BAB II

TEORI PENUNJANG

Pada bagian ini akan diberikan beberapa pengertian, definisi serta teorema yang mendasari materi inti yang akan dibahas pada Bab III, selanjutnya uraian dibawah ini dianggap sebagai teori penunjang. Mengingat materi pembahasan dari tulisan ini, maka teori penunjang yang termuat disini sebagian besar menjelaskan konsep himpunan dan konsep relasi. Untuk lebih jelasnya adalah sebagai berikut.

2.1. KONSEP HIMPUNAN

Definisi : 2.1

Entitas adalah sesuatu yang keberadaannya dapat dibedakan dengan jelas.

Contoh : 2.1

* Nama
* Alamat
* Bilangan
* Sifat
* Lain-lain

Definisi : 2.2

Himpunan adalah kumpulan entitas-entitas dan entitas ini disebut elemen atau anggota himpunan.

Contoh : 2.2

* Himpunan mahasiswa * Himpunan kota
* Himpunan bilangan * Himpunan warna

Suatu entitas merupakan eleman dari suatu himpunan bila memenuhi sifat-sifat atau hukum-hukum dari himpunan yang diberikan. Notasi " $\in$ " digunakan untuk menyatakan keanggotaan himpunan, sebaliknya notasi " $\notin$ " dipakai untuk menyatakan bukan anggota.

Definisi : 2.3

Atribut adalah himpunan entitas-entitas, sedang Domain dari atribut adalah himpunan dari bilangan atau huruf (character).

Contoh : 2.3

Entitas :	* orang	* nomor
Atribut :	* nama	* nomor kode
Domain :	* huruf	* bilangan

Definisi : 2.4

Himpunan semesta adalah himpunan dari semua elemen yang memungkinkan berada dalam objek pengamatan, dan ditulis dengan notasi " U ".

Definisi : 2.5

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen, ditulis dengan notasi " $\emptyset$ ".

Definisi : 2.6

Himpunan A adalah himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen dari A juga menjadi elemen dari B, secara simbolis ditulis :

" $A \subset B$ atau $B \supset A \Longleftrightarrow x \in A$ maka $x \in B$ "

Definisi : 2.7

Dua himpunan A dan himpunan B sama jika dan hanya jika $A \subset B$ dan $B \subset A$.

Definisi : 2.8

Gabungan dua himpunan A dan himpunan B adalah himpunan yang anggotanya semua anggota A atau semua anggota B atau anggota keduanya, secara simbolis ditulis " $A \cup B$ ".

Definisi : 2.9

Irisan dua himpunan A dan himpunan B adalah himpunan yang anggotanya termuat dalam A dan dalam B, secara simbolis ditulis " $A \cap B$ ".

Definisi : 2.10

Himpunan A disebut terhingga jika dan hanya jika n(A) yaitu banyak elemen A sama dengan c, $c \in$ { bilangan cacah }.

Himpunan B disebut himpunan tak hingga jika dan hanya jika n(B) yaitu banyak elemen B tak didefenisikan.

Contoh : 2.4

Himpunan terhingga :

1. $\emptyset = \{ \}$ $n(\emptyset) = 0$
2. $A = \{ 1,2,3,5 \}$ $n(A) = 4$
3. $B = \{ x \mid x$ nama hari dalam seminggu $\}$ $n(B) = 7$

Himpunan tak hingga :

1. $C = \{ 0,1,2,\ldots\ldots \}$

2. $D = \{ \ldots\ldots\ldots -2.-1,0,1,2,\ldots\ldots \}$

3. $E = \{ x \mid -1 < x \leq 2,\ x \text{ bilangan riel} \}$

Pengertian Himpunan Terbilang dan Tak Terbilang

Himpunan Terbilang adalah himpunan yang anggotanya dapat ditunjukan atau dihitung satu persatu (deskrit), sedangkan Himpunan Tak Terbilang menyatakan sebaliknya yaitu himpunan yang anggotanya tidak dapat dihitung satu persatu (kontinu), maka semua himpunan Terhingga kecuali himpunan kosong adalah terbilang, tetapi tidak sebaliknya. Dan setiap himpunan tak terbilang adalah tak hingga.

Contoh : 2.5

1. $P = \{ a,b,c \}$ Terhingga dan Terbilang
2. $Q = \{ 1,2,3,\ \ldots. \}$ Tak hingga dan Terbilang
3. $R = \{ x \mid 1 < x < 2,\ x \text{ bilangan rasional} \}$ Tak hingga dan Tak terbilang

Pengertian Himpunan Terbatas dan Himpunan Tak Terbatas

Himpunan Terbatas adalah himpunan yang mempunyai batas bawah dan batas atas. Himpunan yang mempunyai batas bawah saja disebut Terbatas dibawah, dan himpunan yang mempunyai batas atas saja disebut Terbatas diatas, sedang himpunan yang tidak mempunyai batas atas dan batas bawah disebut Tak terbatas. Unsur yang menjadi batas bisa merupakan anggota himpunan bisa juga tidak.

Contoh : 2.6

Batas atas = Ba

Batas bawah = Bb

1. K = { 1,2,3,4 } Terbatas

   Bb = 1 dan Ba = 4

2. $L = \{ x \mid 1 \leq x < 4,$ x bilangan riel }

   Terbatas, Bb = 1 dan Ba = 4

3. $M = \{ x \mid x < 1,$ x bilangan rasional }

   Terbatas diatas, Ba = 1

4. $N = \{ x \mid x \geq 4,$ x bilangan rasional }

   Terbatas dibawah, Bb = 4

Dari beberapa himpunan selanjutnya dapat dibentuk barisan himpunan.

2.2. BARISAN HIMPUNAN DAN LIMIT

Suatu konsep tentang limit dalam teori himpunan abstrak dijelaskan dengan pengertian limit pada teori variabel riel.

Definisi : 2.11

inferior

Pandang A_1, A_2, A_3 ...... adalah barisan himpunan dalam semesta U. Limit inferior dari barisan ditulis dengan : Lim inf A_k, adalah himpunan A* dari elemen-elemen x dalam berhingga himpunan A_k.

Jika suatu elemen x berada dalam berhingga himpunan A_k maka terdapat n sehingga x berada dalam $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ sebaliknya x yang berada dalam $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, juga berada dalam limit inferior, sehingga :

$$A^* = \text{Lim inf } A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Definisi : 2.12

Pandang A_1, A_2, A_3 ...... adalah barisan himpunan dalam semesta U. Limit superior dari barisan ditulis dengan : Lim sup A_k, adalah himpunan A^* dari elemen-elemen x dalam tak hingga himpunan A_k.

Jika suatu elemen x berada dalam tak hingga himpunan A_k maka untuk setiap n sehingga x berada dalam $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ sebaliknya x yang berada dalam $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, juga berada dalam limit superior, sehingga :

$$A^* = \text{Lim sup } A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Suatu barisan A_k adalah barisan naik jika dan hanya jika untuk setiap k : $A_k \subset A_{k+1}$.

Suatu barisan A_k adalah barisan turun jika dan hanya jika untuk setiap k : $A_k \supset A_{k+1}$.

Untuk setiap barisan monoton berlaku :

$$\text{monoton naik} \ : \ \text{Lim } A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \ .$$

$$\text{monoton turun} \ : \ \text{Lim } A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \ .$$

dan dari definisi dapat diturunkan :

$$\text{monoton naik} \ : \ \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \quad \text{dan} \quad \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$\text{monoton turun :} \quad \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \quad \text{dan} \quad \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

2.3. KELAS-KELAS HIMPUNAN

Untuk menyelidiki suatu himpunan dari suatu himpunan dipakai istilah kelas himpunan. Jadi suatu kelas himpunan beranggotakan himpunan. Notasi yang digunakan adalah $\alpha = \{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$ adalah kelas yang beranggotakan 4 himpunan atau dengan notasi seperti :

Kelas berhingga dengan n anggota :

$$\alpha = \{ A_k \}_{k=1}^{n} = \{ A_k \} \quad , k = 1,2,3,\ldots,n$$

Kelas terbilang :

$$\beta = \{ B_k \}_{k=-\infty}^{\infty} = \{ B_k \} \quad , k \in I$$

Kelas tak terbilang :

$$\zeta = \{ C_h \}_{h \in I} \quad , I = \{ h \mid 0 < h < 1 \}$$

I disebut himpunan indek

Definisi : 2.13

Suatu kelas himpunan α yang tidak kosong disebut kelas himpunan additif bila memenuhi :

1. Jika A_1, A_2, ..., A_n adalah barisan berhingga anggota-anggota kelas α, maka gabungannya juga anggota α.
2. Jika A_k anggota α maka komplemennya A_k^c juga berada dalam α.

Dari definisi diatas dapat diturunkan sifat-sifat sebagai berikut :

3. Himpunan semesta U berada dalam α.
4. Himpunan kosong $\emptyset$ berada dalam α.
5. Jika anggota dari barisan berhingga A_1, A_2, A_3,...., A_n berada dalam α maka irisan semua A_1, A_2, ... ,A_n juga berada dalam α.

Teorema : 2.1

6. Jika { A_k } adalah barisan dari anggota - anggota kelas α maka :

$A_* =$ Lim inf A_k dan $A^* =$ Lim sup A_k termuat dalam α.

7. Jika $\{ A_k \}$ adalah barisan anggota-anggota kelas α sehingga $A =$ Lim A_k termuat dalam α.

Bukti :

6. $\{ A_k \} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ adalah barisan semesta U

$A_* =$ Lim inf A_k

$$= \bigcup_{n=1}^{\sim} \bigcap_{k=n}^{\sim} A_k$$

$$= \left(\bigcap_{k=1}^{\sim} A_k \right) \cup \left(\bigcap_{k=2}^{\sim} A_k \right) \cup \ldots \cup A_{\sim}$$

mengingat $A_1, A_2, \ldots, A_{\sim}$ dalam kelas α maka menurut sifat 5 $\left(\bigcap_{k=1}^{\sim} A_k \right)$ berada dalam kelas α.

karena $\left(\bigcap_{k=1}^{\sim} A_k \right), \left(\bigcap_{k=2}^{\sim} A_k \right), \ldots, A_{\sim}$ berada dalam α maka $A_* =$ Lim inf A_k berada dalam kelas α.

dengan cara sama A^{*} = Lim sup A_k berada dalam kelas α.

7. Karena limit inferior dan limit superior adalah limit barisan dan menurut teorema (6) A_* = Lim inf A_k dan A^{*} = Lim sup A_k anggota kelas α maka $A_* \cup A^{*} \in \alpha$, yaitu limit A_k berada dalam kelas α. Jadi jika A = lim A_k maka A termuat dalam kelas α.

□

Contoh : 2.7

$U = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ yaitu ruang semesta dengan tiga elemen dan didefinisikan :

$A_1 = \{ x_1 \}$ $\quad A_4 = \{ x_1, x_2 \}$

$A_2 = \{ x_2 \}$ $\quad A_5 = \{ x_1, x_3 \}$

$A_3 = \{ x_3 \}$ $\quad A_6 = \{ x_2, x_3 \}$

Sehingga kelas himpunan α terdiri dari semua himpunan bagian dari U yaitu :

$\alpha = \{ \emptyset , A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, U \}$

menurut syarat 1 :

$$\emptyset \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup U = U \in \alpha$$

menurut syarat 2 :

$\emptyset^c = U \in \alpha$ $\quad$ $A_4^c = A_3 \in \alpha$

$A_1^c = A_6 \in \alpha$ $\quad$ $A_5^c = A_2 \in \alpha$

$A_2^c = A_5 \in \alpha$ $\quad$ $A_6^c = A_1 \in \alpha$

$A_3^c = A_4 \in \alpha$ $\quad$ $U^c = \emptyset \in \alpha$

jadi syarat 1 dan syarat 2 dipenuhi sehingga α adalah kelas additif.

Definisi : 2.14

Himpunan $\{ A_1, A_2, \ldots, A_k \}$ adalah partisi dari himpunan A jika dan hanya jika memenuhi :

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = U$
2. $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = \emptyset$

Contoh : 2.8

$U = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}$

$A_1 = \{ x_1, x_2 \}$

$A_2 = \{ x_3 \}$

$A_3 = \{ x_4 \}$

Jadi himpunan $\{ A_1, A_2, A_3 \}$ adalah partisi dari U.

2.4. HASIL GANDA KARTESIUS

Definisi : 2.15

Dua himpunan A dan B dengan $x \in A$ dan $y \in B$, hasil ganda kartesius dari A dan B ditulis A X B, adalah himpunan dari semua pasangan (x,y).

Teorema : 2.2

Jika n(A) adalah banyaknya elemen A dan n(B) adalah banyaknya elemen B maka banyaknya elemen A X B adalah :

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Bukti :

Dengan induksi matematik didapatkan untuk n(A) = 1 dan n(B) = 1 maka n(A X B) adalah kombinasi $C_1^{n(A)}$ dan $C_1^{n(B)}$ jadi :

$$n(A \times B) = C_1^1 \cdot C_1^1 = 1 = n(A) \cdot n(B)$$

untuk n(A) = k dan n(B) = h maka n(A X B) adalah kombinasi dari C_1^k dan C_1^h jadi :

$$n(A \times B) = C_1^k \cdot C_1^h = \frac{k\,!}{(k-1)!} \cdot \frac{h\,!}{(h-1)!}$$

$$= \frac{k\ (k-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{h\ (h-1)!}{(h-1)!}$$

$$= k \cdot h$$

$$= n(A) \cdot n(B)$$

□

Mengingat kelas $\{ U_k \}$, $k \in I$ dengan I himpunan indek, $x_k \in U_k$ dengan U_k ruang koordinat titik sehingga hasil ganda kartesius dari ruang koordinat diindikasi dengan simbol U_I dan elemennya $x_I = \{ x_k \}$, $k \in I$.

Misal $\{ j,k \}$ adalah partisi dari himpunan indek I dan mengingat hasil ganda kartesius U_j dan U_k maka ruang U_I dan ruang $U_j \times U_k$ dapat diindikasi dengan elemen x_I dan pasangan elemen (x_j, x_k).

Contoh : 2.9

Untuk $I = \{ 1,2,3,4,5 \}$

$j = \{ 1,3,5 \}$

$k = \{ 2,4 \}$

$x_I = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \}$

$x_j = \{ x_1, x_3, x_5 \}$

$x_k = \{ x_2, x_4 \}$

maka elemen U_j X U_k berbentuk :

$$[(x_1, x_3, x_5), (x_2, x_4)]$$

2.5. KONSEP RELASI

Konsep relasi secara intuitif telah memberikan arti yang tepat dalam matematika modern. Konsep ini diformulasikan secara sama dari pengertian fungsi, mengingat suatu fungsi adalah sebagian bentuk khusus dari relasi.

Untuk mengetahui apakah x mempunyai relasi dengan y maka diamati pasangan entitas (x,y). Jika proposisi yang memuat pasangan (x,y) ini benar maka relasi dikatakan benar, misalnya suatu proposisi diindikasi dengan simbol " * " maka x * y dinyatakan sebagai " x mempunyai relasi dengan y ".

Contoh : 2.10

1. Jika x dan y adalah bilangan riel.
   * menyatakan " kurang dari ".
   x * y dibaca x kurang dari y.
2. Jika x dan y adalah himpunan bagian ruang U.

* menyatakan " himpunan bagian dari ".

x * y dibaca x himpunan bagian dari y.

Jika pernyataan x * y untuk proposisi yang memuat elemen x dan y dari himpunan semesta, relasi disebut berlaku jika dan hanya jika (x,y) adalah suatu pasangan elemen-elemen dimana x * y adalah suatu pernyataan yang benar. Jadi R adalah himpunan pasangan (x,y) sehingga x * y adalah benar, secara simbolis dinyatakan dengan R = { (x,y) | x * y }.

Definisi : 2.16

Relasi R adalah suatu himpunan bagian dari U, hasil ganda Kartesius V X W dari dua ruang V dan W yang masing-masing mempunyai elemen x dan y sehingga x * y adalah pernyataan yang benar dari pasangan (x,y) dalam relasi R.

Sifat-sifat relasi :

1. Suatu relasi disebut refleksif pada himpunan U jika dan hanya jika (x,x) dalam R memenuhi untuk setiap $x \in U$.
2. Suatu relasi disebut transitif jika dan

hanya jika $x * y$ dan $y * z$ maka $x * z$.

3. Suatu relasi disebut simetris jika dan hanya jika $x * y$ maka $y * x$.

4. Suatu relasi yang memenuhi refleksif, transitif dan simetris disebut equivalen.

Contoh : 2.11

$\rho(E) = \{ E_1, E_2, \ldots E_n \}$ yaitu suatu partisi dari E relasi R pada E X E dinyatakan :

R = { (x,y) : x adalah dalam sel yang sama dengan y }

Karena R memenuhi sifat : Refleksif,Tran - sitif dan Simetris maka relasi R disebut Equivalen.

Misal E suatu himpunan dan R suatu relasi equivalen pada E X E untuk suatu $x \in E$,

$E_x = \{ y \in E \mid (x,y) \in R \}$

himpunan dalam kelas $\{ E_x \}$, $x \in E$, dari partisi E maka ditegaskan bahwa :

1. Setiap y dalam E memuat paling sedikit satu E_x.

2. Dua himpunan E_x dan E_y adalah identik atau tidak beririsan, jadi gabungan himpunan yang tak beririsan adalah E.

2.6. ALJABAR RELASIONAL

Aljabar Relasional adalah bahasa prosedural yang digunakan untuk mengekspresikan suatu relasi. pada Aljabar Relasional terdapat operasi pokok yang diantaranya :

1. Pilihan (Select).
2. Proyeksi (Projection).
3. Hasil ganda kartesius (Product Cartesius).
4. Gabungan (Union).
5. Pengurangan (Set - difference).

Dan di samping itu ada operasi tambahan yaitu :

1. Irisan (Intersection).
2. Pembagian (Devisor).
3. Penggabungan (Join).
4. Penggabungan natural (Natural Join).

Pada operasi tambahan digunakan untuk menyederhanakan didefenisikan dengan operasi pokok.

2.6.1. Pilihan (Select)

Operasi pilihan ditulis dengan simbol " Γ " yaitu memilih tupel yang memenuhi predikat tertentu dalam relasi argumen. Penulisan operasi pilihan, predikat ditulis sebagai subskrip dan relasi argumen diberikan dalam tanda kurung mengikuti simbol " Γ ".

Misalnya : Γ_{A} (R)

Artinya himpunan tupel pada R yang memenuhi atribut A.

2.6.2. Proyeksi (Projection)

Operasi proyeksi dilambangkan dengan " Π " yaitu membuat relasi baru dengan atribut-atributnya berasal dari relasi argumen. Dalam penulisannya atribut-atribut predikat yang dikehendaki disajikan sebagai subskrip dan relasi argumen mengikuti simbol " Π ".

Misalnya : $\Pi_{A,B}$ (R)

Artinya relasi dengan atribut A dan B yang berasal dari relasi R.

2.6.3. Hasil ganda kartesius (Product Cartesius)

Operasi hasil ganda kartesius dilambangkan dengan " X " yaitu relasi yang dibentuk dengan memasangkan tupel-tupel dari dua relasi yang lain. Jika R_1 dan R_2 adalah suatu relasi maka R_1 X R_2 adalah himpunan tupel-tupel pasangan antara setiap $t_1(R_1)$ dan $t_2(R_2)$.

2.6.4. Gabungan (Union)

Operasi gabungan ditulis dengan simbol " $\cup$ " yaitu merupakan gabungan tupel-tupel dari dua atau lebih relasi yang diberikan sehingga untuk tupel yang sama hanya ditulis sekali saja.

2.6.5. Pengurangan (Set - Difference)

Operasi pengurangan ditulis dengan simbol " — " yaitu digunakan untuk mendapatkan suatu relasi dari tupel-tupel yang terdapat pada suatu relasi namun tidak terdapat pada relasi lain.

Misalnya : R — S

Artinya suatu relasi dengan atribut-atribut pada tupel-tupel R tetapi tidak memuat tupel-tupel S

Lebih jelas tentang operasi pokok dalam Aljabar Relasional perlu diperhatikan contoh sebagai berikut :

Contoh : 2.12

Diketahui dua relasi :

A	B	C
a	b	c
d	a	f
c	b	d

Relasi R

D	E	F
b	g	a
d	a	f

Relasi S

Dengan operasi pokok Aljabar Relasional membentuk relasi sebagai berikut :

1. Pilihan

$\Gamma_{B=b}$ (R)

A	B	C
a	b	c
c	b	d

2. Proyeksi

$\Pi_{A,c}$ (R)

A	C
a	c
d	f
c	d

3. Hasil ganda kartesius

R X S

A	B	C	D	E	F
a	b	c	b	g	a
a	b	c	d	a	f
d	a	f	b	g	a
d	a	f	d	a	f
c	b	d	b	g	a
c	b	d	d	a	f

Relasi R X S

4. Gabungan

$R \cup S$

a	b	c
d	a	f
c	b	d
b	g	a

5. Pengurangan

$R - S$

a	b	c
c	b	d

Operasi-operasi tambahan hanya untuk menyederhanakan operasi-operasi pokok. hal ini dijelaskan sebagai berikut:

2.6.6. Irisan.

Ditulis dengan lambang " $\cap$ ", misal R dan S adalah suatu relasi maka,

$$R \cap S = R - (R - S)$$

yaitu penyederhanaan dari operasi pengurangan.

2.6.7. Pembagian

Misal R dan S adalah relasi dengan sejumlah r dan s atribut, $r > s$. Maka yang dimaksud dengan pembagian dari $R \div S$ adalah himpunan tupel-tupel t dari $(r - s)$ atribut sedemikian sehingga semua tupel-tupel 1 dari s atribut dalam S, tl yaitu tupel t digabung tupel 1 berada dalam R.

Bila operasi pembagian dinyatakan dalam operasi pokok akan menjadi :

$$R \div S = \Pi_{1,2,..(r-s)}(R) - \Pi_{1,2,..(r-s)}((\Pi_{1,2,..(r-s)}(R) X\ S) - R)$$

penjelasannya adalah bahwa $\Pi_{1,2,..(r-s)}(R)$ memberikan semua tupel t dengan atribut-atribut 1,2,....(r-s) dari relasi R sedangkan $\Pi_{1,2,..(r-s)}((\Pi_{1,2,..(r-s)}(R)\ X\ S) - R)$ berfungsi menghilangkan tupel pada $\Pi_{1,2,..(r-s)}(R)$ yang tidak memuat tupel pada S.

2.6.8. Penggabungan (Join)

Merupakan operasi untuk menggabungkan

pemilihan pada operasi hasil ganda kartesius dalam satu operasi yang ditulis dengan simbol " $(X)_\theta$ ", dimana :

X = simbol hasil ganda kartesius

θ = simbol pilihan

Jadi misal R dan S adalah suatu relasi maka :

$$R\ (X)_\theta\ S\ =\ \Gamma_\theta\ (\ R\ X\ S\ )$$

2.6.9. Penggabungan Natural (Natural Join)

Operasi ini hanya memperhatikan pasangan tupel-tupel yang memiliki nilai sama pada suatu atribut. Yang ditulis dengan simbol " (X) ", misal R dan S adalah suatu relasi, $\{i_1,\ i_2,\ldots,\ i_m\}$ adalah gabungan atribut-atribut R dan S dan $\{\ A_1, A_2,\ \ldots . A_k\}$ adalah irisan atribut-atribut R dan S, maka :

$$R(X)S = \Pi_{i_1,\ldots i_m}(\Gamma_{RA_1 = SA_1 \wedge \ldots \wedge RA_k = SA_k}(RXS))$$

Contoh : 2.13

Pembagian dari R dan S bila :

a	b	c	d
a	b	e	f
b	c	e	f
e	d	c	d
e	d	e	f
a	b	d	e

Relasi R

c	d
e	f

Relasi S

r = 4

s = 2

maka :

a	b
b	c
e	d

Relasi $\Pi_{1,2}$ (R)

a	b	c	d
a	b	e	f
b	c	c	d
b	c	e	f
e	d	c	d
e	d	e	f

Relasi $\Pi_{1,2}$ (R) X S

b	c	c	d

Relasi $(\Pi_{1,2}(R) \times S) - R$

b	c

Relasi $\Pi_{1,2}((\Pi_{1,2}(R) \times S) - R)$

a	b
e	d

Relasi $\Pi_{1,2}(R) - \Pi_{1,2}((\Pi_{1,2}(R) \times S) - R)$

Jadi relasi $R \div S$ =

a	b
e	d

Contoh : 2.14

Penggabungan dari R dan S bila :

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Relasi R

D	E
3	1
6	2

Relasi S

dengan pilihan θ = B < D

maka :

R X S

A	B	C	D	E
1	2	3	3	1
1	2	3	6	2
4	5	6	3	1
4	5	6	6	2
7	8	9	3	1
7	8	9	6	2

Relasi R X S

$\Gamma_{B<D}(RXS)$

$= R(X)_{B<D} S$

A	B	C	D	E
1	2	3	3	1
1	2	3	6	2
4	5	6	6	2

Relasi $R\ (X)_{B<D}\ S$

Contoh : 2.15

Penggabungan Natural dari R dan S bila :

A	B	C
a	b	c
d	b	c
b	b	f
c	a	d

Relasi R

B	C	D
b	c	d
b	c	e
a	d	b

Relasi S

Atribut yang sama adalah B dan C

R (X) S

A	B	C	D
a	b	c	d
a	b	c	e
d	b	c	d
d	b	c	e
c	a	d	b

Relasi R (X) S

2.7. AKSIOMA HIMPUNAN TERBUKA

Ditentukan himpunan semesta U terdiri dari elemen yang tidak didefinisikan, dan 2^U adalah himpunan semua himpunan bagian dari U. selanjutnya didefinisikan suatu topologi τ untuk U dimana $\tau \subseteq 2^U$ jika dan hanya jika memenuhi aksioma-aksioma dibawah ini :

1. Apabila $G_i \in \tau$, untuk setiap $i \in I$ yaitu semua himpunan indek berhingga atau tak hingga maka : $\bigcup_i G_i \in \tau$.
2. Apabila $G_i \in \tau$, untuk setiap $i \in I$ yaitu

semua himpunan indek yang disyaratkan berhingga, maka : $\bigcap_i G_i \in \tau$.

3. $\emptyset \in \tau$ dan $U \in \tau$.

Contoh : 2.16

$U = \{ a,b,c \}$

$2^u = \{\emptyset ,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},U\}$

$\tau = \{ \emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},U \}$

aksioma 1 : $\emptyset \cup \{a\} \cup \{b\} \cup \{a,b\} \cup U = U$

aksioma 2 : $\emptyset \cap \{a\} \cap \{b\} \cap \{a,b\} \cap U = \emptyset$

aksioma 3 : $\emptyset \in \tau$ dan $U \in \tau$

Jadi τ adalah suatu topologi.

Himpunan semesta U yang dilengkapi dengan topologi τ membentuk ruang topologi (U,τ). Anggota-anggota U disebut titik dan anggota-anggota τ disebut himpunan terbuka.

2.7.1. Closed Set dan Closure

Definisi : 2.17

Suatu himpunan $F \subseteq U$ disebut closed (tertutup) jika dan hanya jika dapat ditentukan himpunan terbuka G sedemikian sehingga $F = G^c$.

Definisi : 2.18

Interseksi semua himpunan tertutup yang memuat E disebut closure dari E dengan notasi E^{+}.

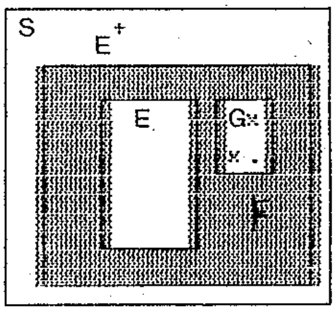
Karena E^{+} adalah interseksi dari himpunan tertutup maka E^{+} adalah himpunan tertutup dan merupakan himpunan tertutup terkecil yang memuat E. Selanjutnya didapat $A \subseteq B \Longrightarrow A^{+} \subseteq B^{+}$.

Teorema : 2.3

Titik $x \in E^{+}$ jika dan hanya jika setiap himpunan terbuka yang memuat x memotong E.

Bukti :

$\Longrightarrow$ Misal $x \in E^{+}$, hal ini memungkinkan $x \in E$ atau $x \notin E$. Jika $x \in E$ maka dengan sendirinya setiap himpunan terbuka G_x yang memuat x, sehingga $G_x \cap E = \emptyset$. Kemudian untuk $x \in E^{+}$ tetapi $x \notin E$, andaikan terdapat G_x sehingga $G_x \cap E = \emptyset$ maka : $G_x^c \supseteq E$ dan G_x^c adalah himpunan tertutup.



Misal $F = G_x^c \cap E^+$, maka F adalah tertutup dan memuat E , termuat dalam E^+ dan tidak memuat x, sehingga F adalah himpunan tertutup yang memuat E dan merupakan himpunan bagian sejati dari E^+, kontradiksi sebab E^+ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat E, sehingga pengandaian harus diingkar dan terbukti $G_x \cap E \neq \emptyset$.

$\Longleftarrow$ Misal $x \in G_x$ yaitu himpunan terbuka yang memuat x, dan $G_x \cap E = \emptyset$ maka $x \in E^c$, hal ini adalah kontraposisi dari implikasi diatas. Jadi $x \notin E$, sebab $E^c \cap E = \emptyset$.

□

2.7.2 Basis dan Sub Basis

Setelah didefenisikan suatu topologi τ

untuk semesta S sebagai himpunan bagian dari 2^S yaitu himpunan semua himpunan bagian dari S, sekarang akan didefenisikan keluarga $\beta \subseteq \tau$ sedemikian sehingga anggota-anggota lain dari τ dapat dibangun dari anggota-anggota β. Hal ini akan menguntungkan karena anggota-anggota β mempunyai bentuk yang sederhana atau jumlah anggota-anggota β lebih sedikit dari jumlah anggota-anggota τ.

Definisi : 2.19

Ditentukan ruang topologi (S,τ), maka $\beta \subseteq \tau$ disebut Basis untuk τ jika dan hanya jika setiap anggota τ dapat dibangun sebagai $\bigcup_i B_i$, dimana setiap $B_i \in \beta$ dan $i \in I$ dimana i adalah himpunan indek.

dengan simbol :

$(\forall G \in \tau)(\exists$ himpunan indek $I)$,

$G = \bigcup_i \{ B_i \mid i \in I \}$ dengan $B_i \in \beta$.

Definisi diatas equivalen dengan pengertian bahwa β adalah Basis untuk τ jika dan hanya jika untuk setiap $G \in \tau$ dan setiap $x \in G$ dapat ditemukan $B \in \beta$ sedemikian sehingga $x \in B \in \beta$.

Perlu diketahui bahwa setiap keluarga yang terdiri atas himpunan bagian 2^{s} merupakan basis untuk topologi dari S, hal ini akan dijelaskan dengan teorema berikut :

Teorema : 2.4

Misal β adalah keluarga terdiri atas himpunan-himpunan bagian dari semesta S dengan $S \neq \emptyset$, maka keluarga β merupakan Basis untuk suatu topologi dari S jika dan hanya jika memenuhi :

1. $S = \bigcup \{ B \mid B \in \beta \}$
2. Interseksi setiap dua anggota dari β adalah union dari anggota-anggota β, atau equivalen dengan setiap $B_1, B_2 \in \beta$ dan setiap $x \in B_1 \cap B_2$ dapat ditemukan suatu $B \in \beta$, sedemikian sehingga $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Bukti :

$\Longrightarrow$ Bila β adalah Basis suatu topologi dari S maka haruslah S merupakan union anggota-

anggota dari β, karena setiap $B \in \beta$ berada dalam S maka S adalah union semua anggota-anggotanya β yaitu : $S = \bigcup \{B \mid B \in \beta\}$ selanjutnya jika $B_1, B_2 \in \beta$ maka $B_1 \cap B_2$ open dan karena β basis maka $B_1 \cap B_2$ adalah union anggota-anggota dari β dengan demikian (1) dan (2) dipenuhi.

$\Longleftarrow$ Misal diambil keluarga dalam τ, semua himpunan bagian dari S dengan sifat bahwa setiap anggota keluarga itu merupakan union anggota-anggota dari β. kemudian dibuktikan τ merupakan suatu topologi untuk S.

i. Karena (1) dipenuhi maka :

$S = \bigcup \{ B \mid B \in \beta \}$ sehingga S memenuhi syarat keanggotaan dari τ.

ii. Misal $G_i \in \tau$ untuk setiap $i \in I$, karena syarat keanggotaan τ maka setiap G_i merupakan union dari anggota β sehingga $\bigcup_i G_i$ merupakan union dari anggota-anggota β.

iii. $\emptyset \in \tau$, karena $\emptyset = \bigcup \{B_i \mid B_i \in \beta,\ i \in I\}$

iv. Misal $G_1, G_2 \in \tau$ akan dibuktikan bahwa $G_1 \cap G_2 \in \tau$, sebab bila $x \in G_1 \cap G_2$ maka $x \in G_1$ dan $x \in G_2$.

Karena G_1, G_2 memenuhi syarat keanggotaan τ jadi merupakan union anggota-anggota β dan didapatkan :

$x \in G_1 \Longrightarrow (\exists\ B_1 \in \beta).x \in B_1 \subseteq G_1$

$x \in G_2 \Longrightarrow (\exists\ B_2 \in \beta).x \in B_2 \subseteq G_2$

sehingga $x \in B_1 \cap B_2$ dan karena syarat (2) dipenuhi maka ada $B \in \beta$ dengan $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. Kemudian dari $B_1 \cap B_2 \subseteq G_1 \cap G_2$ maka terbukti bahwa untuk setiap $x \in G_1 \cap G_2$ dan $B \in \beta$ sehingga $x \in B \subseteq G_1 \cap G_2$.

$$G_1 \cap G_2 = \bigcup \{ x \mid x \in G_1 \cap G_2\} \subseteq$$
$$\bigcup \{ B_x \in \beta \mid B_x \subseteq G_1 \cap G_2\} \subseteq$$
$$G_1 \cap G_2.$$

Sehingga $G_1 \cap G_2$ adalah union anggota-anggota dari β dan $G_1 \cap G_2 \in \tau$. □