BAB II

MATERI DASAR

2.1. HIMPUNAN

Definisi 1.

Himpunan adalah suatu koleksi atau klas dari suatu objek-objek.

Dinotasikan dengan huruf besar

Misal

A, B, X, Y, ...

Contoh 2.

1. Nama-namm mahasiswa matematika Undip.
2. Solusi dari persamaan $x^2 - 3x - 2 = 0$

Definisi 2.

Elemen / anggota dari suatu himpunan adalah objek - objek dari suatu himpunan.

Dinotasikan daengan huruf kecil

Misal

a, b, x, y, ...

Jika objek x adalah elemen / anggota dari himpunan A atau A memuat x yang merupakan salah satudari e-lemen-elemennya.

Ditulis $x \in A$

Jika objek x bukan anggota / elemen dari himpunan A atau A tidak memuat x yang merupakan salah satu dari elemen-elemennya.

Ditulis $x \notin A$

Definisi 3.

Jika setiap elemen / anggota dari himpunan A dan juga merupakan anggota dari himpunan B maka A disebut subset dari B.

Yaitu A adalah subset dari B jika $x \in A$ maka $x \in B$

Ditulis $A \subset B$

Contoh 3.

Jika

$A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ adalah himpunan bilangan genap positif.

$B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ adalah himpunan bilangan asli.

maka

$A \subset B$

Definisi 4.

Dua himpunan A dan B adalah sama, ditulis $A = B$ bhb $A \subset B$ dan $B \subset A$.

Contoh 4.

Jika

A = { 1, 2, 3, 4 }
B = { 2, 4, 1, 3 }

maka

A ⊂ B dan B ⊂ A jadi A = B

2.2. FUNGSI / PEMETAAN

Definisi 5.

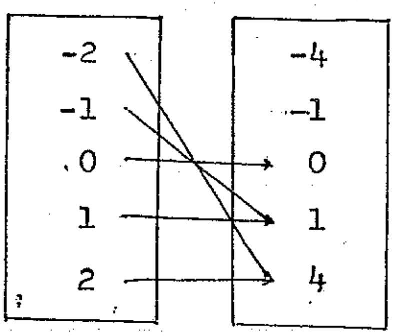
u disebut fungsi dari A ke B
jika untuk setiap elemen pada himpunan A maka u menentukan dengan tunggal elemen pada himpunan B.
Ditulis

$$u: A \longrightarrow B$$

Contoh 5.

Jika A adalah himpunan bilangan real.
B adalah himpunan bilangan real.
Untuk setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$ dengan $u(x) = x^2$

$A \xrightarrow{u} B$



Ternyata setiap elemen pada himpunan A menentukan dengan tunggal elemen pada himpunan B.

8

Berarti U: $A \longrightarrow B$ merupakan suatu fungsi atau pemetaan.

Definisi 6.

u disebut pemetaan yang injektif dari A ke B jika untuk setiap dua elemen yang berlainan pada himpuman A maka mempunyai bayangan yang berlainan pula pada B.

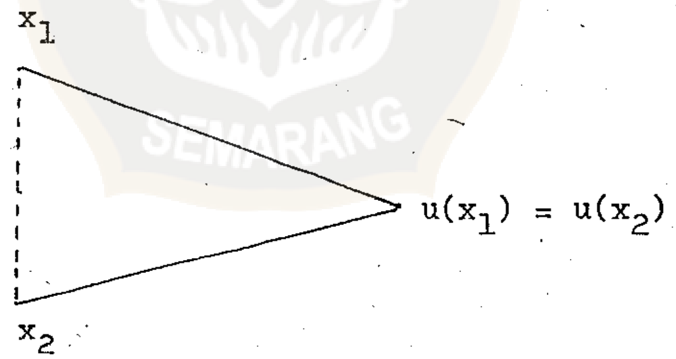
Ditulis

$u: A \longrightarrow B$ adalah pemetaan yang injektif

bhb $\quad x_1 \neq x_2 \longrightarrow u(x_1) \neq u(x_2)$

kontraposisinya $u(x_1) = u(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$

untuk setipp $x_1, x_2 \in A$ dan $u(x_1), u(x_2) \in B$



Contoh 6.

Jika A adalah himpunan bilangan asli

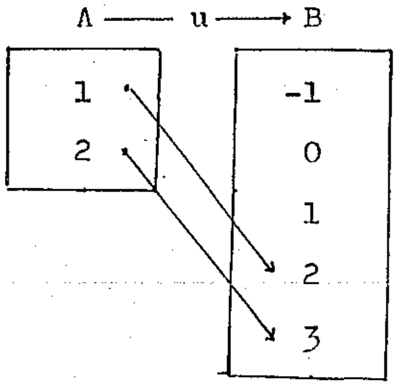
B adalah himpunan bilangan bulat

Untuk setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$ dengan $u(x) = x + 1$

Ambil

$x_1 = 1 \longrightarrow u(x_1) = 2$

$x_2 = 2 \longrightarrow u(x_2) = 3$



Ternyata untuk $x_1 \neq x_2 \longrightarrow u\ (x_1) \neq\ u\ (x_2)$

Berarti $u: A \longrightarrow B$ merupakan pemetaan yang injektif

Definisi 7.

u disebut pemetaan yang surjektif dari A ke B jika untuk setiap elemen pada himpunan B merupakan bayangan sekurang-kurangnya satu dari elemen pada himpunan A .

Ditulis

$u: A \longrightarrow B$ adalah pemetaan yang surjektif

bhb $u\ (A) = B$

untuk setiap $x \in A$

Contoh 7.

Jika A adalah himpunan bilangan asli

B adalah himpunan bilangan cacah

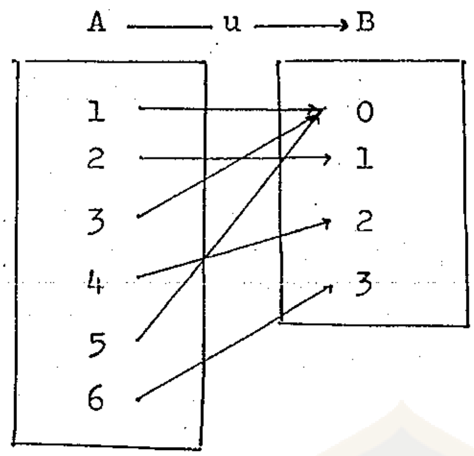
untuk setiap $x \in A$ dan $u\ (x) \in B$

Ambil

$u\ (x) = 0$ untuk x bilangan ganjil

$u\ (x) = \frac{x}{2}$ untuk x bilangan genap

10



Ternyata setiap elemen pada himpunan B merupakan bayangan dari sekurang-kurangnya satu dari elemen pada himpunan A

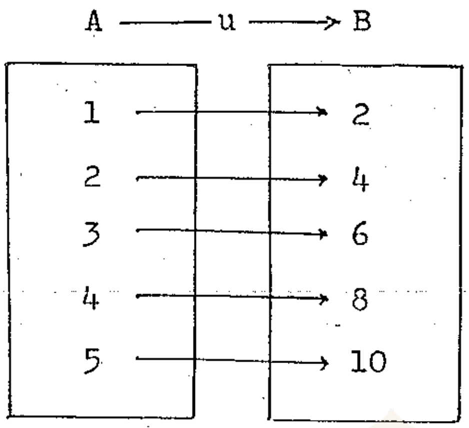
Berarti u: A $\longrightarrow$ B merupakan pemetaan yang surjektif

Definisi 8.

u disebut pemetaan yang bijektif dari A ke B jika u merupakan pemetaan yang injektif dan sekaligus merupakan pemetaan yang surjektif.
Yaitu jika setiap elemen pada himpunan A maka u menentukan dengan tunggal elemen pada himpunan B dan juga untuk sebaliknya.

Contoh 8.

Jika A adalah himpunan bilangan asli
B adalah himpunan bilangan genap positif
Untuk setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$ dengan $u(x)=2x$



Ternyata setiap elemen pada himpunan A maka u menentukan dengan tunggal setiap elemen pada himpunan B dan juga sebaliknya .

Sehingga u adalah pemetaan yang injektif dan sekaligus surjektif.

Berarti u: $A \longrightarrow B$ merupakan pemetaan yang bijektif

Teorema 1.

Pergandaan dari fungsi-fungsi mempunyai sifat assosiatif.

Bukti

Untuk setiap x berlaku

$[(uv)w](x) = (uv)[w(x)] = u[v(w(x))]$

$[u(vw)](x) = u[(vw)(x)] = u[v(w(x))]$

diperoleh $(uv)w = u(vw)$

Terbukti bahwa pergandaan dari fungsi-fungsi mempunyai sifat assosiatif.

Definisi 9.

12

Jika $A' \subset A$ dan $u(A')$ adalah himpunan semua hasil pemetaan dari A' maka

$$u(A') = \{ y \in B \mid x \in A' \text{ dan } u(x) = y \}$$

$$u(A') = \{ u(x) \in B \mid x \in A' \}$$

Dari definisi 9. maka diperoleh

Jika $A' \subset A \longrightarrow u(A') \subset u(A)$

Contoh 9.

Diketahui

$A = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \}$

$B = \{ 1, 2, 3, 4, \}$

Jika $A' \subset A$

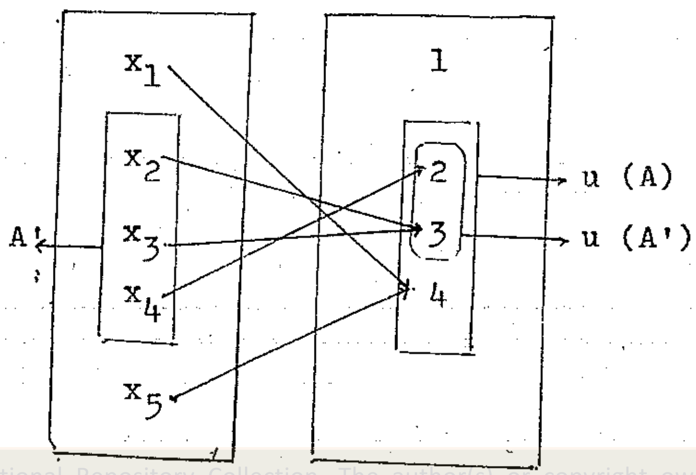
ambil $A' = \{ x_2, x_3, x_4 \}$

Fungsi u ditentukan sebagai berikut

$u(x_1) = 4$ $u(x_2) = 3$ $u(x_3) = 3$

$u(x_4) = 2$ $u(x_5) = 4$

$A \xrightarrow{u} B$



Ternyata u (A') = { 2, 3 } dan u (A) = { 2, 3, 4 }

Sehingga u (A') $\subset$ u (A)

Jadi jika A' $\subset$ A $\longrightarrow$ u (A') $\subset$ u (A)

2.3. FUNGSI / PEMETAAN IDENTITAS

Definisi 10.

1_A disebut fungsi / pemetaan idetitas dari A ke A jika untuk sebarang himpunan maka 1_A membawa setiap elemen pada himpunan A ke elemen pada himpunan A juga.

Ditulis

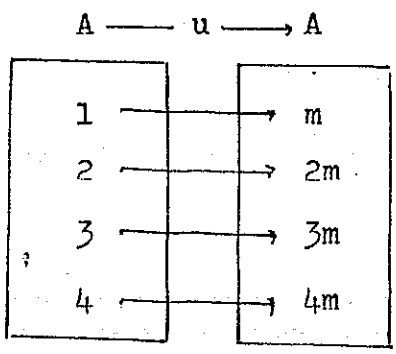
$$1_A : A \longrightarrow A$$

Contoh 10.

Jika A himpunan bilangan asli

dan 1_A: A $\longrightarrow$ A dengan 1_A (x) = mx

untuk setiap x $\in$ A dan bilangan bulat positif



ternyata 1_A membawa setiap elemen x $\in$ A ke mx

14

$\in A$

Berarti $1_A: A \longrightarrow A$ merupakan fungsi / pemetaan identitas.

2.4. FUNGSI / PEMETAAN UNIVALENT

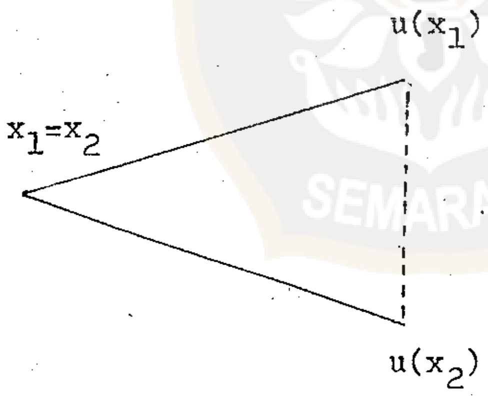
Definisi 11.

$u: A \longrightarrow B$ disebut fungsi/ pemetaan yang univalent atau mempunyai tunggalnya hasil,

bhb terdapat $x_1 = x_2 \longrightarrow u(x_1) = u(x_2)$

kontraposisinya $u(x_1) \neq u(x_2) \longrightarrow x_1 \neq x_2$

untuk setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$



2.5. HOMOMORPHISMA

Homomorphisma adalah suatu fungsi / pemetaan yang mempunyai sifat memelihara aturan komposisinya.

Definisi 12.

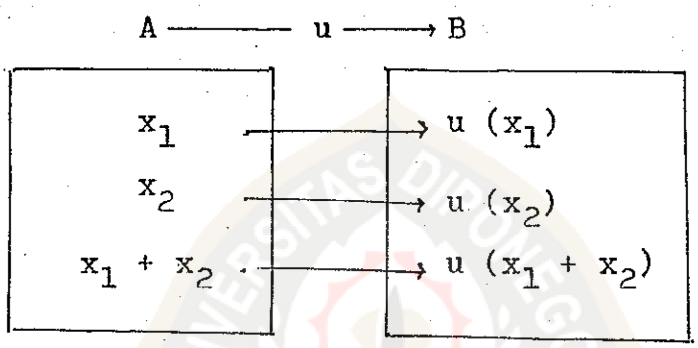
Relasi $u: A \longrightarrow B$ dimana A, B adalah himpunan-himpunan.

15

Terhadap penjumlahan disebut homomorphisma jika memenuhi

1. u merupakan fungsi / pemetaan.
2. Untuk setiap x_1, $x_2 \in A$ maka

   $u\ (x_1 + x_2) = u\ (x_1) + u\ (x_2)$



Teorema 2.

Untuk setiap n bilangan rasional

x bilangan asli

Maka terhadap penjumlahan,

$u\ (x) = nx$ merupakan homomorphisma

Bukti.

- Untuk $u\ (x) = nx$ atau $u: x \longrightarrow nx$

  berarti setiap $x \in A$ maka u menentukan dengan tunggal $nx \in B$

  Menurut definisi 5 berarti u merupakan fungsi / pemetaan.

- Untuk $u\ (x) = nx$ memenuhi

  $u\ (x_1 + x_2) = n\ (x_1 + x_2) = nx_1 + nx_2$

  $= n\ (x_1) + n\ (x_2)$

16

$= u\ (x_1) + u\ (x_2)$

Karena u merupakan suatu fungsi / pemetaan dan memenuhi $u\ (x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2)$

Berarti u merupakan homomorphisma.

Teorema 3.

Pergandaan dari dua homomorphisma merupakan homomorphisma pula.

Bukti

Jika $u: A \longrightarrow B$ adalah homomorphisma

$v: B \longrightarrow C$ adalah homomorphisma

dimana A, B, C, adalah himpunan-himpunan

Untuk $x_1, x_2 \in A$ maka vu memenuhi

$vu\ (x_1 + x_2) = v\left[\ u(x_1 + x_2)\ \right]$

karena vu merupakan prgandaan dari homomorphisma yaitu u yang dilanjutkan dengan v.

$= v\ \left[u(x_1) + u(x_2)\right]$

karena u adalah homomorphisma .

$= v\left[u(x_1)\right] + v\left[u(x_2)\right]$

Karena v adalah homomorphisma.

$= vu(x_1) + vu(x_2)$

Karena u memenuhi $vu(x_1 + x_2) = vu(x_1) + vu(x_2)$ menurut definisi 12. maka vu adalah homomorphisma.

Terbukti bahwa pergandaan dari dua hommmorphisma merupakan homomorphisma.

17

Definisi 13.

Jika u: $A \longrightarrow B$

merupakan homomorphisma dan bersifat injektif maka u disebut monomorphisma.

Contoh 11.

Jika A adalah bilangan asli

B adalah bilangan kelipatan 3

Untuk setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$ dengan $u(x) = 3x$

maka u: $A \longrightarrow B$ adalah monomorphisma

Penyelesaian

- $u(x) = 3x$ menurut teorema 2. merupakan homomorphisma.
- Untuk

  A adalah himpunan bilangan asli

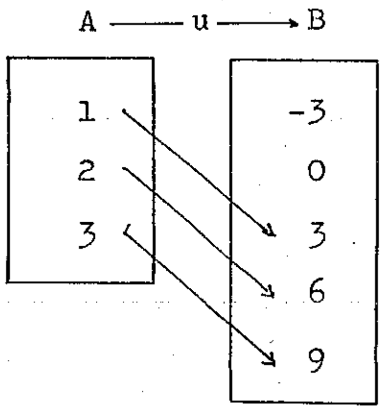
  B adalah himpunan bilangan kelipatan 3

  dimana setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$ dengan $u(x) = 3x$

  Ambil $x_1 \neq x_2$ misal

  $x_1 = 1 \longrightarrow u(x_1) = 3$

  $x_2 = 2 \longrightarrow u(x_2) = 6$



Ternyata untuk $x_1 \neq x_2 \longrightarrow u\ (x_1) \neq$ $u\ (x_2)$

Berarti u bersifat injektif.

Terbukti bahwa u: $A \longrightarrow B$ adalah homomorphisma yang bersifat injektif atau monomorphisma.

Definisi 14.

Jika u: $A \longrightarrow B$ merupakan homomorphisma yang bersifat surjektif maka u disebut epimorphisma.

Contoh 12.

Jika A adalah himpunan bilangan asli

B adalah himpunan dengan elamen nol.

Untuk setiap $x \in A$ dan $u\ (x) \in B$ dengan $u\ (x) = 0$

maka u: $A \longrightarrow B$ bersifat surjektif.

Penyelesaian

- $u(x) = 0$ memenuhi

$u(x_1 + x_2) = 0 = 0 + 0 = u(x_1) + u(x_2)$

Jadi $u(x) = 0$ merupakan homomorphisma.

- Untuk

A adalah himpunan bilangan asli

B adalah himpunan dengan elemen nol

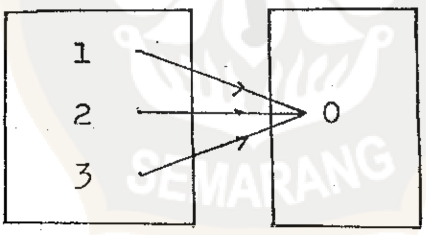
dimana setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$ dengan

$u(x) = 0$

Ambil

$$x_1 = 1 \longrightarrow u(x_1) = 0$$
$$x_2 = 2 \longrightarrow u(x_2) = 0$$
$$x_3 = 3 \longrightarrow u(x_3) = 0$$

$$A \xrightarrow{\quad u \quad} B$$



Ternyata $0 \in B$ merupakan hasil pemetaan dari setiap $x \in A$ atau $u(A) = B$.

Berarti u bersifat surjektif.

Terbukti bahwa $u: A \longrightarrow B$ adalah homomorphisma yang bersifat surjektif atau epimorphisma

Definisi 15.

Jika $u: A \longrightarrow B$

merupakan homomorphisma yang bersifat bijektif yaitu bersifat injektif dan sekaligus surjektif maka u disebut isomorphisma.

Contoh 13.

Jika A adalah himpunan bilangan genap positif

B adalah himpunan bilangan asli

Untuk setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$ dengan $u(x) = \frac{1}{2}x$

maka $u: A \longrightarrow B$ adalah isomorphisma

Penyelesaian

- $u(x) = \frac{1}{2}x$ menurut teorema 2.1. maka merupakan homomorphisma
- Untuk

  A adalah himpunan bilangan genap positif

  B adalah himpunan bilangan asli

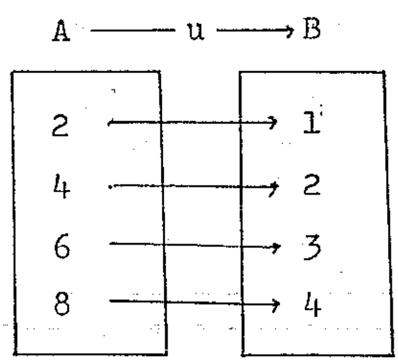
  dimana setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$ dengan

  $u(x) = \frac{1}{2}x$

  Ambil $x_1 \neq x_2$ misal

  $x_1 = 2 \longrightarrow u(x_1) = 1$

  $x_2 = 4 \longrightarrow u(x_2) = 2$



Ternyata untuk $x_1 \neq x_2 \longrightarrow u(x_1) \neq u(x_2)$ dan untuk setiap $u(x) \in B$ merupakan hasil pemetaan dari $x \in A$

Jadi u bersifat injektif dan sekaligus surjektif atau u bersifat bijektif.

Terbukti bahwa $u: A \longrightarrow B$ adalah homomorphisma yang bijektif atau isomorphisma.

2.6. DIAGRAM-DIAGRAM KOMUTATIF

Definisi 16.

Diagram bujur sangkar di bawah ini disebut diagram komutatif bhb

$$vu = gf$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"'] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "v"'] \\
A' \arrow[r, "g"] & B'
\end{tikzcd}$$

Definisi 17.

Diagram segitiga di bawah ini disebut diagram komutatif bhb

$$h = vu$$

22

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "v"] \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

Definisi 18.

Diagram campuran di bawah ini disebut diagram komutatif bhb

setiap komponen-komponen terkecilnya yaitu bujur sangkar dan segitiga-segitiga di dalamnya adalah komutatif.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "v"] & C \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "t"] & \\
A' \arrow[r, "g"'] & B' \arrow[r, "r"'] & C' \arrow[r, "l"'] & D
\end{tikzcd}
$$