1	3	5
σ_1	4	5	3	3	3	3

Bisa juga semiautomata digambarkan dengan suatu direct graph. Ujung dari graph menggambarkan state A dan untuk setiap $\begin{bmatrix} s_i \\ s_j \end{bmatrix} \in M\sigma_k$ maka ada σ_k membawa s_i ke s_j.

Jadi:



2.2 Semigrup dari suatu Semiautomata

Ambil semigrup bebas Σ^* yang duhasilkan oleh $\Sigma = \{ \sigma_0, \sigma_1, \ldots\ldots \sigma_{n-1} \}$ misal $\Sigma^* = \{ \sigma_{i1}\sigma_{i2}\sigma_{i3}\ldots\ldots\ldots\ldots\sigma_{ik}, \sigma_{j1}\sigma_{j2}\sigma_{j3}\ldots\ldots\ldots\ldots\sigma_{jk} \}$maka untuk suatu kata $X = \{ \sigma_{i1}\sigma_{i2}\sigma_{i3} \ldots\ldots\ldots \sigma_{ik} \}$ ada suatu hubungan pemetaan $M_X = \{ M\sigma_{i1}\ M\sigma_{i2} \ldots\ldots\ M\sigma_{ik} \}$ dari S into S. Jika A dalam state s_i dan barisan dari input X diaplikasikan pada semiautomata maka berlakulah $M_X(s_i) = M_X . s_i$

Relasi E pada Σ^* yang didefinisikan dengan :

$$X\ E\ Y \iff M_X = M_Y$$

adalah suatu kongruensi, kelas-kelas kongruensinya adalah semua kata-kata dalam Σ^* yang menyebabkan pemetaan - pemetaan dari S ke S. Indeks dari E adalah berhingga dan jumlah pemetaan dari S ke S adalah juga berhingga.

Definisi 3.2

Suatu monoid berhinnga G_A yang dihasilkan oleh pemetaan-pemetaan dalam M dan $M_\wedge$ dinamakan semigrup dari semiautomata.

Misalkan dalam Σ^* terdapat kata-kata { ^, X, Y, XX, XY, YY,.....} maka G_A = { $M_\wedge$, M_X, M_Y, M_{XX}, M_{XY}, M_{YY}.....} dan kelas-kelas kongruensinya adalah { $s_0 = M_\wedge$, s_1 ={ M_X } s_2 = { M_Y }, s_3 = { M_{XY} }.......}. Dari hal diatas diketahui bahwa $G_A \approx \Sigma^*/E$ (G_A adalah isomorfis dengan kelas-kelas kongruensi dari Σ^*.

3.3. Kongruensi Kanan pada Σ^* dalam hubungannya dengan Semiautomata.

Telah ditunjukkan bahwa suatu semiautomata A menyebabkan suatu kongruensi dengan indeks berhingga pada semigrup bebas Σ^*. Dilain hal kongruensi kanan pada Σ^* cukup memungkinkan sebagai definisi dari suatu semiautomata. Jadi untuk suatu relasi kongruensi kanan E_r dengan indeks berhingga pada Σ^* menyebabkan suatu semiautomata A dan state A adalah kelas-kelas kongruensi pada E_r, inputnya adalah elemen-elemen dari Σ. Pemetaan $M\sigma_i$ adalah pemetaan dari S ke S maka jika s_j adalah kelas kongruensi yang memuat $x \in \Sigma^*$, $s_j M\sigma_i$ merupakan kelas yang memuat $x\sigma_i \in \Sigma^*$. Sehingga didapat :

$$x\ E\ y \Rightarrow x\sigma_i\ E_r\ y\sigma_i \quad (\ E_r \text{ adalah kongruensi kanan })$$

Ambil s_o adalah kelas kongruensi dari E_r yang memuat Λ. Jika s_i memuat $x \in \Sigma^*$ maka $s_o\ M_x = s_i$ karena $\Lambda x = x$. Untuk setiap state dari A terdapat hubungan paling sedikit satu kata input misal s_o, maka semiautomata tersebut dinamakan semiautomata siklik dan s_o dinamakan penghasil.

Dalam graph suatu semiautomata siklik memuat paling sedikit satu puncak dan setiap puncak dapat dihubungkan dengan suatu garis langsung dengan panah.

3.4. Subsemiautomata, Homomorfisma.

Pada bagian selanjutnya sering digunakan σ_i^A untuk menyatakan pemetaan $M\sigma_i$ dalam semiautomata A.

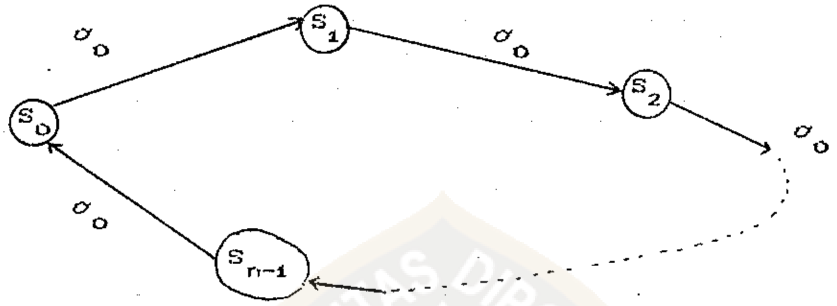
Definisi 3.4.1

Suatu semiautomata $B = (\ S^B,\ \Sigma^B,\ M^B\ )$ dikatakan subsemiautomata dari semiautomata $A = (\ S^A, \Sigma^A,\ M^A)$ jika $S^B \subseteq S^A$, $\Sigma^B \subseteq \Sigma^A$ dan $\sigma_i^B \subseteq \sigma_i^A$ untuk setiap $\sigma_i \in \Sigma^B$.

Jika $\Sigma^A = \Sigma^B$ dan ada himpunan bagian dari S^A yaitu S^B, kemudian M^B termuat dalam M^A maka A akan membentuk suatu subsemiautomata.

Apabila $S^B = S^A$ dan Σ^B himpunan bagian sejati dari

Σ^A (| Σ^A | $\geq$ 2) maka A juga akan mempunyai subsemiautomata sejati. Jika | Σ^B | = 1 maka ada semiautomata tanpa subsemiautomata sejati .Dalam hal ini berlaku jika hubungan σ_o^A merupakan satu putaran dan jika digambarkan :

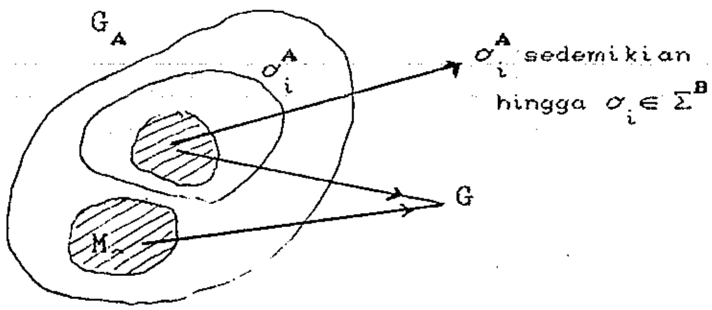


lemma 3.4.1

Semigrup G_B pada subsemiautomata B dari semiautomata A adalah suatu bayangan homomorfis dari subsemigrup dari G_A.

Bukti :

Pemetaan σ_i^A sedemikian hingga $\sigma_i \in \Sigma^B$ dan suatu identitas merupakan penghasil dari subsemigrup G dari G_A (karena pemetaan-pemetaan ini membentuk suatu himpunan bagian dari penghasil-penghasil G_A).



Diambil elemen - elemen dari G yang hanya memuat

S^B maka pemetaan-pemetaan dari S^B into S^B membentuk suatu semigrup G_B . Selanjutnya diambil pemetaan φ dari G onto G_B didefinisikan dengan :

$$\varphi (g) = g \text{ yang hanya memuat } S^B \; (g \in G)$$

adalah suatu homomorfisma karena $\varphi (g_1 g_2) = (\varphi g_1)(\varphi g_2)$. φ tidak harus satu-satu. φ tidak harus satu - satu (apabila $g_1 \neq g_2$ mungkin $\varphi g_1 = \varphi g_2$).

Contoh 3.4.1

Ambil semiautomata sebagai berikut :

A	1	2	3	4	5	6
σ_1	3	1	2	1	3	5
σ_2	4	5	3	3	3	3
σ_3	2	3	4	5	1	2

$B = \{ (1,2,3),(\sigma_0, \sigma_1),(M\sigma_0^B , M\sigma_1^B) \}$.

Pemetaan σ_i^A sedemikian hingga $\sigma_i \in \Sigma^B$ adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, M_\wedge$$

Adalah penghasil dari G yaitu subsemiautomata dari A. Diambil elemen dari G yang hanya memuat S^B maka didapat :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, M_\wedge$$

Pemetaan diatas adalah penghasil dari semigrup G_B.

$$G \xrightarrow{\varphi} G_B$$. φ adalah suatu homomorfisma

karena :

$$\text{ambil } g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\,(g_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\,(g_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\,(g_1).\ \varphi\,(g_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$g_1 \,.\, g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\,(\,g_1 \,.\, g_2\,) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\,(g_1).\ \varphi\,(g_2) = \varphi\,(\,g_1 \,.\, g_2\,)$$

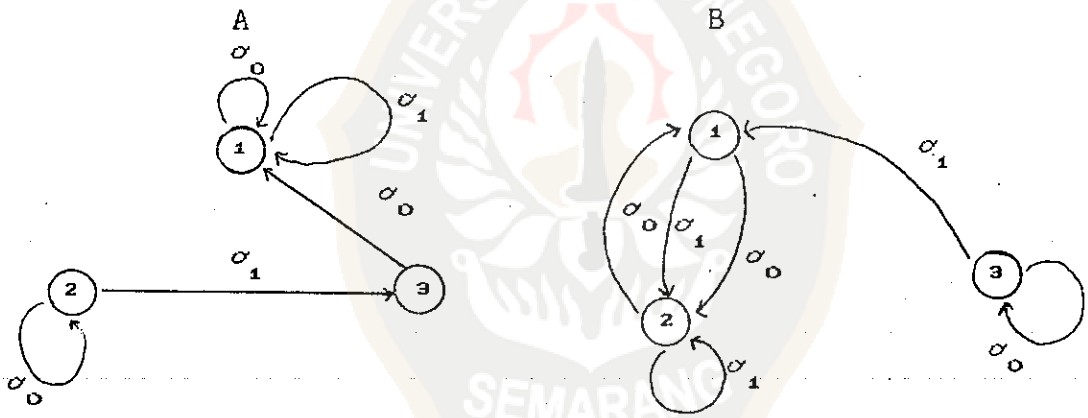
Jika $\Sigma^B = \Sigma^A$ maka G_B adalah bayangan homomorfis dari G_A, karena $\sigma_i^A = G$ dan jika diambil G yang hanya memuat S^B maka G_B adalah G_A yang hanya memuat S^B, akibatnya G^B adalah bayangan homomorfis dari G_A.

Definisi 3.4.2

Semiautomata $B = (S^B, \Sigma^B, M^B)$ adalah suatu bayangan homomorfis dari semiautomata $A = (S^A, \Sigma^A, M^A)$ jika ada suatu pemetaan φ dari S^A onto S^B dan suatu pemetaan ξ dari Σ^A onto Σ^B sedemikian sehingga untuk setiap $\sigma \in \Sigma^A$, $\sigma^A \varphi = \varphi (\sigma\xi)^B$.

Contoh 3.4.2

Ambil semiautomata A dan B sebagai berikut.



A	1	2	3
σ_0	1	2	1
σ_1	1	3	1

B	1	2	3
σ_0	2	1	3
σ_1	2	2	1

Kemudian ambil pemetaan-pemetaan sebagai berikut :

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \xi = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_0 \end{bmatrix}$$

Kita ambil untuk $\sigma_0 \in \Sigma^A$ maka :

$$\sigma_A \varphi = \varphi (\sigma_O \xi)^B$$

$$\sigma_A \varphi = \varphi (\sigma_O)^B$$

$$\sigma_A \varphi = \varphi \sigma_O^B$$ karena :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \varphi = \varphi \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama untuk $\sigma_1 \in \Sigma^A$. Maka semiautomata diatas memenuhi $\sigma^A \varphi = \varphi (\sigma\xi)^B$ untuk setiap $\sigma \in \Sigma^A$. Jadi B merupakan bayangan homomorfis dari A.

Dalam kenyataannya pemetaan ξ sering merupakan pemetaan satu-satu onto ($\Sigma^A = \Sigma^B$) atau ξ merupakan pemetaan identitas, jadi :

$$\sigma^A \varphi = \varphi \sigma^B \text{ untuk semua } \sigma \in \Sigma^A.$$

Jika φ adalah pemetaan satu-satu maka semiautomata A dan B adalah isomorfis.

Relasi ekwivalensi $\varphi \; \varphi^{-1}$ membagi S^A dalam kelas-kelas ekwivalensi (blok) dalam hubungannya dengan partisi π, sedemikiann hingga $s,t \in S^A$ berada dalam blok yang sama jika dan hanya jika $\varphi s = \varphi.t$ Kemudian untuk setiap $\sigma \in \Sigma^A$ berlaku :

$$\sigma^A \varphi s = \varphi(\sigma\xi)^B s$$
$$= \varphi(\sigma\xi)^B t$$
$$= \sigma^A \varphi t$$

Ternyata $\sigma^A s$ dan $\sigma^A t$ juga termasuk dalam satu blok di π. Jadi setiap homomorfisma φ dari A menyebabkan suatu partisi admissibel pada S^A.

Selanjutnya ambil $\pi = \{ H_0, H_1, \ldots\ldots, H_{p-1} \}$ suatu partisi dari S^A. Partisi tersebut adalah admissibel jika untuk setiap $\sigma \in \Sigma^A$ dan untuk setiap $H_i \in \pi$ ada suatu $H_j \in \pi$ sedemikian hingga $\sigma^A H_i \subseteq H_j$. Semiautomata B yang statenya adalah blok-blok dari π (dalam hal ini ditunjukkan dengan $\overline{H}_i$) yang mempunyai input sama dengan A dan untuk setiap $\sigma \in \Sigma^A = \Sigma^B$ memenuhi :

$$\sigma^B \overline{H}_i = \overline{H}_j \Leftrightarrow \sigma^A H_i \subseteq H_j$$

adalah suatu bayangan homomorfis dari A dengan $\varphi s = \overline{H}_i \Leftrightarrow s \in H_i$ dan ξ suatu identitas. B dinamakan juga semiautomata kwosen dari A pada π ditunjukkan dengan $B = A/\pi$.

Dua partisi admissibel ada dalam setiap A yaitu :

1. Partisi identitas π_{iden} dalam setiap state pada S membentuk suatu blok sendiri. Hubungannya dengan semiautomata A adalah isomorfis.
2. Partisi π_0 dimana seluruh elemen dari S membentuk satu blok . Π_0 adalah suatu semiautomata satu state.

3.5. Homomorfisma dari Semigrup pada Semiautomata Homomorfis.

Teorema 3.5

Jika B adalah suatu bayangan homomorfis dari A, maka semigrup G_B dari B adalah suatu bayangan homomorfis dari semigrup G_A pada A.

Bukti

Misal $B = (S^B, \Sigma^B, M^B)$ adalah suatu bayangan homomorfis dari $A = (S^A, \Sigma^A, M^A)$, maka terdapat φ dan ξ sedemikian sehingga untuk setiap $\sigma \in \Sigma^A$:

$$\sigma^A \varphi = \varphi (\sigma\xi)^B$$

Selanjutnya :

$$\begin{aligned} \varphi X^A &= \varphi \sigma^A_{i1} \sigma^A_{i2} \ldots\ldots \sigma^A_{ik} \\ &= (\sigma_{i1}\xi)^B \varphi \sigma^A_{i1} \ldots\ldots \sigma^A_{ik} \\ &= (\sigma_{i1} \xi)^B (\sigma_{i1}\xi)^B \ldots\ldots (\sigma_{ik} \xi)^B \varphi \\ &= (X \xi)^B \varphi \end{aligned}$$

dimana

$$X \xi = (\sigma_{i1}\xi)(\sigma_{i2}\xi) \ldots\ldots (\sigma_{ik}\xi)$$

sehingga :

$$\begin{aligned} \varphi X^A \varphi^{-1} &= (X \xi)^B \varphi \varphi^{-1} \\ &= (X \xi)^B Is_B \\ &= (X \xi)^B \end{aligned}$$

Didefinisikan suatu relasi η antara G_A dan G_B dengan $\eta X^A = (X \xi)^B$, karena :

$$X^A = Y^A \Rightarrow \varphi \; X^A \varphi^{-1} = \varphi \; Y^A \varphi^{-1}$$
$$\Rightarrow (X \xi)^B = (Y \xi)^B$$

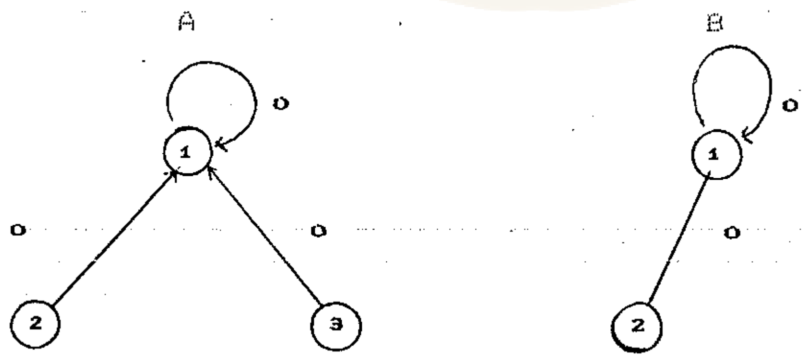
maka η adalah pemetaan dari G_A into G_B. Elemen dari G_B sama dengan $(X \xi)^B$ untuk setiap $X \in (\Sigma^A)^*$ karena ξ adalah pemetaan Σ^A onto Σ^B. Dimisalkan dalam G_A elemen Y^A sama dengan X^A, maka $\eta Y^A = (Y \xi)^B = (X \xi)^B$ (karena $Y^A = X^A$), η adalah suatu pemetaan dari G_A onto G_B.

Selanjutnya:

$$\begin{aligned} \eta (X^A Y^A) &= \eta (X Y)^A \\ &= ((X Y) \xi)^B \\ &= ((X \xi)(Y \xi))^B \\ &= (X \xi)^B (Y \xi)^B \\ &= (\eta X^A)(\eta Y^A) \end{aligned}$$

η adalah homomorfisma , jadi G_B adalah bayangan homomorfis dari G_A.

Persoalan diatas bisa terjadi bahwa η isomorfisma tanpa B menjadi isomorfis ke A , contohnya :



o adalah bentuk ringkasnya dari σ_O

B adalah bayangan homomorfis dari A dengan :

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan } \xi = \begin{bmatrix} o \\ o \end{bmatrix}$$

G_A =

	Λ	0
Λ	Λ	0
0	0	0

dimana $0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

G_B =

	Λ	0
Λ	Λ	0
0	0	0

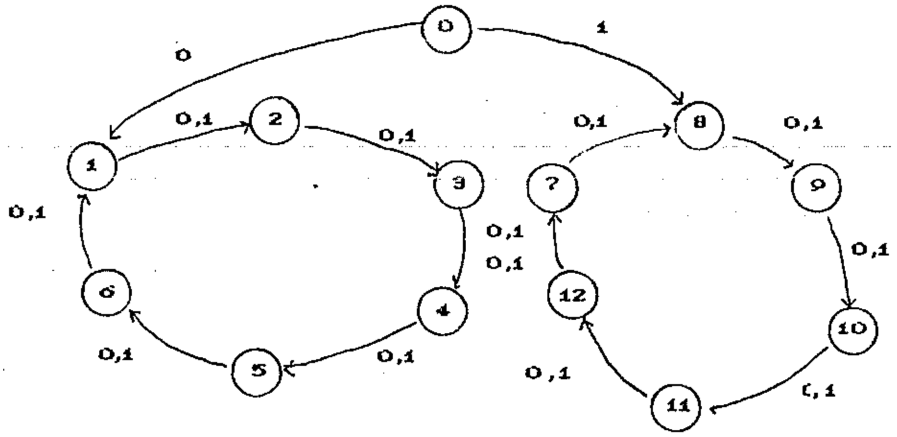
dimana $0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Suatu semiautomata A sedemikian hingga untuk setiap bayangan homomorfis (tidak isomorfis) dari A adalah B, kemudian semigrup G_B tidak isomorfis ke G_A maka A dikatakan mengalami suatu "penurunan".

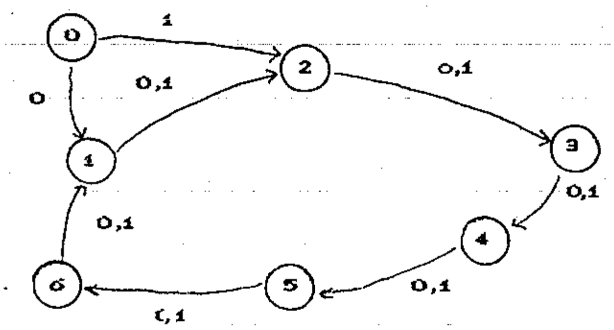
Suatu semiautomata A dapat mempunyai lebih dari satu "penurunan" bayangan homomorfis dengan semigrup isomorfis ke G_A.

contoh :

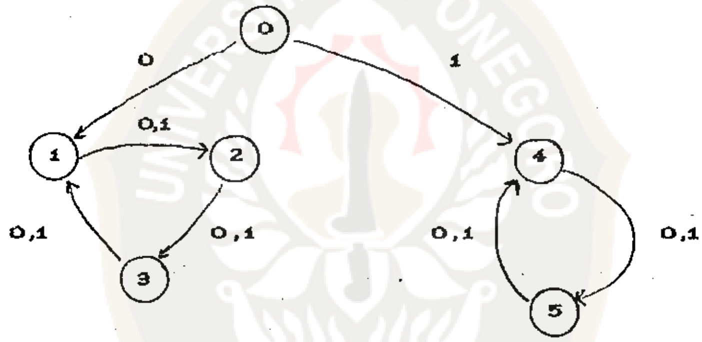
A



B



C



Dua semiautomata B dan C diatas adalah bayangan homomorfis dari A, keduanya mempunyai semigrup isomorfis ke G_A tetapi mereka sendiri tidak isomorfis .

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
σ_0	1	2	3	4	5	6	1	8	9	10	11	12	7
σ_1	8	2	3	4	5	6	1	8	9	10	11	12	7

B	0	1	2	3	4	5	6
σ_0	1	2	3	4	5	6	1
σ_1	8	2	3	4	5	6	1

C	0	1	2	3	4	5
σ_0	1	2	3	1	5	4
σ_1	4	2	3	1	5	4

Untuk setiap $\sigma \in \Sigma^A$ berlaku : $\sigma^A \varphi = \varphi\ (\ \sigma\xi\ )^B$ dengan :

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

dan ξ identitas.

Juga berlaku pula untuk setiap $\sigma \in \Sigma^A$, $\sigma^A \varphi = \varphi\ (\ \sigma\xi\ )^B$ dengan :

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

dan ξ identitas.

Kita ambil suatu kata penghasil X pada A misalnya $X = \sigma_0\sigma_1$, maka :

$$M_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 9 & 10 & 11 & 12 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$M_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 11 & 12 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$M_{xxx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$M_{xxx} = M_x$$

$$\text{Jadi } G_A = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 9 & 10 & 11 & 12 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 11 & 12 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \wedge \right].$$

Selanjutnya ambil kata penghasil pada B misalnya :

$X = \sigma_0 \sigma_1$, maka :

$$M_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{XX} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_{XXX} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$G_A = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \wedge \right].$$

Terlihat bahwa G_A isomorfis ke G_B.

Selanjutnya misalkan diambil kata X = $\sigma_0\sigma_1\sigma_0\sigma_1\sigma_0\sigma_1$ pada A dan X = $\sigma_0\sigma_1\sigma_0\sigma_1\sigma_0\sigma_1$ pada C didapatkan :

$$M_X^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

maka $G_A = \left[\wedge, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \right]$

$$M_X^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G_C = \left[\wedge_s \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \right].$$

G_A isomorfis ke G_C ($G_A \approx G_C$).