# BAB - II

# TEORI DASAR PENUNJANG.

## 2.1 OPERASI BINARI

Definisi 2.1.1

Suatu operasi binari " * " pada sebuah himpunan tak kosong S adalah pemetaan yang menghubungkan setiap pasangan elemen berurutan (a,b) dari $S \times S$, dengan suatu elemen yang terdefinisi tunggal $a * b$ dari S.

Dengan kata lain suatu operasi binari pada himpunan S adalah pemetaan dari $S \times S$ ke dalam S.

CONTOH 2.1

$Z^+$ = himpunan bilangan bulan positif

Didefinisikan operasi binari " * " sebagai berikut :

Untuk $a \neq b$, maka $a * b$ = faktor terkecil dari a dan b

Untuk $a = b$, maka $a * b$ = salah satu dari a atau b

$(2,3) \in Z^+ \times Z^+ \Longrightarrow 2 * 3 = 2 \quad , 2 \in Z^+$

$(7,5) \in Z^+ \times Z^+ \Longrightarrow 7 * 5 = 5 \quad , 5 \in Z^+$

$(4,4) \in Z^+ \times Z^+ \Longrightarrow 4 * 4 = 4 \quad , 4 \in Z^+$

Definisi 2.1.2

Suatu groupoid parsiil $(S,\circ)$ adalah himpunan tak kosong S bersama dengan sebuah operasi binari parsiil " $\circ$ " sedemikian sehingga jika $s \circ t$ didefinisikan untuk s dan t dalam S, maka $s \circ t$ adalah sebuah elemen dari S, dan himpunan dasar S dari suatu groupoid parsiil $(S,\circ)$ disebut carrier.

Definisi 2.1.3

Sebuah groupoid ( S,$\circ$ ) adalah groupoid parsiil yang operasi binari " $\circ$ " didefinisikan untuk semua s dan t dalam S.

Biasanya Operasi binari ditulis st sebagai pengganti s $\circ$ t, dan akan digunakan simbol S untuk menyatakan carrier.

CONTOH 2.2

Misal S = {1,2,3,} dan operasi binari " $\circ$ " pada S didefinisikan sebagai berikut :

$1 \circ 1 = 1$ $\quad$ $2 \circ 1 = 2$ $\quad$ $3 \circ 1 = 3$

$1 \circ 2 = 2$ $\quad$ $2 \circ 2 = 2$ $\quad$ $3 \circ 2 = 3$

$1 \circ 3 = 3$ $\quad$ $2 \circ 3 = 3$ $\quad$ $3 \circ 3 = 3$

Maka operasi binari " $\circ$ " pada S dapat didefinisikan dengan tabel sebagai berikut :

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

Selanjutnya karena operasi binari " $\circ$ " didefinisikan untuk semua elemen dalam S, maka ( S,$\circ$ ) adalah sebuah groupoid dengan carrier S = {1,2,3}

Definisi 2.1.4

Jika A dan B adalah dua subset tak kosong dari sebuah groupoid S, maka hasil kali AB didefinisikan sebagai $AB = \{ ab : a \in A , b \in B \}$

Jika $s \in S$ dan A adalah subset tak kosong dari S, maka hasil kali sA didefinisikan sebagai $sA = \{ sa : a \in A \}$

dan hasil kali As didefinisikan sebagai $As = \{ as : a \in A \}$

Definisi 2.1.5

Suatu subgroupoid T dari groupoid S adalah subset tak kosong dari S sedemikian sehingga hasil kali dua elemen dari T termuat dalam T yaitu $TT \subseteq T$

CONTOH 2.3

Diberikan groupoid $S = \{1,2,3\}$ dan operasi binari pada S didefinisikan seperti pada contoh 2.2

Ambil $T \subseteq S$ dengan $T = \{1,2\}$

maka T adalah subgroupoid dari S, karena $TT \subseteq T$

Sehingga subsgoupoid T dari S dapat didefinisikan pada tabel sebagai berikut :

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |

## 2.2 SEMIGROUP DAN MONOIDA

Definisi 2.2.1

Semigroup (S,.) adalah suatu himpunan S yang tak kosong bersama dengan operasi binari " . " pada S yang memenuhi hukum asosiatif yaitu :

$x.(y.z) = (x.y).z \quad , \forall x,y,z \in S$

Definisi 2.2.2.

Semigroup (S,.) dikatakan

(i) semigroup komutatif

jika berlaku $x.y = y.x \quad , \forall x,y \in S$

(ii) mempunyai elemen identitas e

jika $\exists\ e \in S$, $e.x = x.e = x$ , $\forall x \in S$

iii) mempunyai elemen nol ( 0 )

jika $\exists\ 0 \in S$, $0.x = x.0 = 0$ , $\forall x \in S$

(iv) mempunyai elemen idempoten i

jika $\exists\ i \in S$, $i.i = i$

Definisi 2.2.3

Suatu monoida adalah semigroup yang mempunyai elemen identitas.

CONTOH 2.4.

Diberikan semigroup $(S,\circ)$ dengan $S = \{1,2,3\}$ dan operasi binari " $\circ$ " didefinisikan seperti pada tabel berikut :

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

Akan dibuktikan bahwa himpunan S dengan operasi binari " $\circ$ " memenuhi sifat asosiatif.

(i) $(1 \circ 2\ ) \circ 3\ = 2 \circ 3 = 3$

$1 \circ 2\ (2 \circ 3) = 1 \circ 3 = 3$

(ii) $(3 \circ 1) \circ 2\ = 3 \circ 2 = 3$

$3 \circ (1 \circ 2)\ = 3 \circ 2 = 3$

....... dan seterusnya.

Karena setiap elemen dalam S dapat dioperasikan secara asosiatif , maka operasi binari " $\circ$ " diatas merupakan operasi yang asosiatif.

Sehingga $(S,\circ)$ adalah sebuah semigroup.

Dan karena semigroup ini mempunyai elemen identitas, yaitu 1 maka $(S,\circ)$ juga merupakan monoida.

Catatan :

Bila S tidak memuat elemen identitas, maka dengan memperluas operasi binari pada S ke himpunan, $S \cup \{e\}$ dengan 1 merupakan elemen identitas, maka $S \cup \{e\}$ merupakan monoida dan monoida ini disebut ajungsi (adjunction) dari elemen identitas 1 ke semigroup S.

Sebuah monoida yang dibentuk dengan ajungsi sebuah elemen identitas ke dalam himpunan S yang tak mengandung elemen identitas dinotasikan dengan $S^1$.

Sehingga untuk semigroup S yang sudah memuat elemen identitas $S^1 = S$.

Definisi 2.2.4

Suatu subgroupoid T dari sebuah semigroup S disebut sub semigroup dari S.

Dan T adalah subsemigroup sejati dari S jika $T \subseteq S$ dan $T \neq S$

Definisi 2.2.5

Suatu submonoida dari monoida S adalah sebuah subsemigroup dari S yang memuat elemen identitas dari S.

CONTOH 2.5

Diberrikan semigroup $S = \{1,2,3\}$ dan operasi binari pada S didefinisikan pada tabel seperti pada contoh 2.4

Ambil $T \subseteq S$ dengan $T = \{1,2\}$

Dari contoh 2.3 didapatkan bahwa $T = \{1,2\}$ adalah subgroupoid dari $S = \{1,2,3\}$

Selanjutnya karena $T \subseteq S$ dan $T \neq S$ maka T adalah sub semigroup dari S

Dan karena elemen identitas dari S yaitu 1 termuat dalam T, maka T juga merupakan submonoida dari S.

Definisi 2.2.6

Hasil kali cartesian ( cartesian product ) $A \times B$ dari dua himpunan tak kosong A dan B merupakan himpunan pasangan terurut (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

CONTOH 2.6

Misal $A = \{1,2\}$ dan $B = \{3,4,5\}$

maka :

$A \times B = \{ (1,3) , (1,4) , (1,5) , (2,3) , (2,4) , ( 2,5 ) \}$

Definisi 2.2.7

Hasil kali langsung ( direct product ) $A \otimes S$ dari dua semigroup A dan S adalah semigroup dengan himpunan $A \times S$ sebagai carrier, dengan hasil kalinya didefinisikan sebagai berikut :

$(a,b)\ (a',b') = (aa',bb')$ untuk semua elemen $(a,b)$ dan $(a',b')$ dalam $A \times S$

CONTOH 2.7

Misal $S = \{4,5\}$ adalah semigroup dengan operasi binari pada S didefinisikan sebagai berikut :

$4 \circ 4 = 4$

$4 \circ 5 = 5$

$5 \circ 4 = 5$

$5 \circ 5 = 5$

maka S dapat didefinisikan pada tabel sebagai berikut :

| | 4 | 5 |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 5 |
| 5 | 5 | 5 |

Selanjutnya misal $A = \{1,2,3)$ adalah semigroup dan operasi binari pada A didefinisikan seperti pada tabel berikut

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

maka $A \times S = \{1,2,3\} \times \{4,5\}$

$= \{(1,4)\ ,\ (1,5)\ ,\ (2,4)\ ,\ (2,5)\ ,\ (3,4)\ ,\ (3,5)\}$

Sehingga didapatkan hasil kali langsung $A \otimes S$ sebagai berikut :

(1,4) (1,4) = (1,4)
(1,4) (1,5) = (1,5)
(1,4) (2,4) = (2,4)
(1,4) (2,5) = (2,5)
(1,4) (3,4) = (3,4)
(1,4) (3,5) = (3,5)

(1,5) (1,4) = (1,5)
(1,5) (1,5) = (1,5)
(1,5) (2,4) = (2,5)
(1,5) (2,5) = (2,5)
(1,5) (3,4) = (3,5)
(1,5) (3.5) = (3,5)

(2,5) (1,4) = (2,5)
(2,5) (1,5) = (2,5)
(2,5) (2,4) = (2,5)
(2,5) (2,5) = (2,5)
(2,5) (3,4) = (3,5)
(2,5) (3,5) = (3,5)

(2,4) (1,4) = (2,4)
(2,4) (1,5) = (2,5)
(2,4) (2,4) = (2,4)
(2,4) (2,5) = (2,5)
(2,4) (3,4) = (3,4)
(2,4) (3,5) = (3,5)

(3,5) (1,4) = (3,5)
(3,5) (1,5) = (3,5)
(3,5) (2,4) = (3,5)
(3,5) (2,5) = (3,5)
(3,5) (3,4) = (3,5)
(3,5) (3,5) = (3,5)

(3,4) (1,4) = (3,4)
(3,4) (1,5) = (3,5)
(3,4) (2,4) = (3,4)
(3,4) (2,5) = (3,5)
(3,4) (3,4) = (3,4)
(3,4) (3,5) = (3,5)

Sehingga $A \otimes S$ ini dapat didefinisikan pada tabel sebagai berikut :

| | (1,4) | (1,5) | (2,4) | (2,5) | (3,4) | (3,5) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,4) | (1,4) | (1,5) | (2,4) | (2,5) | (3,4) | (3,5) |
| (1,5) | (1,5) | (1,5) | (2,5) | (2,5) | (3,5) | (3,5) |
| (2,4) | (2,4) | (2,5) | (2,4) | (2,5) | (3,4) | (3,5) |
| (2,5) | (2,5) | (2,5) | (2,5) | (2,5) | (3,5) | (3,5) |
| (3,4) | (3,4) | (3,5) | (3,4) | (3,5) | (3,4) | (3,5) |
| (3,5) | (3,5) | (3,5) | (3,5) | (3,5) | (3,5) | (3,5) |

Selanjutnya akan ditunjukkan $A \otimes S$ memenuhi sifat asosiatif yaitu :

(i) $(1,4)((1,5)\ (2,4)) = (1,4)\ (2,5) = (2,5)$

$((1,4)\ (1,5))\ (2,4) = (1,4)\ (2,5) = (2,5)$

(ii) $(2,5)((3,5)\ (3,4)) = (2,5)\ (3,5) = (3,5)$

$((2,5)\ (3,5))\ (3,4) = (2,5)\ (3,5) = (3,5)$

........ dan seterusnya.

Jadi hasil kali langsung $A \otimes S$ dengan carrier $A \times S$ merupakan sebuah semigroup

## 2.3 IDEAL PADA SEMIGROUP

Definisi 2.3.1

Suatu ideal A dari semigroup S adalah subset tak kosong dari S sedemikian sehingga

$AS \subseteq A$ atau $SA \subseteq A$

Jika memenuhi keduanya disebut two-sided ideal.

Dari definisi di atas jelas bahwa semigroup S sendiri juga merupakan ideal, sebab $SS \subseteq S$.

Jika suatu semigroup S hanya memuat satu ideal saja, yaitu S sendiri disebut semigroup sederhana.

Setiap ideal dari semigroup S adalah subsemigroup dari S.

CONTOH 2.8

Diberikan semigroup $(S,\circ)$ dengan $S = \{1,2,3\}$ dan operari binari " $\circ$ " didefinisikan pada tabel sebagai berikut :

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

ambil A = {2,3}

maka $A \subset S$

Dari tabel, A merupakan ideal dari S

sebab $AS \subseteq A$ dan $SA \subseteq A$

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

$AS \subseteq A$

| | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 |

$SA \subseteq A$

$2 \circ 1 = 1 \circ 2 = 2$ , $\{2\} \subseteq A$

$2 \circ 2 = 2 \circ 2 = 2$ , $\{2\} \subseteq A$

$2 \circ 3 = 3 \circ 2 = 3$ , $\{3\} \subseteq A$

$3 \circ 1 = 1 \circ 3 = 3$ , $\{3\} \subseteq A$

$3 \circ 2 = 2 \circ 3 = 3$ , $\{3\} \subseteq A$

$3 \circ 3 = 3 \circ 3 = 3$ , $\{3\} \subseteq A$

Dari sini tampak bahwa A merupakan two-sided ideal dari S.

CONTOH 2.9

Diberikan semigroup $(S,\circ)$ dengan $S = \{1,2,3\}$ dan operasi binari pada S didefinisikan sebagai berikut :

$1 \circ 1 = 1$ $\quad$ $2 \circ 1 = 2$ $\quad$ $3 \circ 1 = 3$

$1 \circ 2 = 2$ $\quad$ $2 \circ 2 = 3$ $\quad$ $3 \circ 2 = 1$

$1 \circ 3 = 3$ $\quad$ $2 \circ 3 = 1$ $\quad$ $3 \circ 3 = 2$

Maka semigroup S dapat didefinisikan dengan tabel sebagai berikut :

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 |

Karena semigroup S tak memuat ideal lain selain S sendiri, maka S adalah semigroup sederhana.

## 2.4. RELASI DAN PARTISI

Definisi 2.4.1

Yang dimaksud relasi binari $\rho$ pada himpunan A adalah $\rho = \{ (x,y) \in A \times A \}$

yaitu sebuah produk cartesian $A \times A$

Definisi 2.4.2

Misal $\rho$ dan $\sigma$ adalah dua relasi pada sebuah himpunan A, maka komposisi $\rho \circ \sigma$ dari $\rho$ dan $\sigma$ adalah relasi pada A, dan didefinisikan sebagai berikut :

$(a,b) \in \rho \circ \sigma$ jika hanya jika $\exists$ c $\in$ A sedemikian sehingga $(a,c) \in \rho$ dan $(c,b) \in \sigma$ $\quad \forall$ $a,b,c \in A$

Definisi 2.4.3.

Jika A adalah sebuah himpunan dengan $\rho$ relasi pada A, maka $\rho$ disebut relasi :

1. Refleksif

   jika $\forall$ $x \in A$ , $(x,x) \in \rho$

2. Symetri

jika $\forall$ x,y $\in$ A , (x,y) $\in \rho$ ==> (y,x) $\in \rho$

3. Anti symetri

jika $\forall$ x,y $\in$ A , (x,y) $\in \rho$ dan (y,x) $\in \rho$ ==> x = y

4. Transitif

jika $\forall$ x,y,z $\in$ A , (x,y) $\in \rho$ dan (y,z) $\in \rho$ ==> (x,z) $\in \rho$

Definisi 2.4.4.

Suatu relasi $\rho$ pada sebuah himpunan A disebut relasi equivalensi jika memenuhi relasi

1. Refleksif
2. Symetri
3. Transitif

Suatu relasi $\rho$ pada sebuah himpunan A disebut relasi order jika memenuhi relasi :

1. Refleksif
2. Anti Symetri
3. Transitif

CONTOH 2.10

Misal Q adalah himpunan bilangan rasional dengan $\rho$ adalah relasi kesamaan " = " dalam Q maka $\rho$ adalah sebuah relasi equivalensi pada H = { $x/\frac{n}{2n}$ } $\subset$ Q , n = 1,2, .....

karena :

1. Refleksif

$\frac{1}{2} \in Q$ , $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \in \rho$

2. Symetri

$\frac{1}{2},\frac{2}{4} \in Q$ , $(\frac{1}{2},\frac{2}{4}) \in \rho \Longrightarrow (\frac{2}{4},\frac{1}{2}) \in \rho$

3. Transitif

$\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6} \in Q$ , $(\frac{1}{2},\frac{2}{4}) \in \rho$ dan $(\frac{2}{4},\frac{3}{6}) \in \rho \Longrightarrow (\frac{1}{2},\frac{3}{6}) \in \rho$

CONTOH 2.11

Misal Q adalah himpunan bilangan rasional dengan $\rho$ adalah relasi ketidaksamaan " $\leq$ " dalam Q, maka $\rho$ adalah relasi order karena memenuhi

1. Refleksif

$\frac{1}{4} \in Q$ , $(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) \in \rho$.

2. Anti Symetri

$\frac{1}{4},\frac{2}{8} \in Q$ , $(\frac{1}{4},\frac{2}{8}) \in \rho$ dan $(\frac{2}{8},\frac{1}{4}) \in \rho \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

3. Transitif

$\frac{1}{4},\frac{2}{8},\frac{3}{8} \in Q$ , $(\frac{1}{4},\frac{2}{8}) \in \rho$ dan $(\frac{2}{8},\frac{3}{8}) \in \rho \Longrightarrow (\frac{1}{4},\frac{3}{8}) \in \rho$

Definisi 2.4.5

Misal A adalah sebuah himpunan, dan $\rho$ adalah relasi equivalensi dalam A, jika $x \in A$, maka klas equivalensi dari A modulo $\rho$ memuat x adalah himpunan $x^\rho$ yang didefinisikan sebagai :

$$x^\rho = \{ y \in A : (y,x) \in \rho \}$$
$$= \{ y \in A : y \sim x \}$$

Sehingga dapat dikatakan $x^\rho$ adalah himpunan dari semua elemen A yang equivalen terhadap x, jelas $x \in x^\rho$ , untuk setiap $x \in A$, dan jika $x^\rho \cap y^\rho \neq \phi$ , maka $x^\rho = y^\rho$

Himpunan dari klas-klas equivalensi mudulo $\rho$ disebut himpunan faktor dari A oleh $\rho$ dan ditulis $A/\rho$.

CONTOH 2.12

Misal A = {a,b,c,d,e} dan

$\rho$ = { (a,a) , (b,b) , (c,c) , (d,d) , (e,e),
(a,b) , (b,a) , (c,d) , (d,c) }

Jelas $\rho$ adalah relasi equivalensi pada A dan klas-klas equivalensi dari A adalah :

$a^{\rho}$ = { (a,a) , (b,a) } = {b,a}

$b^{\rho}$ = { (b,b) , (a,b) } = {a,b}

jadi $a^{\rho} = b^{\rho}$

$c^{\rho}$ = { (c,c) , (d,c) } = {d,c}

$d^{\rho}$ = { (d,d) , (c,d) } = {c.d}

jadi $c^{\rho} = d^{\rho}$

$e^{\rho}$ = { (e,e) } = {e}

maka himpunan $A/\rho$ adalah = $\{a^{\rho}, c^{\rho}, e^{\rho}\}$

Definisi 2.4.6

Suatu pemetaaan $\rho_{nat} : A \longrightarrow A/\rho$ dari himpunan A onto himpunan $A/\rho$ adalah relasi yang menghubungkan setiap $a \in A$ ke dalam $a^{\rho} \in A/P$ sedemikian sehingga $\rho_{nat}(a) = a^{\rho}$ $\forall a \in A$ dan pemetaan ini disebut pemetaan natural.

CONTOH 2.13

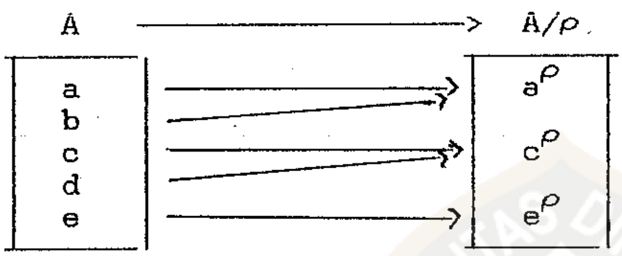
Dari contoh 2.12, misal A = {a,b,c,d,e} dan

$\rho = \{ (a,a) , (b,b) , (c,c),(d,d) , (e,e) , (a,b) , (b,a) ,$

$(c,d) , (d,c)\}$

maka didapatkan $A/\rho = \{a^{\rho}, c^{\rho}, e^{\rho}\}$

Selanjutnya pemetaan $\rho_{nat} : A \longrightarrow A/\rho$ dari himpunan A onto $A/\rho$ dapat ditunjukkan sebagai berikut :




Disini $\rho_{nat}$ (b) = $a^{\rho}$ karena $b^{\rho} = a^{\rho}$

begitu juga $\rho_{nat}$ (d) = $c^{\rho}$ karena $c^{\rho} = d^{\rho}$

Sehingga $\rho_{nat}$ (a) = $a^{\rho}$, $\forall$ a $\in$ A dipenuhi.

Jadi $\rho_{nat}$ adalah pemetaan natural dari A onto $A/\rho$

Definisi 2.4.7

Misal A adalah sebuah himpunan, yang dimaksud dengan sebuah partisi dari A adalah sebuah keluarga $\{A_i\}$ $i \in I$ dari subset tak kosong A dengan sifat-sifat sebagai berikut :

1. $A_i \cap A_j = \phi$ atau

   jika $\exists$ $x \in A_i \cap A_j$ maka $A_i = A_j$ , $\forall$ $i,j \in I$

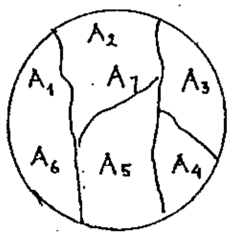
   dengan I = 1, 2, ....

2. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ atau

   jika $x \in A$ maka $x \in A_i$ untuk beberapa $i \in I$

   dengan I = 1, 2, ....

Hal ini dapat dijelaskan dalam gambar sebagai berikut :




$\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$ adalah sebuah partisi dari A

Disini $A_1 = A_6$ dan $A_2 = A_7$

Gambar 2.1

CONTOH 2.14

Dari contoh 2.12 misal A = {a,b.c,d,e} dan

$\rho$ = { (a,a) , (b,b) , (c,c) , (d,d) , (e,e) , (a,b) . (b,a) ,
(c,d) , (d,c) }

maka $\rho$ adalah relasi equivalensi.

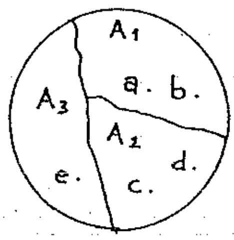
dan telah didapatkan klas-klas equivalensi dari A, yaitu :

$a^{\rho} = b^{\rho} = \{a,b\}$

$c^{\rho} = d^{\rho} = \{c,d\}$

$e^{\rho} = \{e\}$

Dari sini dimisalkan $A_1 = \{a,b\}$ , $A_2 = \{c,d\}$ dan $A_3 = \{e\}$, maka $\{A_1, A_2, A_3)$ adalah sebuah partisi dari A ( lihat gambar 2.2 ).




Gambar 2.2

THEOREMA 2.4.1

Misal A adalah sebuah himpunan, dan $\rho$ adalah relasi equivalensi dalam A, dan misal $\{x^{\rho}\}_{x \in A}$ adalah keluarga dari semua klas-klas equivalensi modulo $\rho$, maka $\{x^{\rho}\}_{x \in A}$ adalah sebuah partiisi dari A.

BUKTI

1. Dari definisi 2.4.5, setiap $x^{\rho}$ adalah subset dari A ini adalah tak kosong sebab $x \sim x$ sehingga $x \in x^{\rho}$

2. Ambil $z \in x^{\rho} \cap y^{\rho}$ maka $z \in x^{\rho}$ dan $z \in y^{\rho}$
   maka $z \sim x$ dan $z \sim y$
   maka $x \sim z$ dan $z \sim y$
   maka $x \sim y$
   sehingga $x^{\rho} = y^{\rho}$

Dari 1 dan 2 terbukti bahwa $\{x^{\rho}\}_{x \in A}$ adalah sebuah partisi dari A.

## 2.5 KONGRUENSI PADA SEMIGROUP

Definisi 2.5.1

Sebuah kongruensi $\rho$ pada semigroup S adalah relasi equivalensi pada S sedemikian sehingga

$(s,t) \in \rho$ dan $(u,v) \in \rho \Longrightarrow (su,tv) \in \rho$

atau

$(s,t) \in \rho \Longrightarrow (xsy,xty) \in \rho \qquad \forall\, x,y \in S^1$

Klas equivalensi dari S modulo kongruensi $\rho$ disebut klas kongruensi dari S modulo $\rho$ atau klas - $\rho$ dari S.

Definisi 2.5.2

Misal I adalah ideal dari Semigroup S, dan relasi $\rho$ pada S didefinisikan sebagai :

$\rho = \{(s,t) \in S \times S : s = t \text{ atau } s,t \in I\}$

maka $\rho$ adalah kongruensi pada S, dan disebut kongruensi Rees pada S modulo I.

dan klas-klas kongruensi dari S adalah I dan setiap himpunan satu elemen $\{s\}$ dengan $s \in S \setminus I$, yaitu himpunan S - I, dan disebut semigroup faktor Rees dari S modulo I, dinotasikan dengan S/I.

CONTOH 2.15

Diberikan semigroup (S,.) dengan S = {1,2,3,4} dan operasi binari " . " pada S didefinisikan sebagai berikut :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 . 1 = 1 | 2 . 1 = 2 | 3 . 1 = 3 | 4 . 1 = 4 |
| 1 . 2 = 2 | 2 . 2 = 2 | 3 . 2 = 3 | 4 . 2 = 4 |
| 1 . 3 = 3 | 2 . 3 = 3 | 3 . 3 = 3 | 4 . 3 = 4 |
| 1 . 4 = 4 | 2 . 4 = 4 | 3 . 4 = 4 | 4 . 4 = 3 |

maka operasi binari pada S dapat didefinisikan dengan tabel sebagai berikut :

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |

Ambil I = {3,4} , jelas $I \subset S$ merupakan ideal dari S. Jika relasi $\rho$ pada S didefinisikan sebagai

$\rho = \{(s,t) \in S \times S : s = t$ atau $s,t \in I\}$

maka $\rho = \{(1,1)\ ,\ (2,2)\ ,\ (3,3)\ ,\ (4,4)\ ,\ (3,4)\ ,\ (4,3)\}$

jelas $\rho$ adalah kongruensi pada semigroup S karena memenuhi

$(s,t) \in \rho$ dan $(u,v) \in \rho \Longrightarrow (su,tv) \in \rho$

$(1,1) \in \rho$ dan $(3,4) \in \rho \Longrightarrow (1\ 3, 1\ 4) \in \rho$

$\Longrightarrow (3,4) \in \rho$

$(3,4) \in \rho$ dan $(4,3) \in \rho \Longrightarrow (3\ 4, 4\ 3) \in \rho$

$\Longrightarrow (4,4) \in \rho$

......... dan seterusnya.

Selanjutnya kongruensi Rees $\rho$ pada S modulo I mempunyai himpunan : {1} , {2} , {3,4} sebagai klas-klas - $\rho$.

Jadi S/I = { {1} , {2} , {3,4} }

Definisi 2.5.3

Misal A adalah subset tak kosong dari semigroup S jika dalam A terdapat sebuah kongruensi $\rho$ pada S sedemikian sehingga A merupakan klas kongruensi dari S modulo $\rho$, maka A disebut subset admissible dari S, dan $\rho$ disebut sebuah kongruensi - A.

Sehingga A admisisible jika hanya jika $xAy \cap A \neq \phi$ dengan $x,y \in S^1$.

CONTOH 2.16

Diberikan semigroup (S,.) dengan S = {1,2,3,4} dan operasi binari pada S didefinisikan sebagai berikut :

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |

ambil $A \subset S$, dengan $A = \{3,4\}$

dan kongruensi $\rho$ pada S didefinisikan sebagai

$\rho = \{(s,t) \in S \times S : s = t \text{ atau } s,t \in A\}$

Dari contoh 2.15, telah didapatkan bahwa klas-klas kongruensi $\rho$ adalah himpunan :

$\{1\}$ , $\{2\}$ , $\{3,4\}$.

jadi jelas $A = \{3,4\} \subset S$ merupakan klas kongruensi dari S modulo $\rho$. Sehingga $x\,A\,y \cap A \neq \phi$ , dengan $x,y \in S^1$

maka A disebut subset admissible dari S

dan $\rho$ disebut sebuah kongruensi - A.

## 2.6 HIMPUNAN TERURUT PARSIIL DAN LATTICE

Definisi 2.6.1

Misal A sebuah himpunan dan $\rho$ sebuah relasi order pada A, maka ( $A,\rho$ ) disebut himpunan terurut parsiil.

Definisi 2.6.2

Misal A suatu himpunan terurut parsiil.jika setiap pasangan $\{x,y\} \subset A$ mempunyai sebuah supremum dan infremum maka A disebut suatu Lattice

Jika A suatu Lattice , maka sup $\{x,y\}$ ditulis dengan $x \vee y$, dan disebut "join" dari x dan y.

Sedangkan inf $\{x,y\}$ ditulis dengan $x \wedge y$ , dan disebut " meet " dari x dan y.

Definisi 2.6.3

Misal A adalah lattice, dan B subset A.

$x \in B$ dan $y \in B \Longrightarrow x \vee y \in B$ dan $x \wedge y \in B$,

maka B disebut sublattice dari A.

Definisi 2.6.4

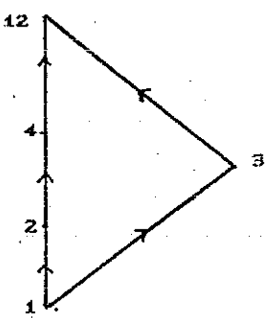
Misal A suatu himpunan terurut parsiil.

A disebut sebuah lattice lengkap ( complete lattice ) jika setiap subset dari A mempunyai sebuah supremum atau inframum.

CONTOH 2.17

a. Misal A = {1,2,3,4,12}

- Jika relasi order $\rho$ pada A adalah "/" , maka $(A,\rho)$ seperti yang ditunjukkan pada gambar ( 2.3 ) merupakan himpunan terurut parsiil dengan sup A = 12, dan inf A = 1




Gambar 2.3

b. Misal A = {1,2,3,4,12}

- jika relasi order $\rho$ pada A adalah " $\leq$ " maka $(A,\rho)$ merupakan himpunan terurut parsiil ( gambar 2.4 ) dan sup A = 12 , inf A = 1

Gambar 2.4

c. Karena setiap pasangan $\{x,y\} \subset A$ pada himpunan A di atas mempunyai sebuah sup dan inf maka A adalah sebuah lattice yaitu : $\{1,2\} \subset A$ maka $\sup\{1,2\} = 1 \vee 2 = 2$

$\inf\{1,2\} = 1 \wedge 2 = 1$

$\{2,12\} \subset A$ maka $\sup\{2,12\} = 2 \vee 12 = 12$

$\inf\{2,12\} = 2 \wedge 12 = 2$

........... dan seterusnya.

d. Ambil $B \subset A$ dengan $B = \{2,4,12\}$

$2 \in B$ dan $12 \in B \Longrightarrow 2 \vee 12 = 12 \in B$ dan $2 \wedge 12 = 2 \in B$

$12 \in B$ dan $4 \in B \Longrightarrow 12 \vee 4 = 12 \in B$ dan $12 \wedge 4 = 4 \in B$

$2 \in B$ dan $4 \in B \Longrightarrow 2 \vee 4 = 4 \in B$ dan $2 \wedge 4 = 2 \in B$

maka B adalah sublattice dari A.

e. Dari gambar 2.4 , $A = \{1,2,3,4,12\}$ dengan relasi order $\rho$ pada A " $\leq$ "

Maka di sini setiap subset sembarang dari A mempunyai supremum dan infremum.

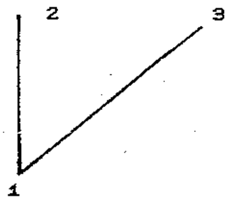
Sehingga A merupakan sebuah lattice lengkap.

Begitu pula dari gambar 2.3,himpunan A dengan relasi order $\rho$ pada A " / ", juga merupakan sebuah lattice lengkap, sebab semua himpunan bagian ( subset ) dari A mempunyai sebuah supremum atau infremum.

misal :

ambil $B \subset A$ dengan $B = \{1,2,3\}$

( lihat gambar 2.5 )




Gambar 2.5

Jelas B tidak mempunyai supremum , tetapi mempunyai infremum, yaitu 1

terbukti himpunan $A = \{1,2,3,4,12\}$ dengan relasi order $\rho$ pada A " / " juga merupakan lattice lengkap.

## 2.7 HOMOMORPHISMA.

### 2.7.1 HOMOMORPHISMA SEMIGROUP

Definisi 2.7.1

Homomorphisma Q dari semigroup (S,.) ke semigroup (S',*) adalah pemetaan Q dari himpunan S ke himpunan S' sedemikian sehingga $Q\,(x.y) = Q\,(x) * Q\,(y)$ , $\forall\ x,y \in S$

dan ditulis dengan $Q : (S,.) \longrightarrow (S',*)$

$$S \xrightarrow{\ Q\ } S'$$

| S | S' |
|---|---|
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| x | Q (x) |
| y | Q (y) |
| x.y | Q (x.y) = Q (x) * Q(y) |

Jika Q juga merupakan pemetaan surjektif, maka Q disebut homomorphisma S onto S' dan S' disebu t bayangan homomorphisma dari S.

Jika Q adalah pemetaan yang injektif maka Q disebut homomorphisma satu-satu.

Jika Q adalah homomorphisma yang surjektif dan injektif maka disebut isomorphisma.

CONTOH 2.1 8

Diberikan G , H , K adalah semigroup semigroup akan ditunjukkan bahwa jika $G \cong H$ dan $H \cong K$ maka $G \cong K$.

BUKTI :

Misal $\alpha$ : G —> H dan $\beta$ : H —> K adalah isomorphisma misal $\delta = \beta\,\alpha$ akan ditunjukkan bahwa $\delta$ adalah isomorphisma

Pertama $\delta$ : G —> K

Kedua $\delta$ adalah onto, karena jika $k \in K$ , terdapatlah $h \in H$ sedemikian sehingga $\beta$ (h) = k, dan terdapatlah $g \in G$ sedemikian sehingga $\alpha$ (g) = h.

maka $\beta\,\alpha\,(g) = \beta\,(h) = k$.

Ketiga $\delta$ adalah pemetaan satu ke satu , karena jika $\delta\,(g_1) = \delta\,(g_2)$ maka $\beta\,(\alpha(g_1)) = \beta\,(\alpha(g_2))$ dan $\beta$ adalah pemetaan satu ke satu $\alpha\,(g_1) = \alpha\,(g_2)$ yang berarti $g_1 = g_2$ karena $\alpha$ adalah pemetaan satu-satu.

Selanjutnya $\delta$ adalah homomophisma, karena

$$\begin{aligned}\delta\ (g_1\ g_2) &= \beta\ (\alpha(g_1\ g_2)) \\ &= \beta\ ((\alpha\ g_1)\ (\alpha\ g_2)) \\ &= \beta\ (\alpha\ (g_1))\ \ \beta\ (\alpha\ (g_2)) \\ &= \beta\ \alpha\ (g_1)\ \ \beta\ \alpha\ (g_2) \\ &= \delta\ (g_1)\ \ \ \delta\ (g_2)\end{aligned}$$

## 2.7.2 HOMOMORPHISMA NATURAL

Definisi 2.7.2

Homomorphisma natural $\rho_{nat}$ dari semigroup S ke semigroup faktor $S/\rho$ adalah pemetaan natural dari S onto $S/\rho$ ($\rho_{nat} : S \longrightarrow S/\rho$)

sedemikian sehingga :

$\forall\ s,t \in S,\quad \rho_{nat}\ (s)\ \ \rho_{nat}\ (t) = \rho_{nat}\ (st)$

CONTOH 2.19

Diberikan semigroup (S,.) dengan S = {1,2,3,4} dan operasi binari " . " pada S didefinisikan pada tabel sebagai berikut :

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |

ambil $\rho$ adalah relasi equivalensi pada S yang didefinisikan sebagai $\rho$ = { (a,a) : a $\in$ S }

= { (1,1) , (2,2) , (3,3) , (4,4) }

Karena $\forall$ s,t $\in$ S, $\rho_{nat}\ (s)\ \ \rho_{nat}\ (t) = \rho_{nat}\ (st)$ yaitu

$$\rho nat\ (2)\ \rho nat\ (3) = \rho nat\ (2\ 3) \qquad 2,3 \in S$$

$$2^{\rho}\ 3^{\rho} = \rho nat\ (2\ 3)$$

$$(2\ 3)^{\rho} = \rho nat\ (2\ 3)$$

$$3^{\rho} = \rho nat\ (3)$$

$$3^{\rho} = 3^{\rho}$$

........... dan seterusnya.

maka $\rho nat : S \longrightarrow S/\rho$ adalah homomorphisma natural.

$$S \xrightarrow{\rho nat} S/\rho$$


## 2.8 SELUBUNG TRANSITIF

Definisi 2.8.1

misal $\rho$ adalah sebuah relasi sembarang pada himpunan A, maka selubung transitif $\rho T$ dari $\rho$ didefinisikan sebagai :

$$\rho T = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^{n}$$

$$= \rho \cup (\rho \circ \rho) \cup (\rho \circ \rho \circ \rho) \cup \ldots\ldots\ldots$$

Dari definisi 2.4.3 sebuah relasi $\rho$ dikatakan transitif jika :

$(a,b) \in \rho$ dan $(b,c) \in \rho$ maka $(a,c) \in \rho$

yang berarti $\rho \circ \rho \subseteq \rho$

jadi pada definisi 2.8.1 di atas

$$\rho \circ \rho \circ \rho \subseteq \rho \circ \rho \subseteq \rho$$

akibatnya $\rho T$ adalah relasi transitif terkecil yang memuat $\rho$.