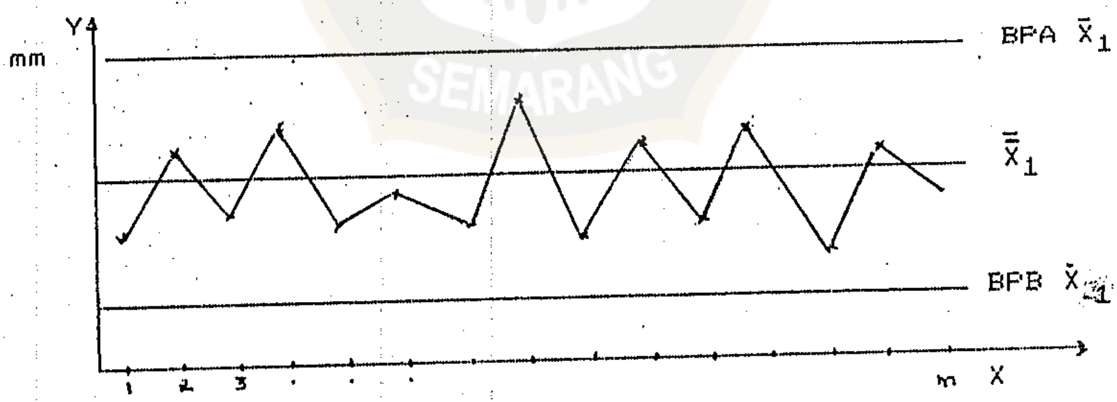
BAB IV

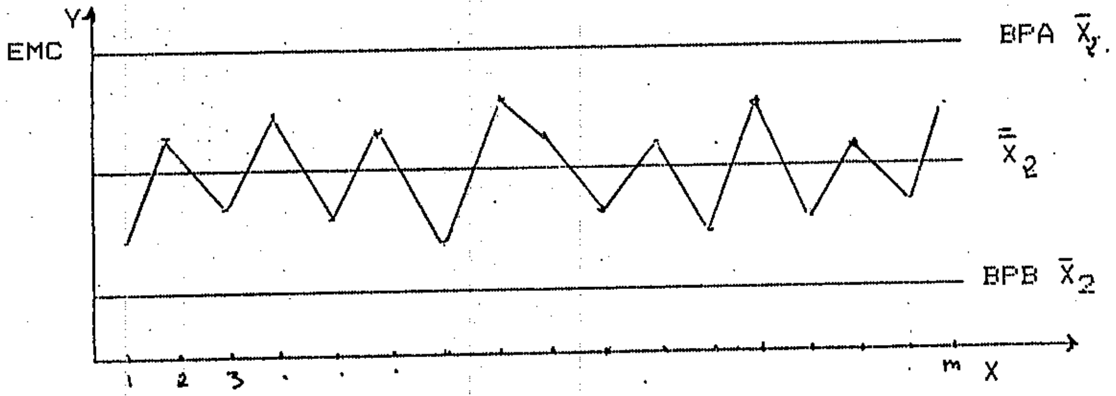
PENGENDALIAN PROSES MULTIVARIATE

4.1 Pengendalian Proses Multivariate

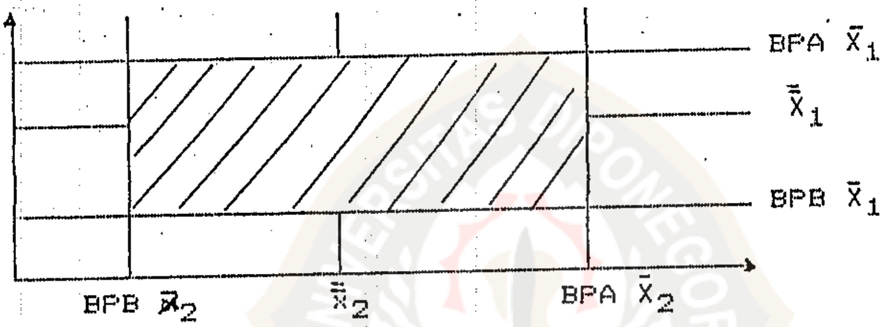
Banyak keadaan yang memerlukan pengendalian bersama-sama (dua atau lebih) karakteristik kualitas yang berhubungan, misalnya suatu ketebalan Papan Laminating (X_1) dan kadar air papan itu (X_2) yang bersama sama menentukan manfaat benda itu. Andaikan X_1 dan X_2 berdistribusi normal bivariate. Karena karakteristik kualitas itu hasil pengukuran, keduanya dapat dikendalikan dengan grafik $\bar{X}$. Untuk $\bar{X}_1$ dan $\bar{X}_2$ indepeden grafiknya dapat dilukiskan seperti Gb. 4.1 Proses dianggap terkendali hanya apabila mean sampel $\bar{X}_1$ dan $\bar{X}_2$ jatuh dalam batas pengendali masing-masing. Ini ekuivalen dengan pasangan ($\bar{X}_1, \bar{X}_2$) jatuh dalam daerah bergaris-garis dalam Gb. 4.2



Nomor subgroup.



GB. 4.1 Grafik Pengendali Tebal Papan Laminating ($\bar{X}_1$) dan Kadar Air Papan ($\bar{X}_2$).



GB. 4.2 Daerah Pengendalian menggunakan batas pengendali X_1 dan X_2.

Apabila $\bar{X}_1$ dan $\bar{X}_2$ tidak independen maka batas pengendali diatas tidak berlaku .

Masalah pengendali kualitas dengan beberapa variabel yang berhubungan kadang-kadang dinamakan masalah pengendalian kualitas multivariate. Prosedur pengendalian dapat dilakukan dengan grafik yang dinamakan ellips pengendali.

Sebaiknya sebelum membahas grafik pengendali multivariate, kita ingat lebih dahulu distribusi normal univariate dengan mean μ dan varians σ^2 mempunyai fungsi densitas.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < X < \infty$$

Fungsi densitas normal dengan mean μ dan varians σ^2 ditulis dengan notasi : $N(\mu, \sigma^2)$.

Notasi ini akan diperluas untuk kasus multivariate.

Kuantitas :

$$\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 = (X-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)$$

diperluas untuk vektor X dengan dimensi p, menjadi :

$$(X-\mu)'\,\Sigma^{-1}(X-\mu)$$

dimana $\mu = E(X)$

$\Sigma = \text{cov}(X)$; Σ : Definit positip.

Supaya volume dibawah luasan

$\exp[-\frac{1}{2}(X-\mu)'\,\Sigma^{-1}(X-\mu)]$

sama dengan 1, maka diperlukan konstan $(2\pi)^{-p/2}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$.

Dengan demikian densitas multivariate normal p dimensi untuk vektor random.

$X = [X_1, X_2, \ldots\ldots X_p]'$ mempunyai bentuk

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{P/2}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp[-\tfrac{1}{2}(X-\mu)'\,\Sigma^{-1}(X-\mu)]$$

$$-\infty < X_i < \infty$$
$$i = 1, 2, \ldots\ldots p$$

diberi notasi $N_p(\mu, \Sigma)$

dibaca : X berdistribusi normal multivariate p dimensi dengan mean μ dari kevarians matriks Σ

Untuk vektor random $X = [X_1, X_2]'$ berdistribusi normal bivariate dengan mean $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ dan kovarians

matriks $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ dimana $\rho = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\,\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

mempunyai fungsi densitas

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)|\,\Sigma\,|^{1/2}} \exp\left\{ -\tfrac{1}{2} (X_1-\mu_1, X_2-\mu_2)\ \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \right\}$$

atau

$$f\ (X) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\ \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(Xi - \mu i)^2}{\sigma_1{}^2} - 2\rho \left(\frac{X1 - \mu 1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{X2 - \mu 2}{\sigma_2}\right) + \frac{(X_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2{}^2} \right] \right\}$$

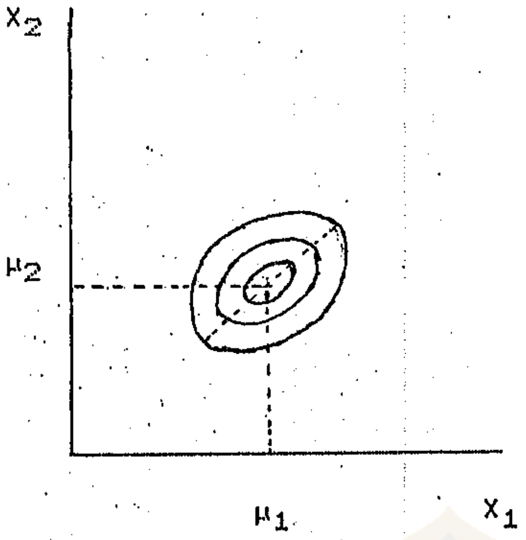
dimana ρ menunjukkan korelasi antara X_1 dan X_2

Bentuk kuadrat dari exponent pada fungsi densitas diatas :

$$-\frac{1}{2\ (1-\rho^2)} \left[\frac{(X_1-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2} - 2\rho\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \frac{(X_2-\mu 2)^2}{\sigma_2{}^2} \right]$$

$$= C$$

merupakan ellips dengan pusat $\mu = [\mu_1, \mu_2]'$. Ellips diatas terletak pada bidang X_1X_2 yang bentuknya tergantung dari nilai ρ dan perbandingan antara σ_1 dan σ_2. Untuk $\sigma_1 = \sigma_2$ dan $\rho = 0$ bentuk ellips diatas berubah menjadi lingkaran. Untuk $\rho > 0$, bentuk ellips diatas ditunjukkan seperti pada gambar 4.3



GB. 4.3 Ellips Fungsi Density Constan

Kontour densitas probabilitas konstan untuk p variate : $(X - \mu)' \Sigma \ (X - \mu) = c^2$
merupakan luasan semua Ellips berpusat di μ dengan sumbu-sumbu $\pm c \sqrt{\lambda_i} \ e_i$

dimana $\Sigma e_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2, \ldots p$.

Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

Bila sembarang garis melalui μ memotong luasan ellips dengan koordinat X, sumbu utama mempunyai koordinat yang memaksimumkan kuadrat jaraknya terhadap μ, yaitu :

$$f(X) = (X - \mu)' \ (X - \mu) \quad \text{dengan syarat batas}$$

$$g(X) = (X - \mu)' \ \Sigma^{-1} (X - \mu) = c^2$$

dengan Lagrange multiplier λ akan dicari X supaya :

$$F(X) = (X-\mu)' \ (X-\mu) - \lambda \ [\ (X-\mu) \ \Sigma^{-1} (X-\mu) - c^2 \ ]$$

maksimum. Dengan mengambil derivatif partial F(X) ke X dan menyamakan 0.

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} = 2(X-\mu) - 2\lambda\Sigma^{-1}(X-\mu) = 0$$

maka X memenuhi persamaan karakteristik berikut :

$$(I - \lambda\Sigma^{-1})(X-\mu) = 0 \quad *$$

Σ non singular maka persamaan diatas ekuivalen dengan

$$(\Sigma - \lambda I)(X-\mu) = 0$$

eigen value atau akar karakteristik didapat bila :

$$|\Sigma - \lambda I| = 0$$

(*) dikalikan dengan $4(X-\mu)'$, didapat

$$\begin{aligned} 4(X-\mu)'(X-\mu) &= 4\lambda(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu) \\ &= 4\lambda c^2 \end{aligned}$$

Untuk c tertentu panjang sumbu utama maksimum bila adalah eigen volue terbesar dari Σ.

Panjang sumbu-sumbu ellips $2c\sqrt{\lambda_i}$ atau sumbu-sumbu ellips $\pm c\sqrt{\lambda_i}\, e_i$.

Dalam prakteknya ellips pengendali dilukiskan dari analisis subgroup-subgroup yang diambil dari populasi yang berukuran n. Bila $\bar{X}$ mendekati normal dengan mean μ dan kovarian matriks $1/n\ \Sigma$,maka densitas normal p variate dari X dengan tinggi konstan adalah contour :

$$\frac{(\bar{X}-\mu)'(\bar{X}-\mu)}{\Sigma / n} = \underset{\text{Konstan}}{n(\bar{X}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{X}-\mu)}$$

Bila n-p besar penggantian Σ^{-1} dengan S^{-1} tidak berpengaruh, sehingga statistiknya berubah menjadi :

$$n(\bar{X}-\mu)'S^{-1}(\bar{X}-\mu) = c^2$$

Untuk pengendalian p karakteristik kualitas yang berhubungan statistik $T^2 = n(\bar{X}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{X}-\mu)$. berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas p. Daerah ellips yang memenuhi :

$n \; (\bar{X}-\mu)' \; \Sigma^{-1} \; (\bar{X}-\mu) = c^2 \leq \chi^2_p \; (\alpha)$ mempunyai probabilitas $1-\alpha$

Theorema 1

X berdistribusi Np (X , μ) maka $\sqrt{n} \; (\bar{X} - \mu)$ berdistribusi Np (0 , Σ)

Bukti :

X berdistribusi Np (μ , Σ) maka :

$$M_X \; (t) = e^{t'\mu + \frac{1}{2} t' \Sigma t}$$

$$M_{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}(t) = E \left(e^{t'\sqrt{n} \; (\bar{X}-\mu)} \right)$$

$$= e^{-t'\sqrt{n}\,\mu} \; E \left(e^{t'\sqrt{n}\,\bar{X}} \right)$$

$$= e^{-t'\sqrt{n}\mu} \; E \left(e^{t'\sqrt{n} \sum_{i=1}^{n} X_i/n} \right)$$

$$= e^{-t'\sqrt{n}\mu} \; E \left(e^{t'\sqrt{n} \; \frac{(X_1+X_2 + \dots + X_n)}{n}} \right)$$

$$= e^{-t'\sqrt{n}\mu} \; E\left(e^{t'\sqrt{n} \; X_1/n} \; e^{t'\sqrt{n} \; X_2/n} \cdots\cdots\cdots \; e^{t'\sqrt{n} \; X/n} \right)$$

$$= e^{-t'\sqrt{n}\mu} \; E \left(\pi_{i=1}^{n} \; e^{t'\sqrt{n} \; X_i/n} \right)$$

$$= e^{-t'\sqrt{n}\mu} \; \pi_{i=1}^{n} \; E \left(e^{t'\sqrt{n} \; X_i/n} \right)$$

$$= e^{-t'\sqrt{n}\mu} \left[E \left(e^{t'\sqrt{n} \; \frac{X_i}{n}} \right) \right]^n$$

$$= e^{-t'\sqrt{n}\mu} \left[M_{X_i} \; (t/\sqrt{n}) \right]^n$$

$$= e^{-t\sqrt{n}\mu}\left[e^{t/\sqrt{n}\,\mu + \frac{1}{2}t'/\sqrt{n}\,\Sigma\, t/\sqrt{n}}\right]^n$$

$$= e^{-t\sqrt{n}\mu}\left[e^{t\sqrt{n}\,\mu + \frac{1}{2}t'\,\Sigma\, t}\right]$$

$$= e^{tO + \frac{1}{2}t'\Sigma t}$$

merupakan fungsi pembangkit momen distribusi normal multivariate dengan p parameter dengan mean O dan kovarian matriks Σ ditulis Np (O,Σ)

Theorema 2

X berdistribusi Np (μ,Σ) maka A X berdistribusi Nq (Aμ, A Σ A')

Bukti

X berdistribusi Np (μ, Σ) maka

$$M_X(t) = e^{t'\mu + \frac{1}{2}t'\Sigma t}$$

$$M_{AX}(t) = E(e^{t'AX}) \quad , \quad \begin{matrix} AX \text{ bertipe } q \times 1 \\ t' \text{ bertipe } q \times 1 \end{matrix}$$

$$= E\left(e^{(A't)'X}\right)$$

$$= M_X(A't)$$

$$= e^{(A't)'\mu + \frac{1}{2}(A't)'\Sigma(A't)}$$

$$= e^{t'(A'\mu) + \frac{1}{2}t'(A\Sigma A')t}$$

merupakan fungsi pembangkit momen distribusi normal multivariate dengan q parameter, mean Aμ dan kovarian matriks A Σ A'

jadi AX berdistribusi Nq (Aμ , A Σ A')

Dengan menggunakan theorema 1 dan theorema 2 kita buktikan Statistik $n\ (\bar{X} - \mu)'\ \Sigma^{-1}\ (\bar{X} - \mu)$ berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas p.

Theorema 3

$\bar{X}$ berdistribusi Np (μ, $1/n\ \Sigma$) dengan $|\Sigma| > 0$

a). $n\ (\bar{X} - \mu)'\ \Sigma^{-1}\ (\bar{x} - \mu)$ berdistribusi χ^2_p

(chi kuadrat dengan derajat bebas p)

b). $P\ (\ \bar{X}\ /\ n\ (\bar{X} - \mu)'\ \Sigma^{-1}\ (\bar{X} - \mu) \le \chi^2_p\ (\alpha)\ ) = 1 - \alpha$

dimana $\chi^2_p(\alpha)$ adalah 100 α persentil atas dari distribusi χ^2_p.

{ $\bar{X}$ / $n\ (\bar{X} - \mu)'\ \Sigma^{-1}\ (\bar{X} - \mu)$ } merupakan daerah ellips.

Bukti :

a) χ^2_p didefinisikan sebagai distribusi jumlah :

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_p^2$$

dimana $Z_1, Z_2, \dots Z_p$ variabel random independen masing-masing berdistribusi N (0,1)

Dengan dekomposisi spektral

$$\Sigma^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i}\ e_i\ e_i'$$

$$n\ (\bar{x} - \mu)'\ \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu)$$

$$= n \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} (\bar{X} - \mu)'\ e_i\ e_i'\ (\bar{X} - \mu)$$

$$= n \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} (\ e_i'\ (\bar{X} - \mu))^2$$

$$= \Sigma_{i=1}^{p} \left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda_i}} \; e_i' \; (\bar{X} - \mu) \right]^2$$

$$= \Sigma_{i=1}^{p} \; Z_i^2$$

dimana $Z_i = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda_i}} e_i' \; (\bar{X} - \mu)$

$$Z_i = A\sqrt{n} \; (\bar{X} - \mu)$$

$$\underset{p\times 1}{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{bmatrix} \qquad \underset{p\times q}{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & e_1' \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & e_2' \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} & e_p' \end{bmatrix}$$

Dengan Theorema 1 $\sqrt{n} \; (\bar{X} - \mu)$ berdistribusi $N_p (0, \Sigma)$.

Dengan theorema 2 $Z = A\sqrt{n} (\bar{X} - \mu)$ berdistribusi

$N_p (0, A \Sigma A')$ dimana :

$A \Sigma A' =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & e_1' \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2}} & e_2' \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} & e_p' \end{bmatrix} [\Sigma_{i=1}^{p} \lambda_i \, e_i \, e_i'][\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1 \; \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} e_2 \; \cdots \; \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p]$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & e_1' \\ \vdots & \vdots \\ \sqrt{\lambda_2} & e_2' \\ \vdots & \vdots \\ \sqrt{\lambda_p} & e_p' \end{bmatrix} [\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1 \; \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} e_2 \; \cdots \; \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \underset{p\times p}{I}$$

Terlihat $Z = A\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)$ berdistribusi

$N_p(0, A\Sigma A') = N_p(0, \underset{p\times p}{I})$

$Z_1, Z_2, \dots. Z_p$ Variabel normal standar yang saling independen. Sehingga

$n(\bar{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu)$ berdistribusi χ^2_p

b). Dari a, yaitu $n(\bar{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu)$ berdistribusi χ^2_p maka :

$P(\bar{X} / n(\bar{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu) \leq \chi^2_p(\alpha)) = 1 - \alpha$

dimana $\{\bar{X} / n(\bar{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu)\}$

merupakan daerah ellips.

Untuk distribusi normal bivariate dari dua karakteristik X_1 dan X_2. Misalkan $\bar{\bar{X}}_1$ dan $\bar{\bar{X}}_2$ nilai mean nominal karakteristik kualitas itu, dan misalkan varians X_1 dan X_2 ditaksir dengan varians sampel itu S_1^2 dan S_2^2. Kovarians X_1 dan X_2 adalah ukuran depedensi antara dua karakteristik kualitas itu, dan ditulis sebagai S_{12}. Jika $\bar{X}_1$ dan $\bar{X}_2$ mean sampel dua karakteristik itu dari himpunan bagian yang berukuran n, maka statistik dari

$n(\bar{X} - \mu)' S^{-1} (\bar{X} - \mu)$

dapat ditulis sebagai berikut :

$$T^2 = \frac{n}{S_1^2 S_2^2 - S_{12}^2} \left[S_2^2 (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1)^2 + S_1^2 (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2)^2 - 2 S_{12} (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1)(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2) \right]$$

Contoh 1

Misalkan $X = [X_1, X_2]'$ vektor random dari distribusi normal bivariate dari dua karakteristik kualitas X_1 dan X_2 ellips pengendali density constan dapat dituliskan sebagai

$$\frac{n}{S_1^2 S_2^2 - S_{12}^2} \Big[S_2^2 (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1)^2 + S_1^2 (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2)^2 - 2 S_{12} (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1)(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2) \Big] = c2$$

Bukti

$X = [X_1, X_2]'$ vektor random dari dua distribusi normal bivariate dengan mean $\mu = [\mu_1 \mu_2]'$ dan kovarian matriks

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

ditulis $X \sim N_2(\mu, \Sigma/n)$ maka $\bar{X}$ juga berdistribusi normal dengan mean μ dan kovarians matriks Σ/n ditulis $\bar{X} \sim N_2(\mu, \Sigma/n)$.

Fungsi density dari $\bar{X} = [\bar{X}_1, \bar{X}_2]'$

$$f(\bar{X}) = \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{1/2}} \operatorname{Exp}\left\{ -\tfrac{1}{2} n (\bar{X}_1 - \mu_1, \bar{X}_2 - \mu_2) \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - \mu_1 \\ \bar{X}_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \right.$$

ellips density constan

$$-\tfrac{1}{2} n (\bar{X}_1 - \mu_1, \bar{X}_2 - \mu_2) \quad \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - \mu_1 \\ \bar{X}_2 - \mu_2 \end{bmatrix} = C$$

untuk $n - p$ besar Σ^{-1} dapat diganti S^{-1}

$$-\tfrac{1}{2} n (\bar{X}_1 - \mu_1, \bar{X}_2 - \mu_2) \; S^{-1} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - \mu_1 \\ \bar{X}_2 - \mu_2 \end{bmatrix} = C$$

dimana $\mu = (\mu_1, \mu_2)' = [\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2]'$

$\mu_1 = E(\bar{\bar{X}}_1)$

$\mu_2 = E(\bar{\bar{X}}_2)$

Statistik $T^2 = n\ (\bar{X}-\mu)'\ S^{-1}\ (\bar{X}-\mu) = c^2$ dapat dijabarkan menjadi

$$T^2 = n\ (\bar{X}_1-\mu_1, \bar{X}_2-\mu_2)'\ S^{-1} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - \mu_1 \\ \bar{X}_2 - \mu_2 \end{bmatrix} = c^2$$

$$= n\ (\bar{X}_1-\bar{\bar{X}}_1, \bar{X}_2-\bar{\bar{X}}_2) \frac{1}{S_1^2 S_2^2 - S_{12}^2} \begin{bmatrix} S_2^2 & -S_{12} \\ -S_{12} & S_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1 \\ \bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2 \end{bmatrix} = c^2$$

$$= \frac{n}{S_1^2 S_2^2 - S_{12}^2} (\bar{X}_1-\bar{\bar{X}}_1, \bar{X}_2-\bar{\bar{X}}_2) \begin{bmatrix} S_2^2 & -S_{12} \\ -S_{12} & S_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1 \\ \bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2 \end{bmatrix} = c^2$$

$$= \frac{n}{S_1^2 S_2^2 - S_{12}^2} [\ (\bar{X}_1-\bar{\bar{X}}_1) S_2^2 - (\bar{X}_2-\bar{\bar{X}}_2) S_{12},\ -(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1)\ S_{12}$$

$$+ (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2)\ S_1^2\ ] \begin{bmatrix} \bar{X}_1 & -\bar{\bar{X}}_1 \\ \bar{X}_2 & -\bar{\bar{X}}_2 \end{bmatrix} = c^2$$

$$= \frac{n}{S_1^2 S_2^2 - S_{12}^2} [S_2^2\ (\bar{X}_1-\bar{\bar{X}}_1)^2 - (\bar{X}_2-\bar{\bar{X}}_2)\ (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1)\ S_{12}$$

$$- (\bar{X}_1-\bar{\bar{X}}_1)\ (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2) S_{12} + S_1^2\ (\bar{X}_2-\bar{\bar{X}}_2)^2\ ] = c^2$$

$$= \frac{n}{S_1^2 S_2^2 - S_{12}^2} [S_2^2\ (\bar{X}_1-\bar{\bar{X}}_1)^2 + S_1^2\ (\bar{X}_2-\bar{\bar{X}}_2)^2 - 2\ S_{12}$$

$$- (\bar{X}_1-\bar{\bar{X}}_1)\ (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2)\ ] = c^2 \quad \text{(qed)}$$

Contoh 2

Pengendalian proses untuk dua karakteristik kualitas berdistribusi normal dengan mean $\mu = [\ \mu_1, \mu_2]'$ dan Kovarian matriks

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \text{ dengan syarat } \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

dapat dilakukan dengan ellips pengendali.

Ellips density constan dari vektor random $X = [\ X_1, X_2]'$

dari dua karakteristik kualitas berdistribusi normal bivariate adalah :

$$n\ (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1, \bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2)\ S^{-1} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1 \\ \bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2 \end{pmatrix} = c^2$$

Densitas normal bivariate dengan

$$\Sigma = S_2 = \begin{pmatrix} S_1^2 & S_{12} \\ S_{12} & S_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^2 & S_{12} \\ S_{12} & S_1^2 \end{pmatrix}$$

Eigen value (akar karakteristik) didapat dari :

$$|\ \Sigma - \lambda I\ | = 0$$

$$\begin{vmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(S_{11} - \lambda)^2 - S_{12}^2 = 0$$

$$(\lambda - S_{11} - S_{12})(\lambda - S_{11} + S_{12}) = 0$$

$$\lambda_1 = S_{11} + S_{12}$$

$$\lambda_2 = S_{11} - S_{12}$$

Eigen vektor e1 ditentukan oleh

$$\Sigma\, e = \lambda_1\, e$$

$$S_2\, e = \lambda_1\, e$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e1 \\ e2 \end{bmatrix} = S_{11} + S_{12} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} e_1 + S_{12} e_2 = (S_{11} + S_{12})\, e_1$$

$$S_{12} e_1 + S_{11} e_2 = (S_{11} + S_{12})\, e_2$$

Kedua persamaan ini mengakibatkan $e_1 = e_2$ ambil $e_1 = 1$ maka $e_2 = 1$, dengan normalisasi didapat pasangan eigen value, eigen vektor pertama adalah

$$\lambda_1 = S_{11} + S_{12} \qquad e_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Eigen vektor e_2 ditentukan oleh :

$$\Sigma\, e = \lambda_2\, e$$

$$S_2\, e = \lambda_2\, e$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e1 \\ e2 \end{bmatrix} = (S11 - S12) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{11}\, e_1 + S_{12}\, e_2 = (S_{11} - S_{12})\, e_1$$

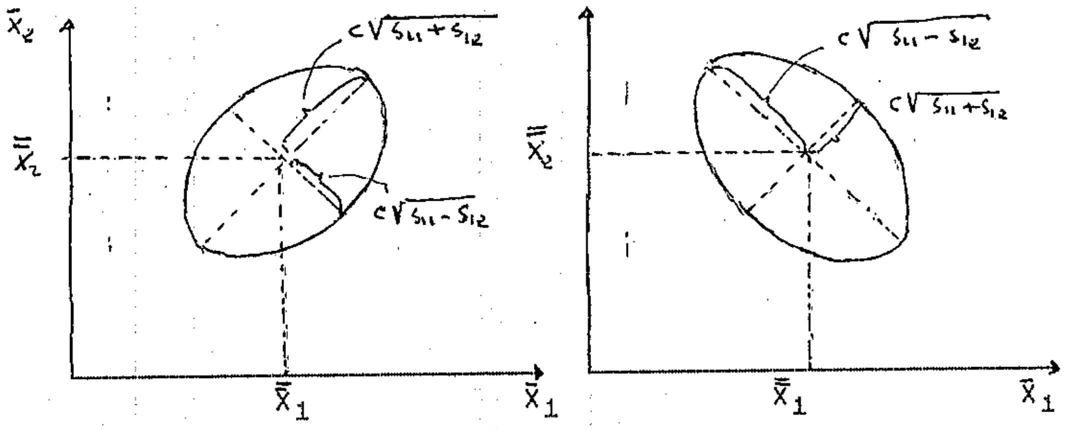
$$S_{12}\, e_1 + S_{11}\, e_2 = (S_{11} - S_{12})\, e_2$$

Kedua persamaan ini mengakibatkan $e_1 = - e_2$ ambil $e_1 = 1$ maka $e_2 = -1$ dengan normalisasi didapat pasangan eigen value, eigen vektor kedua adalah :

$$\lambda_2 = S_{11} - S_{12} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Bila kovarians S_{12} adalah positif, $\lambda_1 = S_{11} + S_{12}$ merupakan eigen value terbesar dengan eigen vektor $e_1 = [\ 1/\sqrt{2} \ \ 1/\sqrt{2}\ ]$ yang mempunyai sudut arah 45 ° melalui $\mu' = [\ \bar{X}_1, \bar{X}_2\ ]$.

Sumbu-sumbu ellips densitas konstan diberikan $\pm c\sqrt{\lambda 1}\ e_1$ dan $\pm\ c\ \sqrt{\lambda_2}\ e_2$ dengan masing-masing eigen vektor mempunyai panjang sumbu utama (sumbu panjang) bersesuaian dengan eigen value terbesar, seperti tampak dalam GB. 4.4(a).



GB. 4.4 Ellips pengendali dua variabel dependen dengan

$$c^2 = \chi^2_2(\alpha)$$

Bila kovarian S_{12} negatif, $\lambda_2 = S_{11} - S_{12}$ merupakan eigen value terbesar dan mempunyai eigen vektor

$e_2' = [\ 1/\sqrt{2}\ \ -1/\sqrt{2}\ ]$

yang mempunyai sudut 135° melalui titik $\mu' = [\ \bar{\bar{X}}_1\ , \bar{\bar{X}}_2\ ]$, seperti tampak dalam GB. 35 (b). Jadi sumbu-sumbu ellips densitas konstan untuk distribusi normal bivariate dengan $S_{11} = S_{12}$ diberikan oleh :

$$\pm\, c\sqrt{S_{11} + S_{12}} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$\pm\, c\sqrt{S_{11} - S_{12}} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Bila setiap mean sampel yang diamati $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ jatuh didalam ellips pengendali menunjukkan terkendali statistik, sedang sepasang mean sampel yang diamati jatuh diluar ellips pengendali menunjukkan proses tak terkendali.

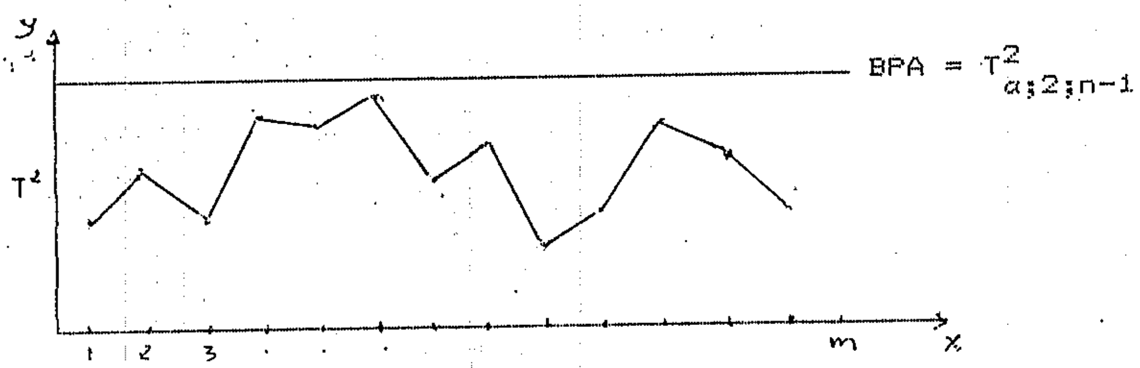
Ada kekurangan yang berkaitan dengan ellips pengendali yaitu sulit untuk membuat ellips lebih dari dua karakteristik kualitas.

Untuk memelihara urutan waktu titik-titik yang digambarkan kita gunakan grafik pengendali Hotelling T^2, seperti di tunjukkan oleh GB. 4.5. Perhatikan bahwa urutan waktu data itu terpelihara dengan grafik pengendali ini, sehingga giliran atau pola tak random lainnya dapat diselidiki.

Lagi pula grafik ini mempunyai keunggulan tambahan bahwa keadaan proses dikarakterisasi dengansatu bilangan (nilai statistik T^2). Ini berguna apabila dua (atau lebih) karakteristik kualitas yang dipelajari. Untuk dua karakteristik kualitas statistik

$$T^2 = \frac{n}{S_1^2 S_2^2 - S_{12}^2} \Big(S_2^2 (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1)^2 + S_1^2 (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2)^2 - 2 S_{12} (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1)(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2) \Big)$$

mengikuti distribusi hotelling dengan derajat bebas 2 dan n-1. Jika $T^2 > T^2_{\alpha;2;n-1}$, maka paling sedikit satu dari karakteristik kualitas itu tak terkendali; dengan $T^2_{\alpha;2;n-1}$ adalah titik persentase α atas distribusi hotteling T^2.



GB. 4.5 Grafik Pengendali Hotelling T^2 untuk p=2 karakteristik kualitas.

Untuk memperluas keadaan dengan p karakteristik kualitas yang berhubungan yang dikendalikan besama-sama. Dianggap bahwa distribusi probabilitas bersama p karakteristik kualitas itu adalah distribusi normal p variat. Prosedur ini memerlukan penghitungan mean sampel bagi masing-masing p karakteristik kualitas dari sampel berukuran n. Himpunan mean karakteristik kualitas itu disajikan dengan vektor p x 1

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ , \\ , \\ , \\ \bar{X}_p \end{bmatrix}$$

Statistik penguji yang digambarkan pada grafik pengendali bagi masing-masing sampel adalah :

$$T^2 = n\ (\ \bar{X} - \bar{\bar{X}}\ )'\ S^{-1}\ (\ \bar{X} - \bar{\bar{X}}\ )$$

dengan $\bar{\bar{X}} = [\ \bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2, \ldots\ \bar{\bar{X}}_p\ ]$ adalah vektor nilai nominal bagi tiap karakteristik kualitas dan S adalah matrik kovarians p karakteristik kualitas $X_1, X_2\ \ldots\ X_p$. Grafik pengendali mempunyai batas pengendali atas $T^2_{\alpha;p;n-1}$.

Kita dapat memperoleh titik prosentase T^2 melalui hubungan

$$T^2_{\alpha;p;n-1} = \frac{p\ (\ n-1\ )}{n - p}\ F_{\alpha;p;n-p}$$

Biasanya perlu menaksir $\bar{\bar{X}}$ dan S dari analisa subgroup berukuran n, yang diambil ketika proses dianggap terkendali. Misalkan tersedia m subgroup semacam itu. Mean dan Varian sampel dihitung dari tiap subgroup; yakni

$$\bar{X}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ijk} \qquad \begin{matrix} j = 1,2, \dots p \\ k = 1,2, \dots m \end{matrix}$$

$$S^2_{jk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{ijk} - \bar{X}_{jk})^2 \qquad \begin{matrix} j = 1,2, \dots p \\ k = 1,2, \dots m \end{matrix}$$

dengan X_{ijk} adalah observasi ke i pada karakteristik kualitas ke j dalam subgroup ke k. Kovarian antara karakteristik kualitas j dan karakteristik kualitas h dalam subgroup ke k adalah

$$S_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{ijk} - \bar{X}_{jk}) (X_{ihk} - \bar{X}_{hk})$$

$$\begin{matrix} k = 1,2, \dots m \\ j \neq h \end{matrix}$$

Kemudian statistik $\bar{X}_{jk}$, S^2_{jk}, dan S_{jhk} dirata-rata meliputi seluruh m subgroup untuk memperoleh

$$\bar{\bar{X}}_j = \frac{1}{m} \Sigma_{k=1}^{m} \bar{X}_{jk} \qquad j = 1,2, \dots p$$

$$S_j^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} S^2_{jk} \qquad j = 1,2, \dots p$$

dan

$$S_{jh} = \frac{1}{m} \Sigma_{k=1}^{m} S_{jhk} \qquad j \neq h$$

contoh 3

Daya rentang dan diameter benag textil adalah dua karakteristik kualitas yang penting yang merupakan subyek pengendalian bersama. Dua puluh sub group masing-masing berukuran n = 10. contoh benang tersedia guna menyusun grafik pengendali T^2. Mean, varian dan kovarians sampel ditunjuk dalam tabel dibawah ini.

Nomor Subgroup k	Mean sampel Daya rentang $\bar{X}_1$	Diameter $\bar{X}_2$	S^2_{1k}	Variansi dan kovarians S^2_{2k}	S_{12k}	T^2
1	115,25	1,04	1,25	0,87	0,80	5,71
2	115,91	1,06	1,26	0,85	0,81	5,45
3	115,05	1,09	1,30	0,90	0,82	16,67
4	116,21	1,05	1,25	0,85	0,81	20,91
5	115,90	1,07	1,16	0,73	0,70	4,91
6	115,35	1,06	1,21	0,80	0,76	0,09
7	114,98	1,05	1,25	0,78	0,75	19,41
8	115,25	1,10	1,20	0,83	0,80	7,15
9	116,15	1,09	1,19	0,87	0,83	11,25
10	115,92	1,05	1,17	0,86	0,84	6,03
11	115,75	0,99	1,22	0,79	0,78	2,31
12	114,90	1,06	1,24	0,82	0,81	25,36
13	116,01	1,05	1,26	0,75	0,72	9,69
14	115,83	1,07	1,17	0,76	0,75	2,91
15	115,29	1,11	1,23	0,89	0,82	5,91
16	115,63	1,04	1,24	0,91	0,83	0,15
17	115,47	1,03	1,20	0,85	0,80	0,55
18	115,58	1,05	1,18	0,83	0,79	0,00
19	115,72	1,06	1,31	0,79	0,76	0,90
20	115,40	1,04	1,29	0,85	0,78	1,68
Rata-rata	$\bar{\bar{X}}_1$=115,39	$\bar{\bar{X}}_2$=1,06	1,23	0,83	0,79	

Statistik penguji untuk menggambarkan grafik T^2 sebagai

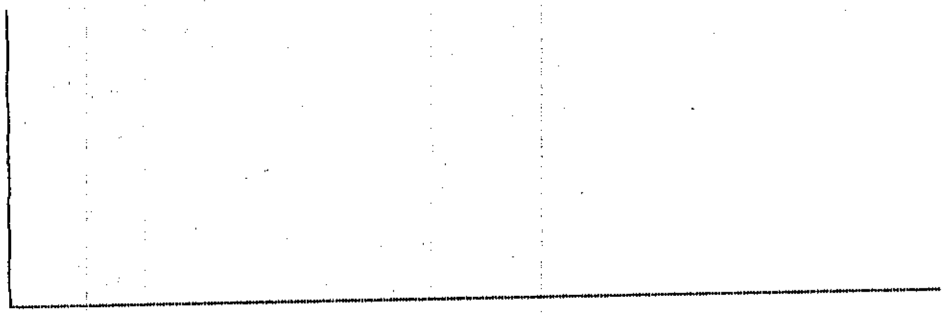
$$T^2 = \frac{10}{(1,23)(0.83)-(0,79)^2}\left[\, 0,83(\bar{X}_1-115,59)^2 + 1,23(\bar{X}_2-1,06)^2 - 2\,(0,79)\,(\bar{X}_1 - 115,59)\,(\bar{X}_2 - 1,06)\,\right]$$

dan jika α = 0.01 batas pengendali atas grafik itu adalah

$$T^2_{0,01;2;9} = \frac{(2)(9)}{8}\, F_{0,01;2;8}$$

$$= \frac{(2)(9)}{8}\,(8,65)$$

$$= 19,46$$



Nomor Subgroup

Gb.4.6 Grafik pengendali T^2

Beberapa keadaan kurang terkendali ditunjukkan dalam proses itu, karena statistk sampel T^2 bagi subgroup 4 dan 12 melebihi batas pengendali. perlu diperiksa titik pada data individual guna menentukan variabel mana yang telah menimbulkan tanda tak terkendali.