## BAB II

## MATERI DASAR

### 2.1. DERIVATIF

Definisi 1.

Turunan dari $f(x)$ adalah $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Definisi 2.

Jika U dan V fungsi-fungsi yang dapat didefferensilkan ke x maka : $\frac{d}{dx}(UV) = U\frac{dV}{dx} + V\frac{dU}{dx}$

### 2.2. DERIVATIF PARSIIL

Definisi 3.

$Z = f(x,y)$ suatu fungsi dengan perubah bebas x dan y

i. Jika x berubah tetapi y tetap maka derivatif parsiil ke x adalah $\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

ii. Jika y berubah tetapi x tetap maka derivatif parsiil ke y adalah $\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

Definisi 4.

$Z = f(x,y)$ fungsi kontinu pada variabel x dan y dengan derivatif parsiil ke x : $\frac{\partial Z}{\partial x}$ dan derivatif parsiil ke y $\frac{\partial Z}{\partial y}$ , Jika x,y merupakan fungsi yang dapat didefferensialkan $x=g(t)$ , $y=h(t)$ pada suatu variabel t maka Z merupakan fungsi dari t dan $\frac{dZ}{dt}$ disebut derivatif total dari Z dengan memperhatikan :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

## 2.3. INTEGRAL

Integral ada dua macam

1. Integral tidak tertentu

   yaitu integral yang tidak mempunyai batas - batas integral.

2. Integral tertentu

   yaitu integral yang diambil pada suatu daerah atau interval tertentu.

### 2.3.1. Integral tidak tertentu

Definisi 5.

Integral merupakan kebalikan dari deferensial yaitu :

Jika $d\{F(x) + c\} = dF(x) = F'(x)$ maka

$$\int F'(x)\,dx = \int dF(x)$$

$$= F(x) + c\ , \quad -\infty < c < \infty$$

Definisi 6

Integral Parsiil

Jika U dan V adalah fungsi-fungsi yang dapat dideferensialkan maka : $d(UV) = U\,dV + V\,dU$

$$U\,dV = d(UV) - v\,dU$$

$$\int U\,dV = UV - \int V dU$$

Sifat umum dalam integral parsiil

a. Peranan dalam memilih dV harus mudah diintegralkan

b. $\int V\,dU$ harus tidak lebih sulit (komplek) dari pada $\int U\,dV$

2.3.2. Integral tertentu

Definisi 7.

Suatu fungsi f(x) yang kontinu pada interval $a \leq x \leq b$

maka $$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta x_k$$

Definisi 8.

$$\int_a^b dF(x) = F(x) \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Definisi 9.

Jika $F(x) = U(x)\, V(x)$ fungsi yang kontinu pada $[a,b]$

maka $$\int_a^b U(x)\, dV(x) = \int_a^b dF(x) - \int_a^b V(x)\, dU(x)$$

$$= F(b) - F(a) - \int_a^b V(x)\, dU(x)$$

2.4. INTEGRAL RANGKAP

Definisi 10.

$Z = f(x,y)$ fungsi kontinu pada daerah berhingga XOY

yaitu $a \leq x \leq b$ dan $c \leq y \leq d$ maka

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)\, dxdy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{x_i} \sum_{y_i} f(\Delta x_i, \Delta y_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i$$

Definisi 11.

Dengan substitusi $x = r \cos \theta$

$y = r \sin \theta$

maka $$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)\, dxdy = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} g(r,\theta) /r/\, dr d\theta$$

dengan $/r/$ = determinan Jacobian (J)

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix}$$

2.5. PENDEFFERENSIALAN INTEGRAL.

Teorema 1.

Jika f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ dan jika x sebuah (peubah) titik dalam $[a,b]$ , maka

$$D_x \left[ \int_a^x f(t)\ dt \right] = f(x)$$

Bukti :

misal $G(x) = \int_a^x f(t)\ dt$

akan dibuktikan $G'(x) = f(x)$

$$G(x+h)-G(x) = \int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\ dt$$

dengan mengambil $h > 0$ dan m adalah nilai minimum serta M adalah nilai maksimum f pada selang $[x,x+h]$ maka

$$m \leq f(t) \leq M$$

$$\int_x^{x+h} m\ dt \leq \int_x^{x+h} f(t)\ dt \leq \int_x^{x+h} M\ dt$$

$$m\ h \leq \int_x^{x+h} f(t)\ dt \leq M\ h$$

$$m\ h \leq G(x+h)-G(x) \leq M\ h$$

$$m \leq \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq M$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

$$G'(x) = f(x) \text{ Terbukti}$$

Definisi 12.

$$\frac{d}{dt}\left\{ \int_{t_o}^{t} f(s,t)\, ds \right\} = f(t,t) + \int_{t_o}^{t} \frac{\partial f(s,t)}{\partial t}\, ds$$

## 2.6. PROBABILITAS

Definisi 13

Ruang sampel ($\Omega$) adalah himpunan paristiwa-- peristiwa yang mungkin terjadi.

Definisi 14.

Suatu event (peristiwa) adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

Definisi 15.

Ruang event ($\mathcal{A}$) adalah himpunan dengan anggota- anggotanya semua event yang mungkin dari suatu experiment.

### 2.6.1. Fungsi Probabilitas

Definisi 16

Misalkan $\Omega$ adalah ruang sampel dan $\mathcal{A}$ adalah ruang event. Suatu fungsi probabilitas $P[\cdot]$ adalah fungsi himpunan dengan daerah wilayah $\mathcal{A}$ dan kodomain $[0,1]$, yang memenuhi :

(i) $P[A] \geq 0$ untuk setiap $A$

(ii) $P[\Omega] = 1$

(iii) Jika $A_1, A_2, \ldots$ barisan event yang saling asing dalam $\mathcal{A}$ ( yaitu, $A_i \sqcap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j; i,j = 1,2,\ldots$) dan jika $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots = \bigsqcup_1^\infty A_i \in \mathcal{A}$ maka $P[\bigsqcup_1^\infty A_i] = \sum_1^\infty P[A_i]$

Definisi 17

Suatu ruang probabilitas adalah tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P[.])$ , dimana $\Omega$ adalah ruang sampel, $\mathcal{A}$ ruang event dan $P[.]$ adalah fungsi probabilitas dengan daerah wilayah .

2.6.2. Random Variabel.

Definisi 18.

Diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{A}, P[.])$

Suatu random variabel, diberi notasi X atau X(.) adalah suatu fungsi dengan domain $\Omega$ dan kodomain $R = \{x/\ x \text{ real}\}$ yang memenuhi persyaratan : untuk setiap bilangan r, terdapatlah event $A_r = \{w : X(w) \leq r\} \in \mathcal{A}$.

Jenis-jenis random variabel

Random variabel terdiri atas dua macam yaitu diskrit dan kontinu

a. Random variabel diskrit

Suatu random variabel X disebut diskrit jika range dari X adalah countabel (berhingga).

b. Random variabel kontinu

Suatu random variabel X disebut kontinu jika terdapat fungsi $f_x(.)$ sedemikian sehingga $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\,du$

Definisi 19

Suatu fungsi f(.) dengan domain R dan kodomain $[0,\infty)$

disebut fungsi density probabilitas bhb

(i) $f(x) \geq 0$ untuk semua x

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

2.6.3.Nilai Harapan

2.6.3.1.Mean

Definisi 20.

Misalkan X suatu random variabel.Mean dari X dinyatakan dengan $\mu_x$ atau $E[X]$ adalah

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} X\, f_X(x)\, dx$ untuk X kontinu dengan density $f_X(x)$

Definisi 21.

$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$ asalkan $E[g(x)]$ ada

Teorema 2.

1.$E[C] = C$ dimana C konstan

2.$E[cg(x)] = c\, E[g(x)]$ c konstan

3.$E[c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)] = c_1 E[g_1(x)] + c_2 E[g_2(x)]$

4.$E[g_1(x)] \leq E[g_2(x)]$ jika $g_1(x) \leq g_2(x)$ untuk semua x

Bukti :

1.Ambil $g(x) = C \longrightarrow E[g(x)] = E[C]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} c\, f_X(x)\, dx$$

$$= c \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx$$

$$E[g(x)] = C.1$$
$$= C$$

2. $$E[cg(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} c\, g(x)\, f_X(x)\, dx$$
$$= c \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$
$$= c\, E[g(x)]$$

3. $$E[c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \{ c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \} f_X(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} c_1 g_1(x) f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} c_2 g_2(x)\, f_X(x)\, dx$$
$$= c_1 E[g_1(x)] + c_2 E[g_2(x)]$$

4. $$E[g_2(x) - g_1(x)] = E[g_2(x)] - E[g_1(x)]$$

karena $g_2(x) \geq g_1(x)$ untuk setiap x maka $g_2(x) - g_1(x) \geq 0$ untuk setiap x.

$$E[g_2(x) - g_1(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\{ g_2(x) - g_1(x) \}}_{\text{non negatif}} f_X(x)\, dx \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq E[g_2(x) - g_1(x)] = E[g_2(x)] - E[g_1(x)]$$
$$\Longrightarrow E[g_2(x)] \geq E[g_1(x)]$$

2.6.3.2. Varian

Definisi 22.

Varian dari random variabel X yang dinyatakan dengan $\sigma_x^2$

atau Var[X] adalah

$$Var[X] = E[X - E[X]]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_x)^2 \, f_X(x) \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \, f_X(x) \, dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} \mu_x . X \, f_X(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu_x^2 f_X(x) \, dx$$

$$= E[X^2] - 2\mu_x^2 + \mu_x^2$$

$$= E[X^2] - [E[X]]^2$$

Definisi 23.

$$Var\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i Var[X_i]$$

Definisi 24.

Random Variabel X dan konstanta a berlaku

1. $Var[X + a] = Var[X]$
2. $Var[aX] = a^2 \, Var[X]$

Definisi 25.

X dan Y disebut independen bila $E[XY] = E[X] \, E[Y]$

## 2.7. DISTRIBUSI NORMAL.

Definisi 26.

Variabel random X berdistribusi normal jika Variabel random kontinu X mempunyai fungsi densitas X = x dengan persamaan

$$f_x(X; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

dengan : $\pi$ = nilai konstan = 3,1416

$e$ = bilangan konstan = 2,7183

$\mu$ = parameter dan memenuhi $-\infty < \mu$

$\sigma$ = parameter dan memenuhi $\sigma > 0$

dan nilai X mempunyai batas $-\infty < X < \infty$

Untuk menyelidiki bahwa $f_x(X;\mu,\sigma)$ betul-betul fungsi densitas, menurut definisi 19

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$

Keterangan :

misal $A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$ maka

$$A^2 = \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dX \right\} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right)^2} dY \right\}$$

Substitusi: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ dan $T = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ maka $dX = \sigma\, dZ$ dan

$dY = \sigma\, dT$

$$A^2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}T^2} dT \right\}$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(Z^2 + T^2)} dZdT$$

substitusi : $Z = r \sin \theta$

$T = r \cos \theta$

$Z^2 + T^2 = r^2$ dan menurut definisi 11, $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$

$= r$

maka

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r\, e^{-\frac{1}{2}r^2} dr\, d\theta$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-e^{-\frac{1}{2}r^2}\right]_0^{\infty} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\,0 + 1\,)\;d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\,\theta\,\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\,.2\pi = 1$$

$$A^2 = 1 \implies A = 1$$

Teorema 3.

Jika X berdistribusi normal maka $E[X] = \mu$ dan $Var[X] = \sigma^2$

Bukti :

menurut definisi 20,

$$E[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X\;e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}\;dX$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{X-\mu+\mu}{\sigma}\right)\sigma\;e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}\;dX$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\;e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}\;dX \;+$$

$$\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}\;dX$$

$$= \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} de^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2} + \mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\;e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}\;dX$$

$$E[X] = \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \mu \cdot 1$$

$$= 0 + \mu$$

$$= \mu$$

menurut definisi 22

$$Var[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^2 \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dX$$

$$= \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu) \, de^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

menurut definisi 9

$$Var[X] = \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ (X-\mu) \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} \right]_{\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 0 + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dX$$

$$= 0 + \sigma^2 \cdot 1$$

$$= \sigma^2$$

## 2.8. PROSES STOKASTIK.

Definisi 27

Proses stokastik adalah suatu kumpulan variabel random $X(t), t \in T$. dengan T himpunan parameter waktu. Jadi dapat dikatakan bahwa proses stokastik merupakan keluarga fungsi waktu.

Contoh 2.

$X(t) = p + qt$

dengan p dan q dua random variabel.

Keterangan :

p dan q masing-masing random variabel maka X(t) yang merupakan jumlahan p dan q adalah kumpulan random variabel sehingga X(t) merupakan proses stokastik.

Definisi 28.

Proses Wiener adalah suatu proses stokastik $W(t), -\infty < t < \infty$ yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

(i) $W(0) = 0$

(ii) $W(t)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan varian $\sigma^2(t)$

(iii) $W(t_2)-W(t_1), W(t_3)-W(t_2), \ldots, W(t_n)-W(t_{n-1})$ saling independen untuk $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ .

## 2.9. NILAI HARAPAN UNTUK PROSES STOKASTIK.

Definisi 29

$$E\left[\int_a^b f(t)\ X(t)\ dt\right] = \int_a^b f(t)\ E[X(t)]\ dt$$

$$= \int_a^b f(t)\,\mu_{X(t)}\ dt$$

Teorema 4.

Untuk sembarang $W(t), -\infty < t < \infty$ .Proses Wiener dengan parameter $\sigma^2(t)$. Dan f,g fungsi kontinu pada [a,b] maka :

$$E\left[\int_a^b f(t)\ dW(t) \int_a^b g(t)\ dW(t)\right] = \sigma^2 \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

Bukti :

$$E\left[\int_a^b f(t)dW(t) \int_a^b g(t)dW(t)\right] = E\left[\lim \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(W(t_{i+1})-W(t_i)) \lim \sum_{j=1}^{n} g(t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j))\right]$$

$$= \lim \sum_{i}\sum_{j} f(t_i)g(t_j)\ .\ E\left[W(t_{i+1})-W(t_i)\right]\left[W(t_{j+1})-W(t)\right]$$

$$= \lim \sum_{i} f(t_i)g(t_i)\left[\sigma^2(t_{i+1}) - \sigma^2(t_i)\right]$$

$$= \int_a^b f(t)g(t)\ \sigma^2\ dt$$

$$= \sigma^2 \int_a^b f(t)g(t)\ dt$$

## 2.10. PERSAMAAN KUDRAT.

Bentuk umum persamaan kuadrat :

$aX^2 + bX + c = 0$ dengan $a \neq 0$

### 2.10.1. Jenis-jenis akar persamaan kuadrat

Akar-akar persamaan kuadrat dapat dibedakan atas dua jenis yaitu :

1. Akar Riil.

2.Akar Komplek.

Akar riil merupakan bilangan riil yang memenuhi persamaan kuadrat.Akar riil ini akan terjadi bila diskriminan $\geq$ 0.dan akar komplek merupakan bilangan komplek (a+bi) yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut, akar komplek akan terpenuhi bila diskriminan $<$ 0.

2.10.2.Diskriminan.

Definisi 30.

Diskriminan ($D=b^2 - 4ac$) dapat digunakan untuk menyelidiki akar-akar persamaan kuadrat,yaitu dengan sifat-sifat berikut :

Jika $x_1$ dan $x_2$ akar-akar persamaan kuadrat,maka :

1.D $>$ 0 $\Rightarrow$ Terdapat dua akar riil yang berlainan,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2.D = 0 $\Rightarrow$ Terdapat dua akar riil yang kembar,

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3.D $<$ 0 $\Rightarrow$ Tidak ada akar riil ($x_1$ dan $x_2$ akar- akar komplek),

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

2.11.PERSAMAAN DIFFERENSIAL (PD) LINIER TINGKAT N.

Bentuk umum PD linier tingkat n.

$$p_o\frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + p_ny = Q \qquad \dots (1)$$

dimana $p_o \neq 0, p_1, p_2, \ldots, p_n, Q$ fungsi dari x atau konstan .

Jika Q = 0, yaitu

$$p_o \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0 \qquad \ldots (2)$$

dan disebut PD homogen.

Dengan mengganti $\frac{dy}{dx} = Dy$ , $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = D.Dy = D^2y$ dst

maka persamaan (2) menjadi :

$$(p_o D^n + p_1 D^{n-1} + \ldots + p_n)y = 0 \text{ atau } F(D)y = 0$$

bila m merupakan akar persamaan $F(m) = 0$, maka: $F(D)e^{mx} = 0$ yang berarti $y = e^{mx}$ merupakan penyelesaian persamaan (2). Dan persamaan: $F(m) = 0$ disebut persamaan karakteristik.

Teorema 5.

Jika $y = y(x)$ solusi(penyelesaian) PD homogen maka $y = cy(x)$ dengan c konstan sembarang juga solusi PD homogen.

Bukti:

$$y = cy(x), \frac{dy}{dx} = c\frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} = c\frac{d^2y(x)}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n} = c\frac{d^ny(x)}{dx^n}$$

maka :

$$p_o \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

$$\Leftrightarrow p_o\, c \frac{d^n y(x)}{dx^n} + p_1\, c \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n\, cy(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow c\left\{p_o \frac{d^n y(x)}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y(x)\right\} = 0 \quad \ldots (3)$$

karena y(x) solusi PD homogen maka :

$$p_o \frac{d^n y(x)}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y(x) = 0$$

Sehingga persamaan (3) menjadi :

$$\Leftrightarrow c \cdot 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Jadi $y=cy(x)$ memenuhi PD homogen, sehingga terbukti.

Teorema 6.

Jika tiap-tiap $y=y_i(x)$, untuk $i=1,2,3,\ldots,n$ solusi PD homogen, maka:

$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$ dengan $c_1,c_2,\ldots,c_n$ konstan sembarang juga solusi PD homogen.

Bukti :

$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$

$$\frac{dy}{dx} = y' = c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x) + \ldots + c_ny_n'(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''=c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x)+\ldots+c_ny_n''(x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}=c_1y_1^{(n)}(x)+c_2y_2^{(n)}(x)+\ldots+c_ny_n^{(n)}(x)$$

maka

$$p_o \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

$$\Leftrightarrow p_o\left\{c_1 y_1^{(n)}(x)+c_2 y_2^{(n)}(x)+\ldots+c_n y_n^{(n)}(x)\right\}+\ldots+ p_n\left\{c_1 y_1(x)+ c_2 y_2(x)+\ldots+c_n y_n(x)\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow p_o c_1 y_1^{(n)}(x)+\ldots+p_o c_n y_n^{(n)}(x)+\ldots+p_n c_1 y_1(x)+\ldots+ p_n c_n y_n(x)=0$$

$$\Leftrightarrow c_1\left\{p_o y_1^{(n)}(x)+\ldots+p_n y_1(x)\right\}+\ldots+c_n\left\{p_o y_n^{(n)}(x)+\ldots+p_n y_n(x)\right\} = 0 \qquad \ldots (4)$$

karena $y=y_i(x)$ solusi PD homogen maka:

$$p_o y_1^{(n)}(x)+\ldots+p_n y_1(x)=0,\ldots,p_o y_n^{(n)}(x)+\ldots+p_n y_n(x)=0$$

sehingga persamaan (4) menjadi :

$$\Leftrightarrow c_1.0 + \ldots + c_n.0 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 + \ldots + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Jadi Terbukti.

Teorema 7.

Jika $y=R(x)$ solusi khusus PD linier tingkat n dan $y=y_i(x)$ dimana $i=1,2,3,\ldots,n$ solusi PD homogen, maka $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x) + R(x)$ dengan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ konstan sembarang solusi PD linier tingkat n

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $y = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)+R(x)$ memenuhi PD linier tingkat n.

$$y= c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) + R(x)$$

$$y' = c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + \dots + c_ny_n'(x) + R'(x)$$

$$y'' = c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x) + \dots + c_ny_n''(x) + R''(x)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=c_1y_1^{(n)}(x)+c_2y_2^{(n)}(x)+\dots+c_ny_n^{(n)}(x)+R^{(n)}(x)$$

maka:

$$p_oy^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_ny = Q$$

$$\Leftrightarrow p_o\left\{c_1y_1^{(n)}(x)+c_2y_2^{(n)}(x)+\dots+c_ny_n^{(n)}(x)+R^{(n)}(x)\right\}+ \dots + p_n\left\{c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n(x)+R(x)\right\} = Q$$

$$\Leftrightarrow p_oc_1y_1^{(n)}(x)+p_1c_1y_1^{(n-1)}(x)+\dots+p_nc_1y_1(x) + \dots + p_oc_ny_n^{(n)}(x)+\dots+p_nc_ny_n(x)+p_oR^{(n)}(x)+\dots+p_nR(x) = Q$$

$$\Leftrightarrow c_1\left\{p_oy_1^{(n)}(x)+\dots+p_ny_1(x)\right\}+\dots+c_n\left\{p_ny_n^{(n)}(x)+\dots+p_ny_n(x)\right\} +p_oR^{(n)}(x)+\dots+p_nR(x) = Q. \quad \dots (5)$$

karena $y=y_i(x)$ solusi PD homogen maka $y=y_i(x)$, untuk $i=1,2,\dots,n$ memenuhi PD homogen sehingga persamaan (5) menjadi :

$$\Leftrightarrow c_1.0 + \dots + c_n.0 + p_oR^{(n)}(x) + \dots + p_nR(x) = Q$$

$$\Leftrightarrow p_oR^{(n)}(x) + p_1R^{(n-1)}(x) + \dots + p_nR(x) = Q \quad \dots (6)$$

karena $y=R(x)$ solusi khusus PD linier tingkat n maka y=R(x) memenuhi PD linier tingkat n jadi persamaan (6) menjadi

$$\Leftrightarrow p_o R^{(n)}(x) + p_1 R^{(n-1)}(x) + \dots + p_n R(x) = Q$$

$$\Leftrightarrow \qquad Q = Q$$

Jadi Terbuktilah teorema diatas.