BAB III

FILTER DAN RUANG SERAGAM

Pada Bab sebelumnya sudah dibahas definisi maupun teorema umum yang menunjang teorema yang dibahas dalam Ruang Proximitas.Sedangkan penunjang yang bersifat lebih khusus akan diuraikan di bawah ini,yaitu mengenai Filter dan Ruang Seragam.

3.1 Filter.

Definisi 3.1.1 :

Suatu keluarga tidak kosong $\mathcal{F} \subset X$ disebut Filter pada X jhj memenuhi 3 syarat :

i) $\forall$ A,B $\in \mathcal{F}$ berlaku $A \cap B \in \mathcal{F}$

ii) Jika $B \supset A \in \mathcal{F}$,maka $B \in \mathcal{F}$

iii) $\phi \notin \mathcal{F}$

Contoh 3.1.1 :

$X=\{2,4,6,8,10\}$

$\mathcal{F}=\{\{2,4\},\{2,4,6\},\{2,4,6,8\}\}$

$A=\{2,4\}$; $B=\{2,4,6\}$

Maka :

i) $\forall$ A,B $\in \mathcal{F} \Longrightarrow$ $A \cap B=\{2,4\} \cap \{2,4,6\} =\{2,4\} \in \mathcal{F}$

ii) $\{2,4\} \subset \{2,4,6\} \Longrightarrow$ $\{2,4,6\} \in \mathcal{F}$

iii) $\phi \notin \mathcal{F}$.

Jadi $\mathcal{F}$ merupakan Filter pada X.

3.2 Ruang Seragam

Sebelum melangkah pada definisi dan teorema tentang Ruang Seragam ,di bawah ini akan diberikan dasar-dasar Seragam.

$H=\{(x,y);\ x,y\in X\}$.

$\Delta = \{(x,x) : x\in X\}$

$H^{-1}=\{(y,x) ,(x,y)\in H\}$

$H \circ K =\{(x,y)$: terdapat z sedemikian sehingga $(x,z)\in K$, $(z,y)\in H\}$

$H(A)=\{y,(x,y)\in H ,x\in A\}$,jika $A=\{x\}$,ditulis $H(x)$.

Jika $f:X \longrightarrow Y$ dan $f\times f$; $X\times X \longrightarrow Y\times Y$, maka

$(f\times f)(x_1,x_2)=(f(x_1),f(x_2))$

Definisi 3.2.1 :

Suatu keluarga tidak kosong $\mathfrak{H}$ subset $X\times X$ disebut Seragam pada X ,bila memenuhi :

i) $H\supset\Delta$,$\forall H\in\mathfrak{H}$

ii) Jika $A\supset H\in\mathfrak{H}$,maka $A\in\mathfrak{H}$

iii) Jika $H_1,H_2\in\mathfrak{H}$,maka $H_1\cap H_2\in\mathfrak{H}$

iv) Jika $H\in\mathfrak{H}$.maka $H^{-1}\in\mathfrak{H}$

v) $\forall H\in\mathfrak{H}$,terdapat $K\in\mathfrak{H}$ sedemikian sehingga $K\circ K\subset H$.

Jika $\mathfrak{H}$ memenuhi :

i)* $\cap\{H :H\in\mathfrak{H}\}=\Delta$, maka $\mathfrak{H}$ disebut SeragamTerpisah (Seragam Hausdorff).Anggota-anggota suatu seragam kadang disebut kumpulan (entourages),dan $(X,\mathfrak{H})$ disebut Ruang Seragam.

Teorema 3.2.1 :

Jika $(X,\mathfrak{H})$ Ruang Seragam dan $H\in\mathfrak{H}$,maka terdapat suatu anggota simetrik $K \in \mathfrak{S}$ sedemikian sehingga $K \circ K \in \mathfrak{S}$.

Bukti :

Ambil L sedemikian sehingga $L \circ L \subset H$ dan $K = L \cap L^{-1}$. Sehingga K simetrik dan $K \circ K \subset H$.

Contoh 3.2.1 :

$X = \{1,2,3\}$

$X \times X = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),$
$(2,1),(3,1),(3,2)\}$

$\mathfrak{S} = \{\{(1,1),(1,2)\},\{(2,2),(1,1),(1,2)\},\{(1,1),(2,1),$
$(2,2)\},\{(1,1),(2,2)\},\{(1,1)\},\{(1,1),(2,1)\}\}$.

$H_1 = \{(1,1),(1,2)\}$; $H_2 = \{(2,2),(1,1),(1,2)\}$

$H_3 = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$; $H_4 = \{(1,1),(2,2)\}$

$H_5 = \{(1,1)\}$; $H_6 = \{(1,1),(2,1)\}$.

i) $H_1 \ni (1,1)$; $H_2 \ni (1,1)$; $H_3 \ni (1,1)$; $H_4 \ni (1,1)$; $H_5 \ni (1,1)$
$H_6 \ni (1,1)$ dipenuhi

ii) Jika $A = H_2$,yang berarti $H_2 \supset H_1$, maka $H_2 \in \mathfrak{S}$ dipenuhi.

iii) Jika H_1 , $H_2 \in \mathfrak{S}$,maka $H_1 \cap H_2 = \{(1,1),(1,2)\} \in \mathfrak{S}$.

iv) Jika $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 \in \mathfrak{S}$,maka
$H_1^{-1}, H_2^{-1}, H_3^{-1}, H_4^{-1}, H_5^{-1}, H_6^{-1} \in \mathfrak{S}$.

v) terdapat $(1.1) \in \mathfrak{S}$ sedemikian sehingga $(1,1) \circ (1,1) \in H$.

i)* $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap H_5 \cap H_6 = \{(1,1)\} = \Delta$.

Maka Seragam di atas merupakan Seragam Terpisah.