B A B II

MATERI PENDUKUNG

Dalam materi pendukung ini disajikan pengertian-pengertian yang digunakan dalam Ruang Proximitas.Sedang pengertian pengertian dasar,misalnya komplemen suatu himpunan ,gabungan dan irisan himpunan-himpunan dan lain-lain tidak diuraikan di sini, karena pembaca dianggap sudah tahu.

2.1 Himpunan.

Definisi 2.1.1 : Himpunan terbatas (Bounded)

Himpunan A disebut Terbatas , jika terdapat bilangan positip M ,sedemikian sehingga untuk semua x yang berada dalam A berlaku $|x| \leq M$.

Contoh 2.1.1 :

$A = \{1 , 1/2 , 1/3, \ldots\}$

Karena A merupakan himpunan bagian dari selang $[0,1]$, maka A terbatas.

$B = \{2,4,6,\ldots\}$ adalah tidak terbatas ,sebab B tidak menjadi himpunan bagian interval terbatas ,sedang B merupakan himpunan tak hingga.

Sehingga dapat disimpulkan :

i) Himpunan terhingga adalah terbatas .

ii) Himpunan yang tak hingga mungkin terbatas dan mungkin tak terbatas (unbounded).

Definisi 2.1.2 : Batas Atas dan Batas Bawah.

Himpunan $A \subset X$ disebut <u>Terbatas ke atas</u>,jika terdapat suatu elemen $p \in X$,sehingga untuk semua $x \in A$ berlaku $x \leqslant p$.

Sedangkan elemen p disebut <u>Batas Atas</u> himpunan A .

Jika terdapat elemen $q \in X$ dan untuk semua $x \in A$, berlaku $x \geqslant q$,maka A disebut <u>Terbatas ke bawah</u>. Elemen q disebut suatu <u>Batas Bawah</u> himpunan A.

Definisi 2.1.3 :Batas Atas Terkecil dan Batas Bawah Terbesar.

Himpunan $A \subset X$ dan A terbatas ke atas.Jika terdapat $a \in X$ yang memenuhi :

i) a adalah suatu batas atas A.

ii)Jika $r < a$,maka r bukan batas atas A.

maka elemen a ini disebut <u>Batas atas terkecil</u> atau <u>Supremum</u> himpunan A Ditulis $a = \sup A$.

Sedang jika A suatu himpunan yang terbatas ke bawah dan terdapat $b \in X$ yang memenuhi

i) b adalah suatu batas bawah A

ii)Jika $r > b$,maka r bukan batas bawah A,

maka b didsebut <u>Batas bawah terbesar</u> atau <u>Infimum</u> himpunan A .Ditulis : $b = \inf A$.

Contoh 2.1.2 :

$A = \{-1,1,3,5,7,8\}$

A adalah terbatas ke atas ,sebab setiap anggota A lebih kecil dari 9.Bilangan Rasional 8 juga batas

atas A ,sebab jika $x \in A$,maka $x \leqslant 8$,sehingga tidak ada bilangan rasional A yang melebihi 8. 8 merupakan sup A sebab ada tak berhingga batas atas untuk A dan 8 adalah batas atas A yang terkecil.

A juga terbatas ke bawah dan -1 merupakan batas bawah terbesar dari A ,atau $-1 = \inf A$,sebab semua bilangan rasional q dengan $q < -1$ merupakan batas bawah A.

Definisi 2.1.4 : Himpunan Terpisah .

Dalam suatu Ruang Topologi $(X,\mathcal{T})$ terdapat dua himpunan $A,B \subset X$. A dan B disebut dua <u>Himpunan Terpisah</u>, jhj A dan B saling asing ,A tidak memuat titik limit dari B dan B tidak memuat titik limit dari A.

Contoh 2.1.3 :

Jika dalam Ruang Topologi $(X,\mathcal{T})$ terdapat himpunan-himpunan :

$A = \{ x \in X \mid 1 < x < 2 \}$

$B = \{ x \in X \mid 2 < x \leqslant 5 \}$

$C = \{ x \in X \mid 5 \leqslant x < 6 \}$

Maka A dan B adalah terpisah ,karena saling asing, titik limit A bukan anggota dari B dan juga titik limit B tidak merupakan anggota dari A.

Sedang B dan C adalah tidak terpisah ,karena titik limit B dan C yaitu 5 yang menjadi anggota B dan C .

Definisi 2.1.5 : Hasilkali Himpunan .

Misalnya $A, B \subset X$,maka hasilkali himpunan A dan B terdiri atas semua pasangan terurut (a,b) di mana $a \in A$ dan $b \in B$. Ditulis $A \times B$.

Contoh 2.1.4 :

i) $A = \{1,2,3\}$; $B = \{a,b\}$

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

ii) $W = \{s,t\}$

$W \times W = \{(s,s),(s,t),(t,s),(t,t)\}$

Sifat-sifat Perkalian Himpunan :

i)Jika A memiliki n elemen ,B memiliki m elemen , maka $A \times B$ memiliki nm elemen.

ii)Jika A atau B salah satunya adalah himpunan kosong , maka $A \times B$ juga himpunan kosong.

iii)Jika A atau B salah satunya tak hingga dan yang lainnya tidak kosong ,maka $A \times B$ tak hingga

iv) $A \times B \neq B \times A$,kecuali A = B atau salah satu faktornya kosong.

2.2 Fungsi.

Di bawah ini diberikan pengertian-pengertian fungsi yang menunjang dalam pembahasan Ruang Proximitas.

Definisi 2.2.1 :

Suatu fungsi dari X ke Y (atau X sebagai daerah sumber dan Y sebagai daerah kawan) ialah suatu aturan yang setiap anggota dari X menentukan dengan tunggal satu anggota dari Y.

Definisi 2.2.2 : Fungsi Onto

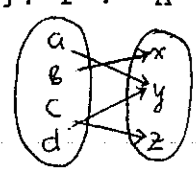
Misal suatu fungsi dari A ke B ,maka jangkau f(A) dari fungsi f adalah sub himpunan B ,yaitu $f(A) \subset B$.

Jika f(A) = B ,yaitu setiap anggota B muncul sebagai bayangan dari sekurang-kurangnya satu elemen A, maka dikatakan "f adalah suatu fungsi dari A pada B" atau f adalah suatu <u>fungsi Onto</u>.

Contoh 2.2.1 :

i) Misal $f:R \longrightarrow R$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x^2$. Maka f bukan suatu fungsi onto , karena bilangan-bilangan negatif tidak muncul dalam jangkau f.

ii) Misal $f:A \longrightarrow B$ dengan A = {a,b,c,d} dan B = {x,y,z}. $f: A \longrightarrow B$ didefinisikan oleh:



f(A) = {x,y,z} = B ,yaitu jangkau f sama dengan ko ranah B. Jadi f memetakan A pada B ,yang berarti f suatu peta onto.

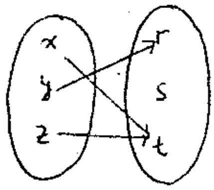
Definisi 2.2.3 :

Jika f adalah fungsi 1-1 ,maka fungsi $\{(y,x): (x,y) \in f\}$ disebut invers dari f ,dan ditulis f^{-1}.

Contoh 2.2.2 :

i)Jika $f(x) = x^2$,maka $f^{-1}(4) = \{2,-2\}$

ii)Jika $f : A \longrightarrow B$



maka $f^{-1}(\{r,s\}) = \{y\}$

$f^{-1}(\{r,t\}) = \{x,y,z\}$

iii) Jika $f:R \longrightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x)=x^2$ dan ambil $D =[4,9]= \{x|4 \leqslant x \leqslant 9\}$,maka $f^{-1}(D)=\{x|-3 \leqslant x \leqslant -2$ atau $2 \leqslant x \leqslant 3\}$.

Definisi 2.2.4 :

Diberikan 2 fungsi $f : X \longrightarrow Y$ dan $g : Y \longrightarrow Z$. Komposisi $g \circ f$ adalah fungsi dari X ke Z yang didefinisikan oleh : $(x,z) \in g \circ f$ jhj terdapat $y \in Y$ sedemikian sehingga $(x,y) \in f$, $(y,z) \in g$.

Contoh 2.2.4 :

f ditetapkan dengan $f(x) = x^2$

g ditetapkan dengan $g(x) = x+3$

maka $(f \circ g)(2)=f(g(2))= f(5) = 25$

$(g \circ f)(2)=g(f(2))= g(4) = 7$

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x+3)=(x+3)^2$

$=x^2 + 6x + 9$

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)= x^2 + 3$.

Definisi 2.2.6 :

Suatu fungsi $f: X \longrightarrow Y$ disebut <u>Surjektif</u> jhj untuk setiap $y \in Y$ terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $f(x)=y$.

Sedang suatu fungsi $f : X \longrightarrow Y$ disebut <u>Injektif</u> jhj untuk setiap x_1 , $x_2 \in X$ dan $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$.

Fungsi f yang injektif sekaligus surjektif dinamakan fungsi <u>Bijektif</u>.

2.3. <u>Ruang Topologi</u>.

Definisi 2.3.1 : Topologi

Suatu himpunan $X \neq \phi$. $\mathcal{T}$ adalah keluarga himpunan-himpunan bagian dari X . $\mathcal{T}$ disebut Topologi pada X jhj memenuhi aksioma :

i) S dan ϕ merupakan anggota $\mathcal{T}$.

ii)Gabungan dari sejumlah anggota $\mathcal{T}$ termasuk dalam $\mathcal{T}$.

iii)Irisan dari tiap dua anggota $\mathcal{T}$ termasuk dalam $\mathcal{T}$.

Selanjutnya jika $\mathcal{T}$ suatu topologi pada X, maka $(X,\mathcal{T})$ disebut Ruang Topologi dan elemen-elemen $\mathcal{T}$ disebut himpunan terbuka.

Contoh 2.3.1 :

Misal $X = \{x,y,z\}$

$\mathcal{T}_1 = \{X,\phi, \{y\},\{y,z\}\}$

$\mathcal{T}_2 = \{X,\phi\}$

$\mathcal{T}_3 = \{X,\phi,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\}\}$

Jadi $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ merupakan topologi-topologi pada X.

$\mathcal{T}_2=\{\phi,X\}$ disebut Topologi Indiskret pada X.

$\mathcal{T}_3=\mathcal{P}(X)$=koleksi semua himpunan bagian dari X disebut Topologi Diskret pada X.

Definisi 2.3.2 : Basis

Diberikan $(X,\mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi . Suatu koleksi himpunan $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ merupakan <u>Basis</u> untuk topologi $\mathcal{T}$, jika setiap anggota $\mathcal{T}$ (himpunan terbuka) merupakan gabungan dari sebarang anggota -anggota $\mathcal{B}$. Jadi jika $\mathcal{B}$ basis untuk topologi $\mathcal{T}$ dan $G \in \mathcal{T}$,maka untuk setiap $x \in G$ terdapat $B_x \subset \mathcal{B}$,sedemikian sehingga $x \in B_x \subset G$.

Contoh 2.3.2:

1)Diberikan $X = \{a,b,c,d\}$

$\mathcal{T} = \{\phi, X, \{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$

Jika $\mathcal{B} = \{\{b\},\{c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$,

maka $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk topologi $\mathcal{T}$, karena :

i) $\phi \in \mathcal{T}$ terpenuhi dengan sendirinya ,sebab $\cup_i B_i = \phi$ untuk $i \in I = \phi$.

ii) $\{b\} \cup \{c\} = \{b,c\} \in \mathcal{T}$

iii) $\{a,b,c\} \cup \{b,c,d\} = \{a,b,c,d\} \in \mathcal{T}$

2) Diberikan $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ topologi diskret pada himpunan $X = \{a,b,c\}$ .Maka $\mathcal{B}_1 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$merupakan basis untuk topologi $\mathcal{T}$.

Tetapi $\mathcal{B}_2 = \{\{a,b\},\{a,c\}\}$ bukan basis untuk topologi $\mathcal{T}$,karena terdapat $\{b,c\} \in \mathcal{T}$ yang bukan merupakan gabungan dari anggota-anggota $\mathcal{B}_2$.

Definisi 2.3.3 : Himpunan Tertutup

Diberikan $(X,\mathcal{T})$ adalah suatu Ruang Topologi dan himpunan $F \subset X$. F adalah tertutup jika F^c terbuka (atau $F^c \in \mathcal{T}$).

Contoh 2.3.3 :

Diberikan $X = \{a,b,c,d,e\}$

$\mathcal{T} = \{\phi, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$.

Maka himpunan bagian yang tertutup dari X adalah $\{X, \phi, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e,\}, \{b,e\}, \{a\}\}$.

Definisi 2.3.4 : Penutup suatu himpunan (Closure).

Jika $(X,\mathcal{T})$ Ruang Topologi dan $A \subset X$,maka <u>Penutup</u> dari A (dengan notasi $\bar{A}$) ,merupakan irisan dari semua himpunan bagian tertutup dari X yang memuat A. Atau $\bar{A} = \cap\{F \subset X \mid A \subset F \text{ dan } F \text{ tertutup}\}$

Contoh 2.3.4 :

Ditentukan $X = \{a,b,c,d\}$

$\mathcal{T} = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$

Tentukan closure dari :

i) $A=\{b\}$; ii) $B=\{b,d\}$; iii) $C=\{b,e\}$

Penyelesaian :

Himpunan-himpunan bagian dari S yang tertutup adalah : $\{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$

$F_1=X$; $F_2=\{b,c,d,e\}$; $F_3= \{a,b,e\}$; $F_4=\{b,e\}$

i) Jadi $\bar{A}=\overline{\{b\}}=F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4=\{b,e\}$.

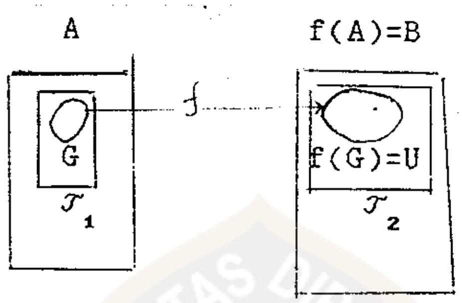
ii) $\bar{B}=\overline{\{b,d\}}=F_1 \cap F_2=X \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c,d,e\}$

iii) $\bar{C}=\overline{\{b,e\}}=F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4=\{b,e\}$.

Definisi 2.3.5: Fungsi Kontinyu.

Suatu fungsi $f : (A,\mathcal{T}_1) \longrightarrow (B,\mathcal{T}_2)$ adalah kontinyu di $x \in A$ jhj $f(x) \in U \in \mathcal{T}_2$, maka terdapat $G \in \mathcal{T}_1$ sedemikian sehingga $x \in G$ dan $f(G) \subset U$.

gambar:



Contoh 2.3.5 :

Misal $A=B=\{a,b,c\}$.

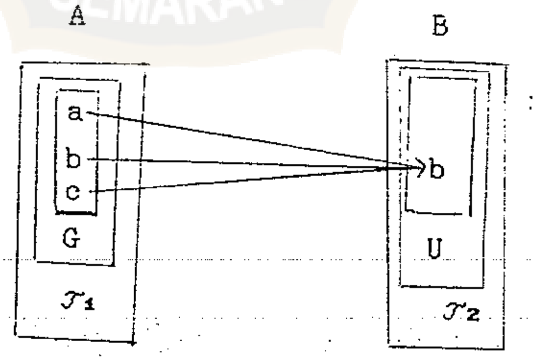
$\mathcal{T}_1=\{\phi,A,\{a\}\}$

$\mathcal{T}_2=\{\phi,B,\{a\},\{b,c\}\}$

$f(x)=b$, $\forall x \in A$,

maka f kontinyu karena $b \in \{b,c\} \subset \mathcal{T}_2$, sehingga terdapat $G \in \mathcal{T}_1$ sedemikian sehingga $x \in G$ dan $f(G) \subset U$.

gambar:



Definisi 2.3.6 :

Suatu fungsi $k : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ disebut <u>Operator Penutup</u> (Closure Operator) pada semesta X jhj memenuhi 4 aksioma Penutup Kuratowski :

i) $\bar{\phi} = \phi$

ii) $A \subset \bar{A}$, $\forall A \subset X$

iii) $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$, $\forall$ $A \subset X$

iv) $\bar{A} \cup \bar{B} = (\overline{A \cup B})$, $\forall$ $A, B \subset X$.

Contoh 2.3.5 :

$X = \{a, b, c\}$

$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$

Himpunan bagian X yang tertutup adalah :

$\mathcal{U} = \{X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \phi\}$

i) $\bar{\phi} = \phi$

ii) $A = \{a, b\}$

$\bar{A} = X$,sehingga $A \subset \bar{A}$

iii) $B = \{a, c\}$

$\bar{B} = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$

$\bar{\bar{B}} = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$

Jadi $\bar{\bar{B}} \subset \bar{B}$.

iv) $A \cup B = \{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$

$\bar{A} \cup \bar{B} = X \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} = X$

$(\overline{A \cup B}) = X = \{a, b, c\}$

Jadi $\bar{A} \cup \bar{B} = (\overline{A \cup B})$

Teorema 2.3.1 :

Suatu fungsi $f : (X, \mathcal{P}) \longrightarrow (Y, \mathcal{U})$ adalah kontinyu pada $(X, \mathcal{T})$,jhj memenuhi :

$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, $\forall$ $A \subset X$

Bukti :($\Longrightarrow$)

Karena f kontinyu dan misal A sebarang himpunan dalam X ,maka $B = f(A)$, sehingga

$\bar{B} = \cap\{C : C \supset B , C^c \in \mathcal{U}\}$.

Ini berarti bahwa $f^{-1}(\bar{B}) = \cap\{f^{-1}(C)\}$. Setiap $f^{-1}(C)$ adalah closed set dan berisi $f^{-1}(B)$,yang berisi A. Sehingga $\bar{A} \subset f^{-1}(B)$. Berarti $f(\bar{A}) \subset f(f^{-1}(\bar{B})) \subset \bar{B} = \overline{f(A)}$.

($\Longleftarrow$)

Andaikan f tidak kontinyu dan misal A himpunan sembarang dalam X, maka $B \neq f(A)$ sehingga

$\bar{B} = \cap\{C^c : B \subset C^c , C \in \mathcal{T} \}$,menyebabkan

$f^{-1}(\bar{B}) = \cap\{f^{-1}(C^c)\}$. $f^{-1}(C^c)$ memuat $f^{-1}(\bar{B})$ tapi tidak berisi A ,sehingga $A \not\subset f^{-1}(\bar{B})$,berartiA $\not\subset$ $f^{-1}(\bar{B})$. Menyebabkan $f(\bar{A}) \not\subset f(f^{-1}(\bar{B}) \not\subset B$ atau $f(\bar{A}) \not\subset \overline{f(A)}$ kontradiksi.Yang benar f kontinyu.

Teorema 2.3.2 : Lemma Urysohn's

Dalam Ruang Normal ,untuk setiap closed set A dan B yang terpisah ,terdapat fungsi kontinyu f dari $(X,\mathcal{T})$ke himpunan Q,dari bilangan Riil y,di mana $0 \leq y \leq 1$,dengan topologi usual,sedemikian sehingga $f(x)=0, \forall x \in A$ dan $f(x)=1$,$\forall x \in B$.

Bukti :

Misal $B^c = G_1$ dan terdapat suatu open set $G_{1/2}$ sedemikian sehingga $A \subset G_{1/2} \subset \bar{G}_{1/2} \subset G_1$. Karena ruangnya normal ,maka terdapat open set G dan H sedemikian sehingga $A \subset G \subset H^c \subset G_1$.

Karena H^c closed dan $\bar{G} \subset H^c \subset G_1$,maka dapat diartikan $G_{1/2} = G$.Misal terdapat open set $G_{k/2^n}$,

$k=1,2,..2^n$,sehingga :

$A \subset G_{1/2^n} \subset \bar{G}_{1/2^n} \subset G_{2/2^n} \subset .. \subset \bar{G}_{(k-1)/2^n} \subset G_{k/2^n} \subset .. \subset G_1$

Dibentuk $G_{2m/2^{n+1}} = G_{m/2^n}$ dan memasukkan $G_{(2m+1)/2^{n+1}}$ dengan mengingat $A \subset G_{1/2^{n+1}}$,$\bar{G}_{1/2^{n+1}} \subset G_{2/2^{n+1}}$ dan $\bar{G}_{2m/2^{n+1}} \subset G_{(2m+1)/2^{n+1}}$, $\bar{G}_{(2m+1)/2^{n+1}} \subset G_{(2m+2)/2^{n+1}}$, $1 \leqslant m \leqslant 2^n-1$,menghasilkan G_r, $\forall\ r \in R$, di mana R adalah himpunan bilangan rasional $m/2^n$,$1 \leqslant m \leqslant 2^n$, n bilangan natural sebarang.Open set G_r memenuhi syarat sbb: Jika r dan s dalam R dan r < s ,maka $A \subset G_r$, $\bar{G}_r \subset G_s \subset G_1$. Didapat :$\forall\ x \in G_1 = B^c$,$f(x)=\inf\{r : r \in R, x \in G_r\}$,dan ambil $f(x)=1$ untuk $x \in B$,berarti $f(x)=0$ untuk $x \in A$ di mana $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$,$\forall\ x \in X$.Tinggal menunjukkan bahwa f(x) kontinyu pada $(X,\mathcal{T})$.

$0 \leqslant f(x) < a$ jhj $x \in G_r$ untuk beberapa $r < a$,sehingga $f(x) \leqslant r < a$.Jika $f(x) < a$, terdapat $r \in R$ sedemikian sehingga $f(x) < r < a$ yang berasal dari $x \in G_r$. Menyebabkan $f^{-1}(0 \leqslant y < a)$ adalah open set $\cup\{G_r : r \in R, r<a\}$.

Dengan menunjukkan bahwa bayangan invers dari himpunan $b < y \leqslant 1$ adalah open,maka harus ditunjukkan bahwa bayangan invers $0 \leqslant y \leqslant b$ adalah closed.

$0 \leqslant f(x) \leqslant b$ jhj untuk $x \in G$,$\forall\ r > b$,sebab jika $x \in G$,$\forall\ r > b$,maka $f(x) \leqslant r$,yaitu $f(x) \leqslant b$. Jika $f(x) \leqslant b$,maka jelas $f(x) < r$,$\forall\ r > b$,yang berarti $x \in G$,$\forall\ r > b$.

Jadi didapat :

$f^{-1}(0 \leqslant y \leqslant b) = \cap\{G_r : r \in R, r > b\}$.$\forall\ r > b$ terdapat

$r' \in R$ sedemikian sehingga $r > r' > b$, dan menyebabkan $G_r \supset \bar{G}_r$,sehingga interseksi dari G_r dapat dinyatakan dengan : $\bigcap\{ \bar{G}_r : r \in R , r > b\}$ yaitu suatu closed set.

Definisi 2.3.6 : Titik Interior (Interior Point).

$(X,\mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi ,$p \in A \subset X$ merupakan <u>Titik Interior</u> (Interior Point) dari A jika p termasuk dalam himpunan terbuka $G \subset A$ sehingga $p \in G \subset A$. Atau Interior A berarti open set terbesar yang termuat dalam A.Notasinya int(A).

Contoh 2.3.6 :

$X = \{a,b,c,d\}$

$\mathcal{T} = \{\phi,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\},X\}$

$A = \{b,c\}$

Carilah int(A)!

Penyelesaian :

Open set yang termuat dalam A :$\phi,\{b\},\{b,c\},\{c\}$

maka $int(A)=\phi \cup \{b\} \cup \{b,c\} \cup \{c\} = \{b,c\}$

Definisi 2.3.7 :Persekitaran (Neighborhood)

Diberikan $(X,\mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi .Suatu himpunan A adalah <u>Persekitaran</u> dari $x \in X$ jika terdapat open set $G \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $x \in G \subset A$. Persekitaran dari suatu titik ditulis N_x.Keluarga semua persekitaran dari $x \in X$ dinotasikan $\mathcal{N}_x$.

Contoh 2.3.7:

Diberikan X = {a,b,c,d,e}

$\mathcal{T}$ = {X,ϕ,{a},{a,b},{a,c,d},{a,b,c,d},{a,b,e}}.

Tentukan $\mathcal{N}_b$!

Penyelesaian :

Himpunan terbuka yang memuat b :{X,{a,b}, {a,b,c,d}, {a,b,e}}.

Himpunan bagian X yang memuat X adalah X

Himpunan bagian X yang memuat {a,b} adalah:

{{a,b},{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,c,d},{a,b,c,e},X}

Himpunan bagian dari X yang memuat {a,b,c,d} adalah :

{{a,b,c,d} ,X}.

Himpunan bagian dari X yang memuat {a,b,e} adalah

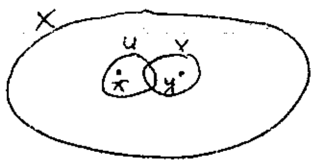
{{a,b,e},{a,b,c,e},{a,b,d,e}}.

Jadi $\mathcal{N}_b$ = {X,{a,b},{a,b,c},{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e}, {a,b,c,d},{a,b,c,e},{a,b,d,e}}.

Definisi 2.3.8 :Ruang T_1

Suatu Ruang Topologi (X,$\mathcal{T}$) disebut suatu <u>Ruang T_1</u> jhj dua titik yang berbeda x dan y dalam X terdapat U,V$\in\mathcal{T}$ dengan x$\in$U , y$\in$X-U dan y$\in$V , x$\in$X-V.

gambar :



Contoh 2.3.8:

X={a,b,c,d}

$\mathcal{T}$={ϕ,X,{b},{c},{b,c},{a,b,c},{a,c,d}}

Misal elemen yang berbeda b dan c dan $U=\{b\}$; $V=\{a,c,d\}$.

Maka $b \in \{b\}$, $c \in (X-\{b\})=\{a,c,d\}$ dan $c \in \{a,c,d\}$, $b \in (X-\{a,c,d\})=\{b\}$.

Jadi $(X,\mathcal{T})$ memenuhi sebagai Ruang T_1.

Contoh 2.3.9:

$$X=\{2,4,6,8,12\}$$

$$\mathcal{T}=\{\phi,X,\{4\},\{6\},\{2,6\},\{4,6\},\{2,4,6\},\{2,6,8\}\}$$

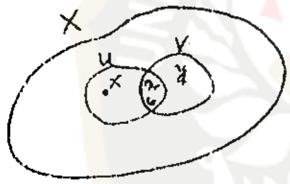
Misal diambil elemen yang berbeda 4 dan 8.

$U=\{2,4,6\}$ dan $V=\{2,6,8\}$.

Maka $4 \in \{2,4,6\}$ dan $8 \in \{2,6,8\}$.

Sehingga $8 \in (\{2,4,6,8,12\}-\{2,4,6\})$.

gambarnya:



Teorema 2.3.3 :

Suatu Ruang Topologi adalah Ruang T_1 jhj $\forall x \in X$ berlaku $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Bukti :($\Longrightarrow$)

$(X,\mathcal{T})$ adalah Ruang T_1 dan $x \in X$.

Jika $y \in (X-\{x\})$,maka terdapat $V \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $y \in V$ dan $x \in X-V$, menyebabkan $y \notin \overline{\{x\}}$ dan $\overline{\{x\}}=\{x\}$.

($\Longleftarrow$)

$\overline{\{x\}}=\{x\} \Longrightarrow (X,\mathcal{T})$ adalah Ruang T_1.

Ambil $y,z \in X$ dengan $y \neq z$.

Karena $\overline{\{y\}}=\{y\}$,maka terdapat $V \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $z \in V$ dan $y \in X-V$.

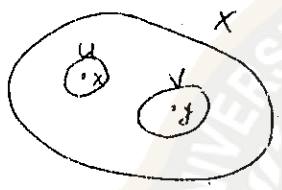
Juga untuk $\overline{\{z\}}=\{z\}$,terdapat $U\in\mathcal{T}$ sedemikian sehingga $y\in U$ dan $z\in X-U$.

Jadi $(X,\mathcal{T})$ adalah Ruang T_1.

Definisi 2.3.9 :Ruang T_2

Suatu Ruang Topologi $(X,\mathcal{T})$ disebut <u>Ruang T_2</u> (Ruang Hausdorff) jhj ,untuk sebarang dua anggota berbeda x dan y dalam X ,terdapat $U,V\in\mathcal{T}$ dengan $x\in U$, $y\in V$ sedemikian sehingga $U\cap V=\phi$.

gambar :



Contoh 2.3.10:

$X=\{5,9,13,14\}$

$\mathcal{T}=\{\phi,X,\{13\},\{5,9\},\{13,14\},\{5,9,13\}\}$.

Misal titiknya 5 dan 13 ,yaitu $5\subset\{5,9\}$ dan $13\subset\{13,14\}$.

Sehingga $\{5,9\}\cap\{13,14\}=\phi$

Jadi Ruang $(X,\mathcal{T})$ memenuhi sebagai Ruang T_2.

Definisi 2.3.10:

Suatu Ruang Topologi $(X,\mathcal{T})$ disebut <u>Normal jhj</u> untuk sebarang dua himpunan tertutup A dan B subset dari X ,terdapat open set (himpunan terbuka) $G\supset A$ dan $H\supset B$,sedemikian sehingga $G\cap H=\phi$.Ruang T_1 normal disebut Ruang T_4.

Contoh 2.3.11 :

Diberikan $X=\{2,3,5\}$

$\mathcal{T}=\{\phi,X,\{2\},\{3\},\{2,3\},\{3,5\}\}$

Himpunan bagian $\mathcal{T}$ yang tertutup adalah :

$\mathcal{U}=\{X,\phi,\{3,5\},\{5\},\{2\},\{2,5\}\}$.

Misal himpunan tertutupnya : $A=\{2\}$; $B=\{5\}$;

dan himpunan terbukanya $G=\{2\}$; $H=\{3,5\}$.

Maka $\{2\}\subset\{2\}$ dan $\{5\}\subset\{3,5\}$ dengan

$\{2\}\cap\{3,5\}=\phi$ .jadi Ruangnya normal.

$(X,\mathcal{T})$ adalah juga Ruang T_1 ,karena :

$2\in X$ dan $5\in X$,sedemikian sehingga terdapat $\{2\},\{3,5\}\in\mathcal{T}$

dengan $2\in\{2\}$,$5\in(\{2,3,5\}-\{2\})$,yaitu $5\in\{3,5\}$ dan

$5\in\{3,5\}$,$2\in(\{2,3,5\}-\{3,5\})$,yaitu $2\in\{2\}$.

Karena Ruangnya T_1 normal ,maka disebut Ruang T_4.

Definisi 2.3.11 :

$(X,\mathcal{T})$ disebut Ruang Regular Lengkap (Completely Regular) jhj $p\in X$ dan $F\subset(X-\{p\})$,dengan F closed ,maka terdapat suatu fungsi kontinyu $f:X\longrightarrow I$ dengan $f(p)=0$ dan $f(F)=\{1\}$.

gambar :