BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. Himpunan

Definisi 2.1.1

Himpunan adalah sekumpulan suatu obyek yang berada dalam satu kesatuan dan yang mempunyai sifat keterikatan diantara anggota-anggotanya.

Contoh 2.1.1.1

X adalah himpunan bilangan bulat antara 1 dan 7. $X = \{ X \mid 1 < X < 7, X \in Z \}$ dimana Z = bilangan bulat, maka $X = \{ 2,3,4,5,6 \}$

Notasi yang digunakan :

$2 \in X$, 2 adalah anggaota dari himpunan X

$1 \notin X$, 1 adalah bukan anggota dari himpunan X

$\emptyset$ atau {} adalah himpunan kosong, yaitu himpunan yang tidak mempunyai anggota.

Simbul $P \Rightarrow Q$ menunjukkan bahwa P menyatakan Q (apa bila P maka Q). Sedangkan simbul $P \Leftrightarrow Q$ menunjukkan bahwa P menyatakan Q dan Q menyatakan P, dengan kata lain, " P jika dan hanya jika Q ".

Definisi 2.1.2

Apabila A dan B suatu himpunan dan $a \in A \Rightarrow a \in B$ maka A dikatakan sebagai himpunan bagian dari B dan dinyatakan dengan $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$.

Definisi 2.1.3

A U B (A union B) dari himpunan A dan B adalah himpunan dari semua anggota yang termasuk dalam A atau B atau keduanya.

Definisi 2.1.4

A ∩ B (A interseksi B) adalah himpunan dari semua anggota yang termasuk dalam A dan B.

Definisi 2.1.5

A X B (hasil ganda kartesius dari A dan B) adalah himpunan semua pasangan berurutan (a , b) dimana a ∈ A dan b ∈ B } atau $A \times B = \{(a , b) \mid a \in A, b \in B \}$

Contoh 2.1.5

$A = \{ 1,2,3 \}$

$B = \{ 0,1 \}$

$A \times B = \{ (1,0), (1,1), (2,0),(2,1), (3,0), (3,1) \}$

$B \times A = \{ (0,1), (0,2), (0,3),(1,1), (1,2), (1,3) \}$

Pada umumnya $A \times B \neq B \times A$, kecuali jika $A = B$.

2.2. Relasi dan Pemetaan

Definisi 2.2.1

Suatu himpunan bagian dari A X B dinamakan suatu relasi antara A dan B.

Misal R suatu relasi antara A dan B maka R adalah suatu himpunan dari pasangan (a,b) dimana a ∈ A dan b ∈ B .(a,b) ∈ R sering dinyatakan dalam bentuk a R b.

Definisi 2.2.2

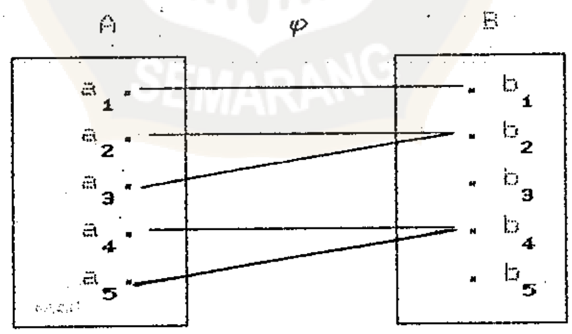
Relasi invers R^{-1} adalah relasi yang didefinisikan dengan $b\ R^{-1} a \Leftrightarrow a\ R\ b$.

Misal $R_{pr1} = \{ a \mid$ terdapat b, $a\ R\ b \}$ adalah himpunan dari semua anggota a dimana sekurang-kurangnya ada satu anggota b sedemikian hingga $a\ R\ b$ dan $R_{pr2} = R^{-1}_{pr1}$ maka $R_{pr2} = \{ b \mid$ terdapat a, $a\ R\ b \}$. Jelas bahwa $R_{pr1} \subseteq A$ dan $R_{pr2} \subseteq B$. Untuk selanjutnya R_{pr1} dinamakan domain dari R dan R_{pr2} dinamakan range dari R.

Definisi 2.2.3

Suatu relasi φ yang memenuhi $a\ \varphi\ b_1$, $a\ \varphi\ b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$ atau dengan kata lain : setiap anggota dari φ_{pr1} berelasi tepat dengan satu anggota B dinamakan suatu pemetaan.

Contoh 2.2.3

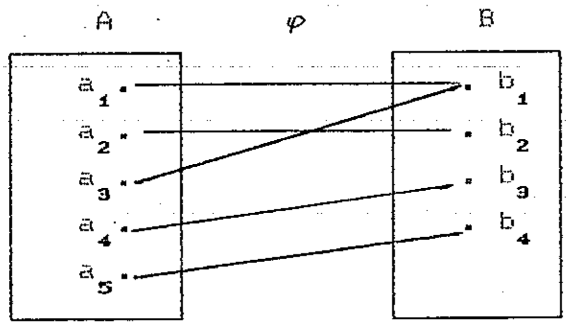


Pemetaan diatas sering dikatakan pemetaan dari A into B.

Definisi 2.2.4

Suatu pemetaan yang memenuhi $\varphi_{pr1} = A$ dan $\varphi_{pr2} = B$ dinamakan pemetaan A onto B atau pemetaan surjektif.

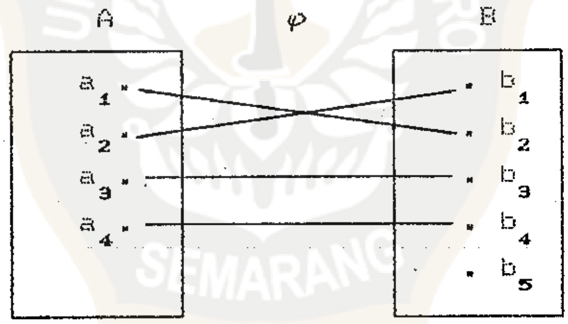
Contoh 2.2.4



Definisi 2.2.5

Pemetaan satu-satu A into B (injektif) adalah suatu pemetaan dari A into B dan untuk a_1 dan a_2 yang berbeda maka $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$.

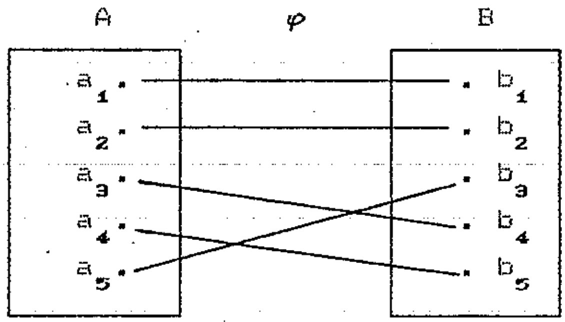
Contoh 2.2.5



Definisi 2.2.6

Suatu pemetaan satu-satu A onto B (bijektif) adalah suatu pemetaan yang surjektif sekaligus injektif.

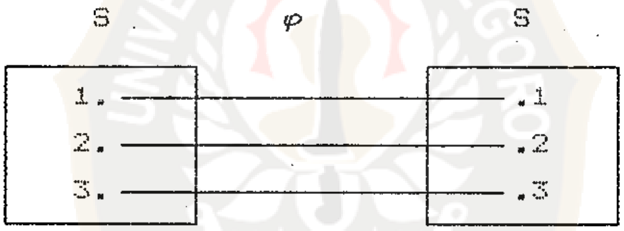
Contoh 2.2.6



Definisi 2.2.7

Suatu pemetaan satu-satu (bijektif) dikatakan sebagai suatu pemetaan identitas (identik) i dari S ke S bila i membawa setiap $s \in S$ ke dalam dirinya sendiri.

Contoh 2.2.7



Definisi 2.2.8

Relasi R disebut refleksif jika untuk setiap $a \in S$ (semestanya) berlaku a berelasi dengan dirinya sendiri yaitu a R a.

Contoh 2.2.8.1

Relasi kesejajaran garis lurus pada bidang datar adalah refleksif sebab setiap garis lurus pada bidang datar adalah sejajar dengan dirinya.

Contoh 2.2.8.2

Relasi mencintai pada manusia adalah refleksif sebab setiap manusia pasti mencintai dirinya sendiri.

Definisi 2.2.9

Relaasi R disebut simetris jika untuk setiap $a,b \in S$ (S = semesta) berlaaku : apabila a R b maka b R a atau R simetris bila ($\forall$ a,b $\in$ S) (a R b $\Rightarrow$ b R a).

Contoh 2.2.9.1

Relasi kesejaajaran garis lurus pada bidang datar.

Contoh 2.2.9.2

Relasi sebangun dari bentuk-bentuk geometri pada bidang datar.

Definisi 2.2.10

Relasi R dikatakan transitif jika untuk setiap a,b,c dari semestanya berlaku : apabila a R b dan b R c maka a R c atau dapat dituliskan dengan R transitif bila ($\forall$ a,b, c $\in$ S) a R b , b R c $\Rightarrow$ a R c.

Contoh 2.2.10

Relasi kesejajaran garis lurus pada bidang datar.

Definisi 2.2.11

Suatu relasi R dikatakan relasi ekwivalensi jika sekaligus memenuhi sifat refleksif, simetris dan transitif.

Contoh 2.2.11

Relasi sebangun dari bentuk-bentuk geometri pada bidang datar.

Definisi 2.2.12

Suatu pemetaan satu - satu dari himpunan A berhingga onto dirinya sendiri dinamakan permutasi.

2.3. Semigrup

Definisi 2.3.1

A dinamakan suatu grupoid jika dalam A itu dapat didefinisikan suatu operasi (misalnya pergandaan, penjumlahan) yang mengawankan semua pasangan berurutan dari anggota A dengan hasil anggota A pula, dapat ditulis

$$\varphi\ (\ a_1, a_2\ ) = a_3 \qquad (\ a_1, a_2, a_3 \in A\ )$$

Derfinisi 2.3.2

Suatu grupoid yang memenuhi sifat assosiatif yaitu untuk setiap a,b,c $\in$ A berlaku (ab) c = a (bc) dinamkan semigrup.

Dalam semigrup penulisan abc tanpa suatu tanda kurung dan dapat memakai notasi-notasi a^n untuk a.a.a.... (n kali) dan hukum-hukum $a^n a^m = a^{n+m}$, $(\ a^n\ )^m$.

Contoh 2.3.2.1

Tabel pergandaan dan penjumlahan bilangan bulat modulo 3 yang menunjukkan suatu semigrup, masing-masing dengan 3 anggota.

.	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	b	c

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Ambil $\Sigma = \{\ \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots, \sigma_{m-1} \}$ adalah suatu himpunan berhingga dari simbul - simbul dinamakan sebagai himpunan huruf-huruf.

<u>*Definisi 2.3.3.1*</u>

Kata adalah suatu deret berhingga dari huruf-huruf pada Σ ditulis satu setelah yang lainnya tanpa suatu tanda pemisah.

Contoh 2.3.3.1

$\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_1$, $\sigma_0\sigma_3\sigma_2\sigma_{m-1}\sigma_3\sigma_3$ adalah kata - kata pada Σ ($\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$).

Ada juga yang dinamakan kata kosong yaitu kata yang tidak mengandung huruf, ditunjukkan dengan $\wedge$ .Panjang kata adalah banyaknya huruf-huruf yang ada dalam satu kata. Jadi panjang $\wedge$ adalah 0.

<u>*Definisi 2.3.3.2*</u>

Semigrup bebas Σ^* adalah himpunan dari seluruh kata-kata pada Σ (termasuk kata kosong) dengan suatu operasi penggabungan kata satu dengan yang lainnya tanpa suatu tanda perantara, misalnya :

$$\sigma_1\sigma_3\sigma_3\sigma_1 . \sigma_0\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1\sigma_3\sigma_3\sigma_1\sigma_0\sigma_2\sigma_1$$

Semigrup diatas sering dikatakan sebagai semigrup bebas yang dihasilkan Σ , dan himpunan Σ dinamakan himpunan penghasil dari Σ^*.

Ambil R dan S adalah dua relasi pada A. Relasi T didefinisikan sebagai sebagai berikut : A T B $\Leftrightarrow$ terdapat dengan tunggal C sedemikian hingga a R c dan c S b dinamakan komposisi atau produk dari R dan S. Jadi T = RS. Komposisi dari relasi-relasi diatas adalah assosiatif :

$a\ (RS)\ T\ b \Leftrightarrow$ terdapat $x\ (a\ RS\ x\ \ \&\ \ x\ T\ b)$

$\Leftrightarrow$ terdapat $(x,y)(a\ R\ y\ \&\ y\ S\ x\ \&\ x\ T\ b)$

$\Leftrightarrow$ terdapat $y\ (a\ R\ y\ \ \&\ \ y\ ST\ b\cdot)$

$\Leftrightarrow a\ R\ (ST)\ b$

Himpunan dari seluruh relasi pada A dengan definisi multiplikasi di atas membentuk suatu semigrup.

Dapat juga menggunakan suatu relasi R antara A dan B dengan suatu relasi S antara B dan C dengan menggunakan definisi yang sama yaitu $a\ RS\ c \Leftrightarrow \ni b\ (a\ R\ b, b\ R\ c)$ dimana $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$) dan RS adalah relasi antara A dan C. Catatan bahwa :

$(RS)_{pr1} \subseteq R_{pr1}$

$(RS)_{pr2} \subseteq S_{pr2}$

$(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$

Relasi Identitas I_A Pada A adalah himpunan dari semua pasangan (a,a) $a \in A$. Maka berlaku $RI_A = I_AR = R$.

Ambil φ adalah suatu pemetaan A into B, maka $\varphi\varphi^{-1}$ adalah suatu relasi pada A yang merupakan I_A, tetapi $\varphi\varphi^{-1} = I_{pr2}$. Jadi I_{pr2} jelas termasuk dalam $\varphi\varphi^{-1}$ dan

$x\ \varphi\varphi^{-1} y \Rightarrow$ terdapat $z\ (x\ \varphi^{-1}\ z\ \&\ z\ \varphi\ y)$

$\Rightarrow z\ \varphi\ x\ \ \&\ \ z\ \varphi\ y$

$\Rightarrow x = y$ (Karena φ adalah pemetaan)

Jika φ adalah permutasi dari A, maka $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = I_A$.

Definisi 2.3.4

Jika P adalah himpunan bagian dari himpunan A dimana A terdiri atas elemen-elemen yang membentuk suatu semigrup G dan P memenuhi operasi seperti dalam G maka P dinamakan subsemigrup dari G.

Pada umumnya suatu himpunan bagian H dari grupoid G membentuk suatu subgrupoid dari G jika H dapat diselesaikan dengan operasi seperti dalam G.

Contoh 2.3.4.1

.	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	b	c

Setiap himpuna bagian membentuk subsemigrup.

Contoh 2.3.4.2

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Mempunyai dua subsemigrup , semigrup itu sendiri dan { 0 }.

Suatu elemen e dalam suatu grupoid dimana e e = e dinamakan idempoten. Idempoten selalu membentuk subgrupoid (dalam contoh 2.3.4.1, semua elemen yaitu a,b dan c adalah idempoten, sedangkan dalam contoh 2.3.4.2 idempotennya hanya 0 saja).Selanjutnya misalkan T_A adalah himpunan dari semua pemetaan dari himpunan A into dirinya sendiri maka T_A membentuk suatu subsemigrup pada semigrup dari semua relasi pada A, karena suatu pemetaan adalah relasi dan produk dari dua pememetaan adalah pemetaan pula. Untuk A berhingga himpunan T_A mempunyai anggota sebanyak $|A|^{|A|}$ elemen, dimana $|A|$ banyaknya anggota A.

Beberapa himpunan bagian dari T_A yang menghasilkan subsemigrup dari T_A dikatakan sebagai semigroup transformasi.

Produk dari 2 permutasi A adalah permutasi dari A pula sebab itu himpunan dari seluruh permutasi pada A (dalam kasus berhingga mengandung $|A|!$ elemen) membentuk suatu subsemigrup dari T_A dan juga pada semigrup dari seluruh relasi pada A.

2.4. Identitas, Monoid

Suatu grupoid G dikatakan komutatif jika untuk setiap a,b dalam G berlaku a . b = b . a dan jika dalam tabel terlihat simetris terhadap diagonal pokoknya.

Contoh dari grupoid atau semigrup yang komutatif adalah himpunan bilangan bulat pada operasi perkalian atau penjumlahn . Sedang yang tidak komutatif adalah komposisi dari dua relasi berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Suatu elemen e_l pada suatu grupoid dinamakan identitas kiri jika untuk setiap a dalam grupoid ini berlaku :

$$e_l \; a = a$$

karena $e_l . e_l = e_l$ maka setiap identitas kiri adalah elemen idempoten.

Suatu elemen e_r pada suatu groupid dinamakan identitas kanan jika untuk setiap a dalam grupoid ini berlaku :

$$a \; e_r = a$$

Jadi $e_l . e_r = e_l$, padahal $e_l . e_r = e_r$, maka $e_r = e_l$. Dapat disimpulkan bahwa suatu grupoid jika mempunyai identitas kiri dan kanan maka identitas itu harus sama. Elemen-elemen e_l dan e_r dalam grupoid ini dinamakan elemen identitas dan dalam grupoid paling banyak hanya mempunyai satu elemen identitas.

Semigrup dari himpunan semua bilangan bulat positif pada operasi penjumlahan tidak mempunyai suatu identitas tetapi untuk semigrup dari bilangan bulat non negatif mempunyai identitas yaitu bilangan 0.

Semigrup bebas Σ^* mempunyai suatu elemen identitas yaitu kata kosong Λ.

Relasi identitas I_A adalah identitas dalam semigrup dari seluruh relasi pada A, seluruh pemetaan pada A, dan seluruh permutasi pada A.

Suatu semigrup dengan elemen identitas dinamakan monoid. Misalkan semigrup G tanpa elemen identitas e, kemudian ditambahkan elemen identitas e ke G maka G ∪ {e} merupakan suatu monoid dengan identitas e. Jadi setiap semigrup tanpa identitas dapat menjadi monoid dengan penambahan suatu elemen identitas.

2.5. Isomorfisma

Definisi 2.5

Dua grupoid G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis ditulis $G_1 \approx G_2$ jika ada pemetaan satu-satu φ dari G_1 onto G_2 sedemikian sehingga untuk setiap $a, b \in G$ berlaku

$$\varphi (a . b) = (\varphi a) (\varphi b)$$

(pruduk a.b dihitung dalam G_1 dan (φ a)(φ b) dalam G_2) Untuk selanjutnya φ dinamakan isomorfisma atau pemetaan yang isimorfis.

Pernyataan diatas dapat dikatakan sebagai : Bayangan dari suatu produk dari dua anggota adalah sama dengan produk dari bayangannya.

Suatu contoh adalah grupoid dari semua bilangan riil positif = (R^+) pada operasi pergandaan dan grupoid dari semua himpunan dari bilangan riil = (R) pada operasi penjumlahan. Misal pemetaan yang mengawankan suatu bilangan a dari groupoid pertama onto bilangan log a pada grupoid kedua dan $\varphi : R^+ \longrightarrow R$ adalah suatu isimorfisma. φ adalah suatu pemetaan onto didefinisikan :

$\varphi : a \longrightarrow \log a$, maka :

$\text{Log}(ab) = \log a + \log b$

Groupid G_1 sering digunakan untuk mendapatkan suatu grupoid isimorfis G_2 dimana anggota-anggotanya bisa berupa bilangan-bilangan , matrik-matrik ataupun pemetaan-pemetaan. Dari hal diatas G_2 dikatakan memberikan suatu gambaran (isomorfis) yang tepat dari G_1.

Teorema 2.5

Setiap monoid G dapat digambarkan dengan tepat dengan suatu semigrup dari pemetaan-pemetaan.

Bukti :

Anggap himpunan $K = \{ \theta g \} (g \in G)$, pemetaan - pemetaan dari himpunan pada anggota-anggota dari G didefinisikan sebagai berikut : $\theta g \; a = a \; g$, $a \in g$.

K jelas merupakan semigrup. Ambil g_1, g_2 elemen - elemen yang berbeda dari G. Misal $g_1 . g_2 = g_3$, maka untuk setiap $a \in g$:

$$
\begin{aligned}
(\theta g_1 \; \theta g_2) \; a &= \theta g_1 (\theta g_2 \; a) \\
&= \theta g_1 (g_2 \; a) \\
&= g_1 (g_2 \; a) \\
&= (g_1 g_2) \; a \\
&= g_3 \; a \\
&= \theta g_3 \; a
\end{aligned}
$$

maka $\theta g_1 \; \theta g_2 = \theta g_3$

G adalah isomorfis ke K, sebab pemetaan φ yaitu G onto K yang didefinisikan dengan $\varphi \; g = \theta g$ adalah satu-satu sebab jika $g_1 \neq g_2$ maka :

$$\theta g_1\, e = g_1\, e = g_1 \neq g_2 = g_2\, e = \theta g_2\, e.$$

Selanjutnya $\theta g_1 \neq \theta g_2$ (e adalah identitas dari G) dan $\varphi\,(\,g_1\, g_2\,) = \theta g_1 g_2 = \theta g_1\, \theta g_2 = (\,\varphi\, g_1\,)\,(\,\varphi\, g_2\,)$. Jadi φ adalah suatu isomorfisma.

Teorema diatas tidak berlaku pada grupoid - grupoid yang tidak assosiatif sebab :

$$(\,\theta g_1\, \theta g_2\,)\, a = \theta g_1\,(\,\theta g_2\, a\,) = \theta g_1\,(\,g_2\, a\,)$$
$$= g_1\,(\,g_2 . a\,)$$

Pemetaan-pemetaan θg dinamakan translasi kanan dari G.

Contoh 2.5

Untuk G =

.	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	b	c

$$\theta a = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad \theta b = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & b & b \end{bmatrix} \quad \theta c = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

2.6. Grup

Ambil G adalah suatu grupoid dengan identitas e . Suatu elemen a_l dinamakan invers kiri dari a dalam G jika $a_l\, a = e$ dan suatu elemen a_r dinamakan invers kanan dari a dalam G jika $a\, a_r = e$.

Jika a_l invers kiri dalam monoid G maka invers kiri tersebut sama dengan invers kanan a_r sebab :

$$a_l = a_l\, e$$

$$= a_l\ (\ a\ a_r\ )$$
$$= (\ a_l\ a\ )\ a_r$$
$$= e\ a_r$$
$$= a_r$$

a_r dan a_l diatas dinamakan suatu invers dari elemen a dan ditulis dengan a^{-1}, sehingga $a^{-1}a = a\ a^{-1} = e$.

Tidak semua elemen dari suatu monoid harus mempunyai suatu invers. Sebagai contoh dalam semigrup bebas dari kata-kata (word), hanya $\wedge$ yang mempunyai invers yaitu $\wedge$ itu sendiri. Jadi jelas bahwa tidak ada kata lain dapat dirangkaikan menjadi sautu kata kosong.

Untuk suatu relasi R pada A, produk RR^{-1} pada umumnya tidak sama dengan relasi identitas I_A. Tetapi untuk setiap permutasi P maka $PP^{-1} = P^{-1}P = I_A$. Sebab itu dalam semigrup pada seluruh permutasi pada himpunan A setiap elemennya mempunyai suatu invers.

Definisi 2.6.1

Suatu monoid yang semua elemennya mempunyai invers dinamakan suatu grup.

Contoh 2.6.1.1

himpunan semua bilangan bulat membentuk suatu grup dengan operasi penjumlahan. 0 adalah elemen identitas dan invers dari a adalah -a.

Contoh 2.6.1.2

Himpunan semua bilangan rasional positif membentuk suatu grup dengan operasi pergandaan. 1 adalah elemen identitas dan $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Contoh 2.6.1.3

Himpunan semua bilangan bulat mod 3 dengan operasi penjumlahan

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

0 adalah elemen identitas , $1^{-1} = 2$, $2^{-1} = 1$,$0^{-1} = 0$

Dalam grup G berlaku $(a^{-1})^{-1} = a$, $e^{-1} = e$,$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $a^0 = e$, $a^{-n} = (a^{-1})^n$ dan bahwa hukum-hukum umum dengan operasi-operasi dengan pangkat positif , negatif, berlaku dalam suatu grup.

Suatu grupuid G bisa hanya *mempunyai* satu elemen identitas , tetapi elemen *idempoten* lebih dari satu. Suatu grup *mempunyai* idempoten khusus yaitu identitasnya. Selanjutnya karena setiap grup G adalah suatu *monoid maka* translasi kanannya adalah:

$$\theta g\ a = \theta g\ b \Rightarrow g\ a = g\ b$$
$$\Rightarrow a\ g\ g^{-1} = b\ g\ g^{-1}$$
$$\Rightarrow a = b$$

sehingga setiap grup G dapat diwakili dengan suatu group dari permutasi-permutasi pada himpunan elemen-elemen pada G .

Dalam suatu grup G berlaku hukum konselasi kanan jika berlaku $a\ g = b\ g \Rightarrow a = b$ dan hukum konselasi kiri jika berlaku $g\ a = g\ b \Rightarrow a = b$.

2.7. Partisi

Ambil R adalah suatu relasi ekwivalensi pada A, dan misalkan R (a) = R a = { b | a R b }. Asumsikan bahwa c $\in$ R (a) $\cap$ R (b). Maka a R c dan b R c dan dengan sifat simetris maka c R b sehingga a R b (transitif). Jika x $\in$ R (b) maka b R x, dengan sifat transitif didapatkan a R x, sehingga x $\in$ R (a) jadi R (b) $\subseteq$ R (a). Dengan simetri R (a) $\subseteq$ R (b) jadi R (a) = R (b).

Pandang sekarang himpunan bagian – himpunan bagian R (a), R (b),........dari A. Karena R refleksif maka setiap elemen dari A berada dalam himpunan bagian tersebut , sehingga union dari R (a), R (b),.......adalah A. Seperti yang ditunjukkan diatas jika dua himpunan bagian mempunyai anggota yang sama, maka himpunan itu dikatakan sama. Misalkan himpunan bagian-himpunan bagian dari R (a). R (b) ....ditulis dengan H_1, H_2,........dimana $H_i \cap H_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Himpunan bagian-himpunan bagian diatas tadi dinamakan suatu partisi π dari A, dan H_i dinamakan kelas ekwivalensi dari R atau blok partisi dari π.

π = { H_1, H_2,.......} adalah partisi dari A, yaitu suatu himpunan dari himpuna bagian-himpunan bagian dari A sedemikian sehingga mereka saling asing dan unionnya adalah A. Selanjutnya a R b $\Leftrightarrow$ a,b terdapat dalam blok yang sama. R jelas simetris, refleksif dan transitif jadi R adalah relasi ekwivalensi. Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa :

"Setiap relasi ekwivalensi R pada A menyebabkan suatu partisi π pada A sedemikian sehingga a,b termasuk dalam blok yang sama dari π jika dan hanya jika a R b, sebaliknya setiap partisi π dari A didefinisikan suatu relasi ekwivalensi R pada A sedemikian hingga a R b jika dan hanya jika a dan b termasuk dalam blok partisi yang sama dari π."

Contoh 2.7.1

Ambil A = { 1,2,3,4,5,6 } dan π = {{ 1,2,5 },{ 3 } { 4,6 }}.

maka R adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 3 & 4 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 & 5 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.7.2

Untuk A = { 1,2,3,4,5,6 } dan π = {{ 1,2 },{ 3,4 } { 4,6 }}.

maka R adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Himpunan blok-blok dari partisi π yang berhubungan dengan relasi ekwivalensi R juga dinamakan himpunan kwosen A/R atau A/π. Banyaknya kelas ekwivalensi dari R dinamakan indeks dari R. Jika A/R *mempunyai* jumlah blok berhingga, maka R dikatakan sebagai suatu indeks berhingga.

2.8. Sifat-sifat dari partisi

Ambil φ adalah pemetaan dari A into B. Kemudian R =

$\varphi\ \varphi^{-1}$ adalah suatu relasi ekwivalensi pada A. Jadi identitas I_A dari A termasuk dalam R

$$R^{-1} = (\ \varphi\ \varphi^{-1}\ )^{-1} = (\ \varphi^{-1})^{-1}\varphi^{-1} = \varphi\ \varphi^{-1} = R$$

maka:

$$\varphi^{-1}\varphi = I\ \varphi_{pr2} \subseteq I_B$$

sebab itu

$$R^2 = \varphi\ \varphi^{-1}\ \varphi\ \varphi^{-1} \subseteq \varphi\ I_B\ \varphi^{-1} \subseteq \varphi\ \varphi^{-1} = R$$

Ambil π adalah suatu partisi dari A. Selanjutnya didefinisikan bahwa a π b jika dan hanya jika a dan b termasuk dalam blok yang sama dari π.

Ambil $\pi_1 = \{ H_1, H_2, \ldots\}$ dan $\pi_2 = \{ K_1, K_2, \ldots\}$ adalah dua buah partisi dari A. Pandang himpunan dari himpunan bagian-himpunan bagian tak kosong dari A yang didapatkan irisan pasangan-pasangan blok-blok π_1 dengan π_2, yaitu himpunan-himpunan tak kosong antara $H_1 \cap K_1$, $H_1 \cap K_2$, $H_2 \cap K_2$, $H_2 \cap K_1$, ...sedemikian sehingga untuk setiap anggota dari A termasuk dalam satu H_i dan satu K_j sehingga irisan-irisan tak kosong ini membentuk suatu partisi dari A . Untuk selanjutnya hal diatas bisa ditulis $\pi_1\pi_2$ yaitu produk dari π_1 dan π_2 dan disimpulkan bahwa a $\pi_1\pi_2$ b $\Leftrightarrow$ a π_1 b dan a π_2 b.

Contoh 2.8.1

Apabila A = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 }

π_1 = {{ 1,2 },{ 3,4 },{ 5,6 },{ 7,8 },{ 9,10 }}

π_2 = {{ 1,2,3,4 },{ 5,6 },{ 7,8 },{ 9,10}}

$\pi_1\ \pi_2$ = {{ 1,2 },{ 3,4 },{ 5,6 },{ 7 },{ 8 },

{ 9,10 }}.

Dari hal diatas dapat disimpulkan bahwa :

- $R_1 \cap R_2$ adalah relasi ekwivalensi bila R_1 dan R_2 relasi ekwivalensi.
- $\pi_1\pi_2$ merupakan relasi ekwivalensi dari $R_1 \cap R_2$.

$\pi_1 \le \pi_2$ jika dan hanya jika $a\ \pi_1\ b \Rightarrow a\ \pi_2\ b$, yaitu jika dan hanya jika setiap blok dari π_1 termuat dalam satu blok dari π_2. Maka jelaslah bahwa $\pi_1\pi_2 \le \pi_1$ dan $\pi_1\pi_2 \le \pi_2$.

Partisi π_0 yang mana seluruh anggota-anggota dari A membentuk satu blok (berhubungan dengan relasi ekwivalensi A X A) dan partisi π_{iden} yang mana setiap blok adalah satu singleton (berhubungan dengan relasi ekwivalensi I_A) disebut pertisi trivial. Jadi $\pi \le \pi_0$ dan $\pi_{iden} \le \pi$.

2.9. Kongruensi, Partisi admissibel

Suatu relasi ekwivalensi E_r pada grupoid G dinamakan kongruensi kanan bila $a\ E_r\ b \Rightarrow a\ x\ E_r\ b\ x$ dan dinamakan kongruensi kiri bila $a\ E_l\ b \Rightarrow x\ a\ E_l\ x\ b$ untuk setiap $x \in G$.

Definisi 2.9.1

Suatu relasi ekwivalensi E pada G yang memenuhi kongruensi kanan dan kiri dinamakan kongruensi pada G.

Dalam grupoid komutatif setiap kongruensi kanan pasti merupakan kongruensi kiri jadi merupakan kongruensi. Misal E adalah suatu kongruensi maka:

$$a \; E \; b \; , \; c \; E \; d \Rightarrow ac \; E \; bc \; , \; bc \; E \; bd$$

$$\Rightarrow ac \; E \; bd$$

(karena E adalah transitif). Untuk setiap dua (sama atau beda) kelas-kelas ekwivalensi H_1 dan H_2 dari E, produk dari setiap elemen dari H_1 dengan H_2 akan menjadi salah satu kelas ekwivalensi yang sama dari E.

Definisi 2.9.2

Partisi π yang berhubungan dengan kongruensi E yang mempunyai sifat bahwa untuk dua blok yang sama atau berlainan yaitu H_1, H_2 dari π maka terdapat suatu blok H_3 yang tunggal sedemikian hingga :

$$H_1H_2 \subseteq H_3 \text{ dimana}$$

$$H_1H_2 = \{ ab \mid a \in H_1, b \in H_2 \}$$

dinamakan partisi admissibel (suatu partisi dengan sifat substitusi).

Jadi setiap relasi kongruensi pada suatu grupoid menyebabkan suatu partisi admissibel. Jelas bahwa setiap partisi admissibel dari suatu grupoid menyebabkan suatu relasi kongruensi pula.

Untuk suatu relasi kongruensi kanan E_r dan hubungannya dengan partisi $\pi = \{ H_1, H_2, \ldots\}$ didapatkan jika $a, b \in H_i$ maka untuk setiap $x \in G$ terdapat suatu H_k sedemikian hingga ax , $bx \in H_k$, yaitu $H\, x \subseteq H_k$.

Contoh 2.9.1

Diambil S_3 adalah grup dari seluruh permutasi dengan 3 elemen, misalnya : $\{ e, a, a^2, b, c, d \}$ dengan

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

maka S_3 :

	e	a	a^2	b	c	d
e	e	a	a^2	b	c	d
a	a	a^2	e	c	d	b
a^2	a^2	e	a	d	b	c
b	b	d	c	e	a^2	a
c	c	b	d	a	e	a^2
d	d	c	b	a^2	a	e

Partisi $\pi = \{ H_1 = \{ e, a, a^2 \}, \; H_2 = \{ b, c, d \} \}$ adalah suatu partisi admissibel karena :

$$H_1H_1 \subseteq H_1, \; H_2H_2 \subseteq H_1; \; H_1H_2 \subseteq H_2, \; H_2H_1 \subseteq H_2.$$

Hubungan dengan relasi kongruensi adalah :

$$E = \begin{bmatrix} e & e & e & a & a & a & a^2 & a^2 & a^2 & b & b & b & c & c & c & d & d & d \\ e & a & a^2 & e & a & a^2 & e & a & a^2 & b & c & d & b & c & d & b & c & d \end{bmatrix}$$

Sedangkan partisi $\pi = \{ H_1 = \{ e, b \}, H_2 = \{ a, d \},$

$H_3 = \{ a^2, c \}\}$ adalah tidak admissibel sebab $H_2 H_3 = \{ a\ a =$ e, $a\ c = d$, $d\ a^2 = b$, $d\ c = a$ $\}$ tidak termasuk dalam blok dari π. Jadi hubungan ekwivalensi tidak merupakan suatu kongruensi. Berikut ini adalah suatu kongruensi kanan karena :

$$H_1 e \subseteq H_1,\ H_1 b \subseteq H_1,\ H_1 a \subseteq H_2,\ H_1 d \subseteq H_2,$$
$$H_1 a^2 \subseteq H_3,\ H_1 c \subseteq H_3,\ H_2 e \subseteq H_2,\ H_2 b \subseteq H_3,$$

Terlihat bahwa : e , $b \in H_1$, tetapi $h_2 e$ dan $H_2 b$ menjadi termasuk dalam blok yang berbeda dari π. Selanjutnya relasi ekwivalensi R dalam hubungannya dengan partisi $\pi = \{ H_1 = \{ e, a, b \}, H_2 = \{a^2, c, d \}\}$ tidak mempunyai sifat-sifat kongruensi karena $H_1 a =$ $\{ a, a^2, d \}$ tidak termasuk dalam himpunan bagian dari blok-blok dari π, sebab itu R tidak merupakan kongruensi kanan . Produk $a\ H_1 = \{ a, a^2, c \}$ menunjukan bahwa R juga tidak merupakan kongruensi kiri.

Contoh 2.9.2

Pada semigrup bebas Σ^* dan didefinisikan dalam partisi sebagai berikut : $H_0 = \{ \wedge \}$, $H_1 = \Sigma$ (yaitu seluruh kata dengan panjang 1), $H_2 = \Sigma^2$ (seluruh kata dengan panjang 2) dan seterusnya. Partisi ini adalah admissibel karena $\Sigma^i . \Sigma^j = \Sigma^{i+j}$ (produk dari kata-kata dengan panjang i dan j selalu merupakan kata-kata dengan panjang i+j). Jumlah dari kelas-kelas kongruensi (atau indeks dari kongruensi) adalah tak berhingga.

Contoh 2.9.3

Semigrup dari bilangan bulat non negatif yang didefinisikan sebagai berikut $m \; E \; n \Leftrightarrow p | \; m-n$ (maksudnya p membagi habis m − n) maka E adalah suatu ekwivalensi.

$p | \; m-n, \quad p | \; m-n \;\Leftrightarrow\; p | \; n-m$

$0 = k \; p$

$m-m = k \; p$

$p | \; m-m$

untuk $m < n \Rightarrow m-n < 0$

$-(\; m-n \;) > 0$

$-(\; m-n \;) = k \; p$

$p |-(\; m-n \;)$

jadi $p | \; n-m$

untuk $m > n \Rightarrow m-n > 0$

$m-n = k \; p$

$-(\; m-n \;) = k \; p$

$n-m = k \; p$

jadi $p | \; n-m$

$p | \; m-n, \; p | \; n-k \Rightarrow p |(\; m-n)+(\; n-k \;) = m-k$

$p | \; m-n \Rightarrow m-n = k \; p$

$p | \; n-k \Rightarrow n-k = k' p$

$m-n+n-k = k \; p + k' p$

$= (\; k = k') \; p$

$= k \; p$

jadi $p | \; m-k$

$p | \; m-n \Rightarrow p | \; (\; m-n \;)k = mk - nk$ dan $p | \; km - kn$ maka

$m \, E \, n \Rightarrow mk \, E \, nk$ dan $km \, E \, kn$ untuk setiap k, jadi E adalah suatu kongruensi.

Blok-blok dari partisi terdiri dari bilangan-bilangan bulat yang mempunyai sisa 0 jika dibagi p, mempunyai sisa 1 jika dibagi p dan seterusnya sampai bilangan yang mempunyai sisa p-1 jika dibagi p. Blok-blok ini disebut juga kelas-kelas kongruensi modulu p, dan jika m,n berada dalam kelas yang sama maka ditulis $m \equiv n \pmod{p}$. Sebagai contoh jika p = 5 maka didapatkan blok-blok sebagai berikut.

$$\overline{0} = \{ 0,5,10,15,\ldots.\}$$

$$\overline{1} = \{ 1,6,11,16,\ldots.\}$$

$$\overline{2} = \{ 2.7.12.17,\ldots.\}$$

$$\overline{3} = \{ 3,8,13,18,\ldots.\}$$

$$\overline{4} = \{ 4,9,14,19,\ldots.\}$$

Partisi admissibel dari grupoid G membentuk suatu himpunan bagian dari himpunan semua partisi dari G. Irisan $\pi_1\pi_2$ dari dua partisi admissibel π_1 dan π_2 adalah suatu partisi admissibel pula, sebab :

$$a \; \pi_1\pi_2 \; b \Leftrightarrow a \; \pi_1 \; b \; , \; a \; \pi_2 \; b$$

Selanjutnya untuk setiap x berlaku :

$$a \; \pi_1 \; b \; , \; a \; \pi_2 \; b \Rightarrow ax \; \pi_1 \; bx \; , \; ax \; \pi_2 \; bx$$

sebab itu:

$$ax \; \pi_1\pi_2 \; bx \quad \text{dan} \quad xa \; \pi_1\pi_2 \; xb.$$

2.10. Homomorfisma

Miasal suatu partisi admissibel $\pi = \{ H_1, \; H_2, \ldots.\}$

dari grupoid G dan ambil himpunan { $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$,....} yang didefinisikan :

$$\overline{H}_i\ \overline{H}_j = \overline{H}_k \Leftrightarrow H_i\ H_j \subseteq H_k$$

Produk dari $\overline{H}_i\ \overline{H}_j$ dapat ditentukan juga sebagai berikut :

Diambil sembarang anggota dari H_i dan H_j, maka akan didapatkan H_k yang merupakan produk dari anggota H_i dan H_j sehingga $\overline{H}_i\ \overline{H}_j = \overline{H}_k$. Grupoid { $\overline{H}_1$,$\overline{H}_2$,....} dinamakan grupoid faktor dari G atas π dan dilambangkan dengan G/π atau G/E.

Contoh 2.10.1

Dalam contoh 2.9.1 mempunyai grupoid faktor sebagai berikut :

	$\overline{H}_1$	$\overline{H}_2$
$\overline{H}_1$	$\overline{H}_1$	$\overline{H}_2$
$\overline{H}_2$	$\overline{H}_2$	$\overline{H}_1$

Contoh 2.10.2

Dalam contoh 2 9 3 diperoleh :

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

Misal φ suatu pemetaan dari G onto G/π yang didefinisikan :

$$\varphi a = \overline{H} \Leftrightarrow a \in H$$

yaitu setiap elemen dari G dipetakan onto blok (dengan garis . Dengan definisi pergandaan dalam G/π didapatkan :

$$(\varphi a)(\varphi b) = \varphi(ab)$$

yaitu , φ memenuhi sifat isomorfisma, kecuali untuk pemetaan yang tidak satu-satu.

Definisi 2.10.1

Suatu pemetaan φ dari suatu grupoid G onto grupoid G' dan memenuhi sifat :

$$\underbrace{\varphi(g_1 g_2)}_{\text{digandakan dalam } G} = \underbrace{(\varphi g_1)(\varphi g_2)}_{\text{digandakan dalam } G'}$$

dinamakan suatu pemetaan homomorfisma dari G onto G'. G' dinamakan bayangan homomorfis dari G.

Suatu kongruensi E pada G menyebabkan suatu grupoid faktor G/E, yang merupakan bayangan homomorfis dari G yang dinamakan homomorfisma natural yang memetakan setiap elemen dari G onto kelas-kelas kongruensinya.

Teorema 2.10.1

Misal φ adalah suatu homomorfisma dari suatu grupoid G onto groupoid G'. $E = \varphi\varphi^{-1}$ adalah kongruensi pada G, maka ada suatu isomorfisma θ dari G/E onto G' sedemikian hingga $\varphi = \Psi\,\theta$, dimana Ψ adalah homomorfisma natural dari G onto G/E.

Bukti :

E jelas merupakan ekwivalensi.

$a\,E\,b \Rightarrow \varphi a = \varphi b \Rightarrow (\varphi a)(\varphi c) = (\varphi b)(\varphi c)$

$\Rightarrow \varphi(ac) = \varphi(bc)$

$\Rightarrow ac = bc$ untuk setiap c dalam G

Dengan cara yang sama $ca\,E\,cb$, maka E adalah kongruensi. Ambil H adalah kelas kongruensi dari E dan a adalah sembarang elemen dalam H. Didefinisikan $\theta\,\overline{H} = \varphi a$. θ adalah suatu pemetaan dari G/E onto G', $\theta\,H$ tidak tergantung pada salah satu wakil sebab $a, b \in H \Rightarrow a\,E\,b \Rightarrow \varphi a = \varphi b$. θ adalah onto karena semua elemen dari G' adalah bayangan dari suatu elemen G. θ adalah suatu homomrfisma karena :

$$\theta(\overline{H}_1\,\overline{H}_2) = \varphi(a_1 a_2)$$

$$= (\varphi a_1)(\varphi a_2)$$

$$= (\theta H_1)(\theta H_2)$$

(disini $a_1 \in H_1$, $a_2 \in H_2$ dan $H_1 H_2 \in H_3$, dimana $H_1 H_2 = H_3$).

θ adalah satu-satu :

$\theta H_1 = \theta H_2 \Rightarrow \varphi a_1 = \varphi a_2$

$\Rightarrow a_1\,E\,a_2$

$\Rightarrow H_1 = H_2$

$\Rightarrow \overline{H}_1 = \overline{H}$

Jadi θ adalah isomorfisma dari G/E onto G'.

Sekarang ambil $a \in G$ sebagai kelas kongruensi H maka :

$$\varphi a = \Theta \overline{H}$$
$$= \Theta (a \varphi)$$
$$= (\varphi \Theta) a$$

sehingga $\varphi = \Psi \Theta$

Dimisalkan dua buah kongruensi E_1 dan E_2 pada suatu grupoid G dan $E_1 \leq E_2$. Dengan kata lain ada dua buah partisi admissibel $\pi_1 = \{ H_1, H_2, \ldots\ldots \}$ dan $\pi_2 = \{ K_1, K_2 \ldots\ldots \}$ dari G dan $\pi_1 \leq \pi_2$, yaitu blok dari π_1 termasuk dalam blok π_2. Maka G/π_2 adalah bayangan homomorfis dari G/π_1. Selanjutnya didefinisikan :

$$\varphi \overline{H}_i = \overline{K}_j \Leftrightarrow H_i \leq K_j$$

φ adalah suatu pemetaan dari G/π_1 onto G/π_2 (setiap H_i termuat dalam satu dan hanya satu K_j dan setiap K_j memuat H_i).

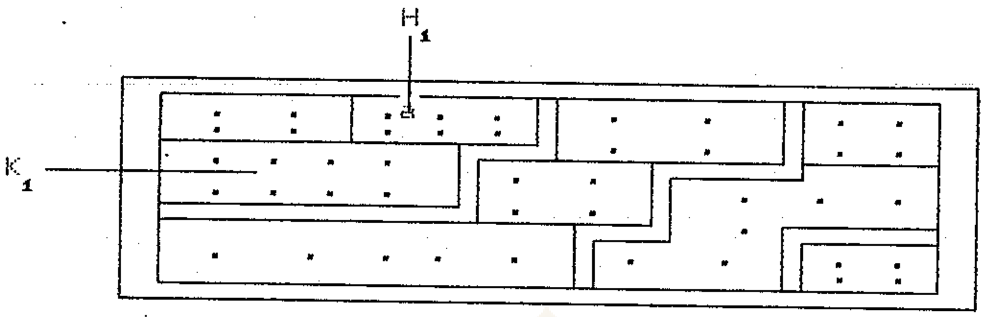
$$\overline{H}_1 \overline{H}_2 = \overline{H}_3 \Rightarrow \overline{H}_1 \overline{H}_2 \leq H_3 \Rightarrow K_1 K_2 \cap K_3 \neq \emptyset$$

dimana $H_1 \leq K_1$, $H_2 \leq K_2$ dan $H_3 \leq K_3 \Rightarrow K_1 K_2 \leq K_3 \Rightarrow \overline{K}_1 \overline{K}_2 = \overline{K}_3$ sehingga :

$$\varphi (\overline{H}_1 \overline{H}_2) = \varphi \overline{H}_3$$
$$= \overline{K}_3$$
$$= \overline{K}_1 \overline{K}_2$$
$$= (\varphi \overline{H}_1)(\varphi \overline{H}_2)$$

Jadi φ adalah suatu homomorfisma.

Partisi G/π_1 yang disebabkan oleh φ membagi blok-blok π_1 kedalam himpunan blok-blok, dimana tiap-tiap himpunan berhubungan dengan satu blok dari π_2, yang digambarkan sebagai berikut :



Titik-titik adalah elemen-elemen dari G, garis tunggal dan ganda dimaksudkan blok dari π_1; dan garis ganda adalah π_2. Elemen a termasuk dalam blok H_1 pada π_1 dan dua blok yang lainnya yaitu H_2, H_3 termasuk dalam blok K_1 dari π_2.

2.11. Homomorfisma dari Semigrup

Suatu bayangan homomorfis dari semigrup adalah semigrup pula sebab :

$$
\begin{aligned}
(\varphi a \ \ \varphi b)\, \varphi c &= \varphi\,(a\,b)\,\varphi \\
&= \varphi\,((a\,b)\,c) \\
&= \varphi a \ \ \varphi\,(b\,c) \\
&= \varphi a\,(\varphi b \ \ \varphi c)
\end{aligned}
$$

Suatu bayangan homomorfis dari suatu monoid adalah monoid pula sebab :

$$(\varphi e)(\varphi a) = \varphi\,(e\,a)$$

$$(\varphi a)(\varphi e) = \varphi\,(a\,e)$$

jadi bayangan identitas adalah identitas pula, selanjutnya

$$(\varphi a)(\varphi a^{-1}) = \varphi(a\, a^{-1}) = \varphi e \text{ dan}$$

$$(\varphi a^{-1})(\varphi a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi e \Rightarrow \varphi a^{-1} = (\varphi a)^{-1}$$

Sehingga bayangan homomorfis dari suatu grup adalah group pula.

Suatu grup yang dapat dihasilkan dengan satu elemen dinamakan grup siklik. Grup siklik adalah komutatif.

Banyaknya elemen – elemen dalam grup berhingga dinamakan order. Ambil a adalah penghasil dari grup siklik G dengan order p. Elemen-elemen dari grup ini dapat ditulis :

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4, \ldots a^{p-2},\ a^{p-1},\ a^p = e$$

Pemetaan $\varphi a^k = \bar{k}$ jelas suatu isomorfisma dari G onto grup pada kelas-kelas kongruensi modulo p.

Contoh 2.1.11

Misal Σ^* adalah monoid bebas yang dihasilkan oleh $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_{m-1}\}$, ambil $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ adalah himpunan berhingga dan $M = \{Is, M\sigma_0, M\sigma_1, \ldots M\sigma_{m-1}\}$ adalah m + 1 pemetaan pada S into S. Pemetaan-pemetaan ini menghasilkan suatu semigrup berhingga G_A. G_A adalah suatu bayangan homomorfis dari Σ^*. Jadi untuk setiap kata $X = \sigma_{i1}\sigma_{i2}.\ \sigma_{ij}$ dalam Σ^* didefinisikan :

$$\begin{aligned}\varphi x &= \varphi(\sigma_{i1}\sigma_{i2} \ldots \ldots \sigma_{ij}) \\ &= M\sigma_{i1}M\sigma_{i2} \ldots \ldots M\sigma_{ij} \\ &= M_X\end{aligned}$$

Bagian kanan adalah produk dari pemetaan-pemetaan dan setelah dihitung merupakan elemen-elemene dari G_A. φ adalah pemetaan pada Σ^* onto G_A, karena setiap elemen pada G_A adalah suatu produk dari penghasil M, dan itu merupakan suatu bayangan dari kata-kata dalam Σ^*. Untuk dua kata $X = \sigma_{i1}\sigma_{i2}\ldots\ldots\sigma_{ij}$ dan $Y = \sigma_{p1}\sigma_{p2}\ldots\sigma_{pq}$ dalam Σ^*.

$$\begin{aligned}\varphi(XY) &= M\sigma_{i1}M\sigma_{i2}\ldots\ldots M\sigma_{ij}M\sigma_{p1}M\sigma_{p2}\ldots\ldots M\sigma_{pq}.\\ &=(M\sigma_{i1}M\sigma_{i2}\ldots\ldots M\sigma_{ij})(M\sigma_{p1}M\sigma_{p2}\ldots\ldots M\sigma_{pq})\\ &=(\varphi X)(\varphi Y)\end{aligned}$$

Jadi φ adalah suatu homomorfisma. $E = \varphi\varphi^{-1}$ adalah suatu relasi kongruensi pada Σ^*. Setiap kelas kongruensi terdiri dari seluruh kata-kata X dalam Σ^* yang berkaitan dengan M_X yaitu pemetaan pada S. E mempunyai indeks berhingga yaitu banyaknya elemen-elemen dalam G_A.

2.12. Subgrup dari Grup G

Definisi 2.12

Suatu subgrup H pada group G adalah suatu himpunan bagian dari G yang merupakan grup terhadap operasi seperti dalam G.

Contoh 2.12

Dalam contoh 2.9.1 elemen-elemen $\{e, a, a^2\}$ membentuk suatu subgrup pada S_3, demikian pula untuk elemen-elemen $\{e, b\}$.

Setiap Grup minimal mempunyai dua subgrup, grup

G itu sendiri dan identitas e yang disebut subgrup trivial. Grup yang tidak siklik mempunyai subgrup nontrivial.

Jika G adalah suatu Grup dan H subgrup dari G maka H a dimana $a \in G$ dinamakan koset kanan dari H dalam G. Asumsikan $c \in Ha \cap Hb$, maka ada $h \in H$ sedemikian hingga $c = h\ a$, jadi :

$$a = h^{-1}c \text{ dan } Ha = Hh^{-1}c = Hc \text{ dan } c = h\ b$$

$$b = h^{-1}b \text{ dan } Hb = Hh^{-1}c = Hc.$$

Jika dua koset kanan dari H dalam G mempunyai suatu elemen yang sama mereka adalah sama , sebaliknya jika $Ha \cap Hb = \emptyset$ maka Ha dan Hb saling asing. Semua elemen dalam suatu koset kanan dari H dalam G adalah berbeda sebab :

$$h_1 a = h_2 a \Rightarrow h_1 = h_2$$

Sebab itu setiap koset kanan dari H mempunyai $|\ H\ |$ elemen. Selanjutnya setiap elemen $g \in G$ termasuk dalam suatu koset kanan Hg sebab $g \in Hg$, karena $g = e\ g$.

2.13. Subgrup Normal

Definisi 2.13

Suatu subgrup H dikatakan sebagai suatu subgrup normal jika koset-koset kanannya merupakan partisi admissibel dari G.

Contoh 2.13

S_3 pada contoh 2.9.1 mempunyai subgrup H= { e,a,a^2 } sebagai suatu subgrup normal karena Ha = { e,a,a^2 } Hb = { b,c,d }.

Suatu grup yang hanya mempunyai subgrup normal trivial dinamakan grup sampel.