## BAB II

## TEORI DASAR VALUASI

### 2.1 RELASI DAN PEMETAAN

#### 2.1.1 RELASI

DIFINISI 2.1.1.1 :

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu hubungan antara anggota-anggota A ke anggota-anggota B.

contoh 1:

A = {4,6,8,10}

B = {2,3,4}

antara anggota - anggota himpunan A dan anggota B diadakan relasi "habis dibagi".

contoh 2:

A = {Sumitro,Paimo,Hamzah}

B = {Amir,badu,Endang,Tono,Tini}

Dari anggota-anggota Himpunan A ke anggota-anggota Himpunan B diadakan relasi "ayah dari"

Cara menyajikan relasi ada beberapa cara,yaitu:

1.Dalam bentuk kaliamat.

Dari contoh diatas,

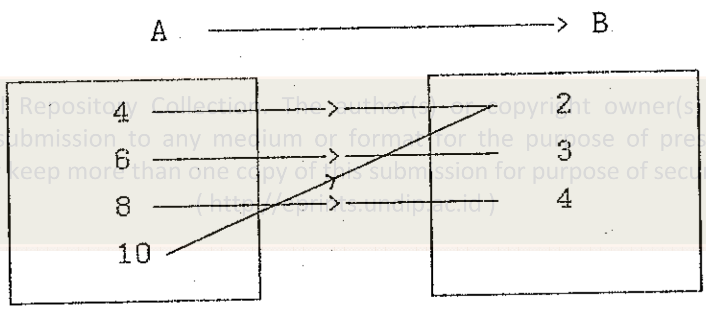
4 habis dibagi 2 dan 4

6 habis dibagi 2 dan 3

8 habis dibagi 2 dan 4

10 habis dibagi 2

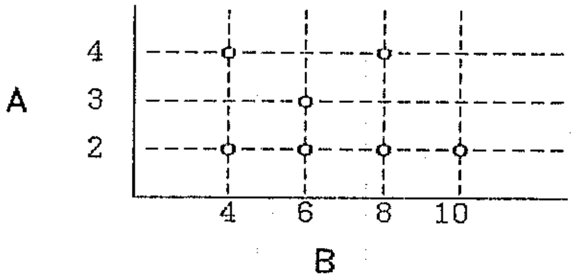
2.Dengan Diagram Panah.



3.Dengan Pasangan Berurutan.

{(4,2),(4,4),(6,2),(6,3),(8,2),(8,4),(10,2)}

4.Dengan Diagram Kartesius




Relasi yang melibatkan dua anggota dari semesta pembicaraan disebut dengan Relasi Biner.

Relasi ini ditulis dengan lambang :

$$a\ R\ b$$

$$\text{atau } r(a,b)$$

$$\text{atau } (a,b) \in R$$

yang dibaca "a berada dalam relasi R dengan b".

Dalam contoh diatas, R adalah relasi "habis dibagi" maka 10 R 2, 6 R 2, 6 R 3, 4 R 2, 4 R 4, 8 R 2, 8 R 4 tetapi (10,3) $\notin$ R , karena 10 tidak dibagi oleh 3.

2.1.1.1 <u>RELASI SIMETRI</u>

<u>DIFINISI 2.1.2</u>:

Relasi R disebut relasi simetri, jika dipenuhi :

$$a\ R\ b \Longrightarrow b\ R\ a$$

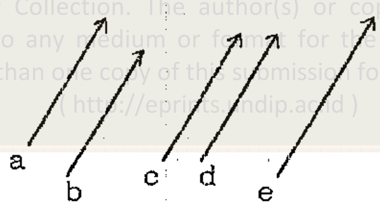
atau dalam lambang :

$$R \text{ simetri bhb } (\forall\ a,b\ ).a\ R\ b \Longrightarrow b\ R\ a$$

<u>Contoh 3</u>.

R adalah relasi kesejajaran garis-garis.





Tampak bahwa :

$a\ R\ b \implies b\ R\ a$

$b\ R\ c \implies c\ R\ b$

$a\ R\ c \implies c\ R\ a$ , dst

Jadi R adalah relasi simetri

Contoh 4

$S = \{1,2,3,4\}$ dengan $R = \{(1,3),(4,2),(2,4),(2,3),(3,1)\}$

$(1,3) \in R \implies (3,1) \in R$

$(4,2) \in R \implies (2,4) \in R$

$(2,3) \in R$ tetapi $(3,2) \notin R$

Tampak bahwa relasi R bukan merupakan relasi yang simetri, karena ada pasangan dari anggota-anggota S yang tidak berada dalam R.

### 2.1.1.2 RELASI REFLEKSIP

DEFINISI 2.1.3 :

Relasi R disebut relasi Refleksip jika untuk $\forall a \in S$ dipenuhi $a\ R\ a$. yaitu jika setiap anggota dari S dihubungkan atau direlasikan dengan dirnya sendiri. Dengan lambang :

$$R \text{ relasi Refleksip} \iff (\forall a \in S).a\ R\ a$$

Contoh 5:

A = { segitiga-segitiga } dan R adalah relasi "sebangun".Maka R adalah relasi Refleksip sebab setiap segitiga sebangun dengan dirinya sendiri.

Contoh 6:

A = { bilangan-bilangan Asli } dan R adalah relasi " < ".Maka relasi R bukan merupakan elasi yang refleksip, sebab $\forall a \in A$ tidak berlaku $a < a$ atau a tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh lain adalah R = "=" dari bilangan - bilangan Riil,Bulat dll.

## 2.1.1.3 RELASI TRANSITIP

DEFINISI 2.1.4 :

Relasi R disebut relasi Transitip jika untuk setiap Tripel $(a,b,c) \in S$ sedemikian hingga $a\ R\ b$ dan $b\ R\ c$ maka $a\ R\ c$.

Dengan lambang :

R Transitip bhb $(\forall\ a,b,c \in S).aRb$ dan $bRc \Longrightarrow aRc$

Contoh 7 :

Dari contoh 3 diatas,yaitu relasi "kesejajaran" garis-garis.maka relasi tersebut merupakan relasi yang Transitip,karena setiap tripel $(a,b,c) \in$ Himpunan garis-garis sejajar berlaku,

$$a \mathbin{/\!/} b \text{ dan } b \mathbin{/\!/} c \Longrightarrow a \mathbin{/\!/} c$$

Contoh 8 :

$\mathbb{Z}$ = {Bilangan-bilangan Bulat} dan diberikan relasi pada $\mathbb{Z}$ adalah R = "<".

$\forall\ a,b,c \in \mathbb{Z}$ $a < b$ dan $b < c \Longrightarrow a < c$

Jadi relasi "<" pada $\mathbb{Z}$ merupakan relasi yang Transitip.

Misal, $2 < 5$ dan $5 < 7 \Longrightarrow 2 < 7$

Jika sekurang-kurangnya ada satu tripel sedemikian hingga $a\ R\ b$ dan $b\ R\ c$ tetapi tidak berlaku $a\ R\ c$ maka relasi R resebut disebut relasi Non-Transitip.

Jika untuk setiap tripel sedemikian hingga berlaku $a\ R\ b$ dan $b\ R\ c$ maka $a \not R\ c$ maka relasi tersebut disebut relasi Intransitip.

## 2.1.1.4 RELASI EKUIVALENSI

DEFINISI 2.1.5 :

Suatu relasi R adalah merupakan relasi Ekuivalensi jika dipenuhi:

1. R Refleksip : $(\forall a \in S).a\ R\ a$
2. R Simetri : $(\forall a,b \in S).a\ R\ b \Longrightarrow b\ R\ a$
3. R Transitip : $(\forall a,b,c \in S).aRb$ dan $bRc \Longrightarrow aRc$

Contoh-contoh :

1. Relasi "kesejajaran" antara garis-garis lurus.
2. Relasi "sebangun" antara segitiga-segitiga dalam bidang datar.
3. Relasi "kesamaan" dalam himpunan bilangan-bilangan.
4. Relasi "Kongruensi modulo m" antara bilanganbulat yaitu $a \equiv b \bmod(m)$ yang didefinisikan :

   $$a \equiv b \bmod(m) \Longleftrightarrow a - b = k\, m$$

   dengan $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ ,sehingga km kelipatan m.

DALIL :

Suatu relasi Ekuivalensi dalam S, mengakibatkan adanya penggolongan dalam S yang saling asing. Dengan kata lain :

Relasi Ekuivalensi dalam S membagi s atas himpunan - himpunan bagian dari S yang saling asing.

Relasi Ekuivalensi membagi S atas himpunan-himpunan bagian yang tidak kosong yang disebut klas-las yang saling asing.Dengan kata lain:

Setiap anggota a dari S, pasti berada dalam salah satu klas Ekuivalensi dari S.

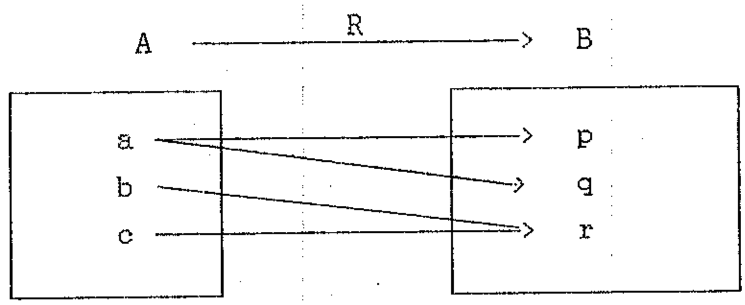
### 2.1.2 PEMETAAN

Suatu pemetaan atau mapping dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi dimana setiap anggota A dipetakan atau dipasangkan atau dikawankan dengan tepat satu anggota B. Dengan demikian pemetakan adalah suatu relasi yang fungsional atau disingkat fungsi saja. Maka pemetaan dari himpunan A ke himpunan B disebut juga Fungsi dari A ke B.

Jelas bahwa Pemetaan atau Fungsi tidak lain adalah suatu relasi yang khusus,dimana setiap anggota A harus dipasangkan dan pasangannya tidak boleh lebih dari satu anggota di B.Sehingga semua anggota A harus mempunyai pasangan dengan anggota B dan harus satu kawan. Seperti pada relasi, maka pemetaan itu juga mempunyai arah, ialah dari himpunan A ke himpunan B. Atau boleh juga sebaliknya.

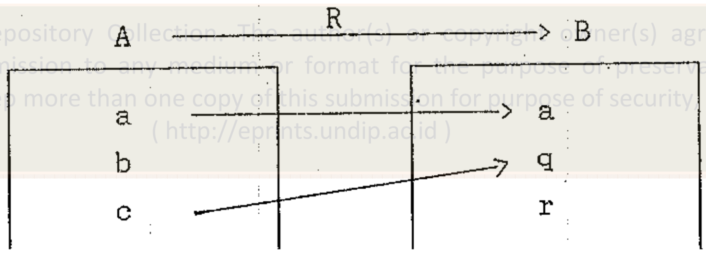
<u>Contoh - contoh :</u>

1.




R={(a,p),(a,q),(b,r),(c,r)},jadi relasi tersebut merupakan suatu pemetaan,karena ada anggota A yang dikawankan dengan lebih dari satu anggota B

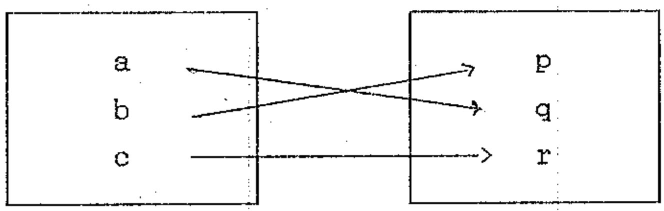
2.



Pada contoh tersebut bukan merupakan pemetaan karena ada anggota dari A yaitu $b \in A$ yang tidak dikawankan dengan anggota B

3.

$$A \longrightarrow B$$




$R = \{(a,q),(b,p),(c,r)\}$ , maka relasi R merupakan suatu pemetaan karena semua anggota dari A dikawankan dengan tunggal dengan anggota B

Jika elemen $a \in A$ dikawankan dengan elemen $p \in B$, maka dikatakan bahwa p adalah peta atau bayangan(image) dari a.

Pemetaan (fungsi) dari A ke B secara umum dapat ditulis dengan diagram panah sebagai berikut :

$$A \longrightarrow B$$

Dan dibaca dengan : " A dipetakan ke B "

Jika f suatu fungsi yang memetakan setiap elemen $x \in A$ ke $y \in B$, maka $f$ dapat ditulis :

$$f : x \longrightarrow y$$

Dan dibaca dengan : " $f$ memetakan $x$ ke y ", dimana y adalah bayangan dari $x$ oleh $f$. Sehingga dapat ditulis:

$$y = f(x)$$

Atau juga dapat ditulis dalam diagram panah :

$$x \longrightarrow f(x)$$

$y = f(x)$ difinisi dari pemetaan.

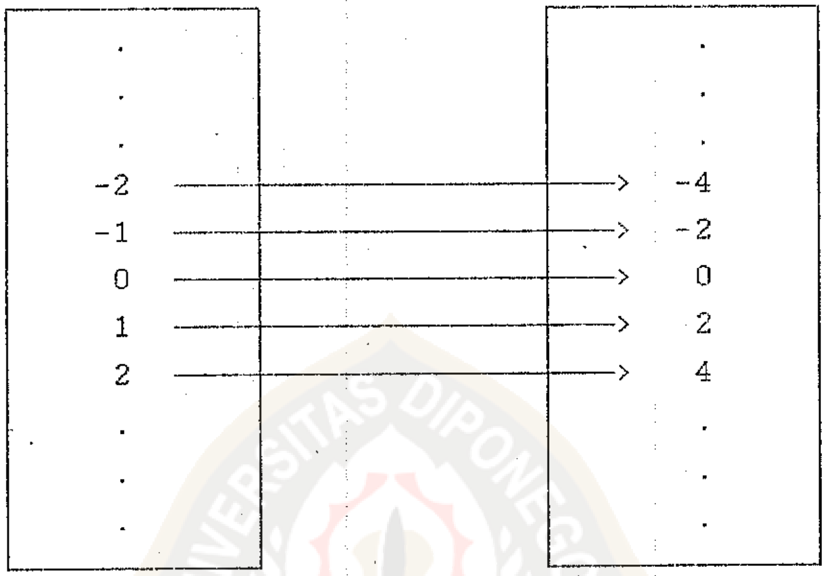
<u>Contoh</u> :

$\mathbb{Z}$ adalah himpunan dari bilangan-bilangan bulat.suatu fungsi dinyatakan dengan :

$$f : x \longrightarrow 2x \quad , \text{ dengan } x \in \mathbb{Z}$$

Sehingga pemetaan $f$ memetakan anggota-anggota dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$ seperti terlihat dalam diagram dibawah ini.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$




Dari contoh - contoh diatas, dapat disimpulkan bahwa syarat suatu fungsi itu adalah :

1. Adanya dua himpunan A dan B
2. Adanya suatu relasi dengan aturan :
   - Semua anggota dari Domain harus dikerjakan satu kali (dipetakan tepat satu kali)
   - Anggota-anggota pada Kodomain tidak harus dikerjakan semua dan kawannya pada domain boleh lebih dari satu.

Selanjutnya akan kita tinjau kembali beberapa jenis fungsi,yaitu :

1. <u>Fungsi into</u>

   $f$ adalah fungsi dari A Into B jika ada anggota dari B yang merupakan image dari anggota A.

   Sedang Range dari $f$ ialah himpunan image dari A yaitu $f(A)$ yang merupakan subset dari B.Dengan rumus $f(A) \subset B$

2. Fungsi Onto

Fungsi Onto atau biasa disebut dengan fungsi yang Surjektip .

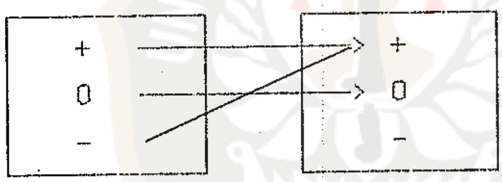
Jika setiap anggota dari B merupakan image dari sekurang-kurangnya satu anggota dari A, maka $f$ adalah fungsi dari A Onto B atau $f$ adalah mapping A Onto B.Dan ditulis dengan $f(A) = B$.

Fungsi atau pemetaan Onto terjadi jika setiap $b \in B$ menjadi kawan di A. Dengan rumus :

$f : A \longrightarrow B$ Onto bhb $(\forall\, b \in B)(\exists\, a \in A).f(a)=b$

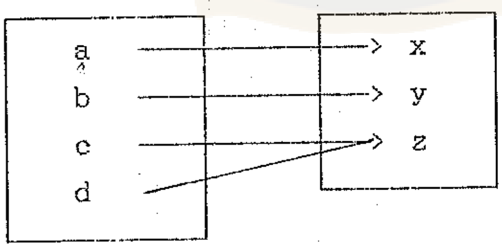
Contoh :

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2$



bukan fungsi onto, karena bilanga negatip dalam B tidak termasuk dalam range .

2. $\mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{B}$



merupakan funsi onto karena :

$f(A) = \{x,y,z\} = B$

3.Fungsi Injektip

Fungsi $f$ disebut fungsi Injektip atau funsi satu-satu dari A into B, jika untuk setiap dua anggota yang berlainan dalam A , mempunyai image yang berlainan dalam B. Dengan rumus :

$f : A \longrightarrow B$ Injektip jika $a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$

dan jika $a = b \Longrightarrow f(a) = f(b)$



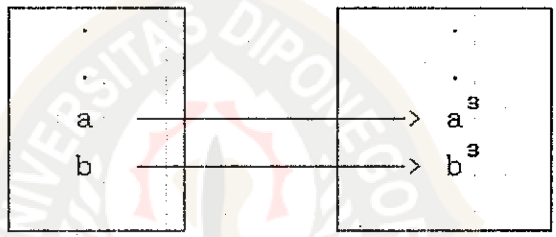
Contoh :

1. Diberikan suatu fungsi $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

bukan merupakan fungsi yang Injektip karena setiap kwadrat dari bilangan riil adalah positip sehingga $f(x) = f(-x)$ untuk $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Jadi $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$.

2. Diberikan suatu fungsi $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x^3$. Akan kita tunjukan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi yang Injektip.

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$




ambil sembarang image $x^3 \in \mathbb{R}$ , harus diselidiki apakah preimagenya tunggal.

misal $x^3 = r$ maka $x = \sqrt[3]{r}$ ,ternyata preimagenya tunggal. sehingga jika $a \neq b$ ====> $f(a) \neq f(b)$

Jadi $f$ merupakan funsi yang Injektip.Apakah $f$ Injektip Onto ?

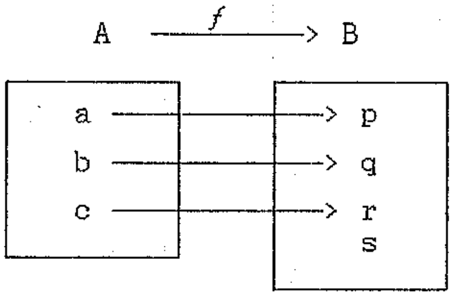
Ambil sembarang $x = \sqrt[3]{y}$ untuk semua y dalam kodomain. Ternyata selalu ada penyelesaian ,maka fungsidiatas merupakan fungsi yang Injektip onto

4. <u>Fungsi Bijektip</u>

Suatu fungsi $f$ disebut sebagai fungsi yang Bijektip, jika fungsi itu Surjektip dan Injektip.

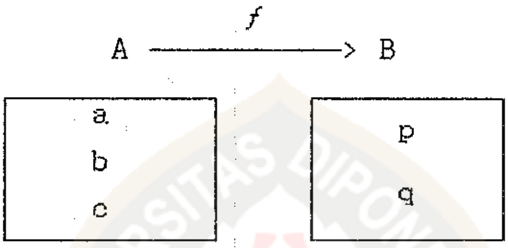
Contoh :

1.



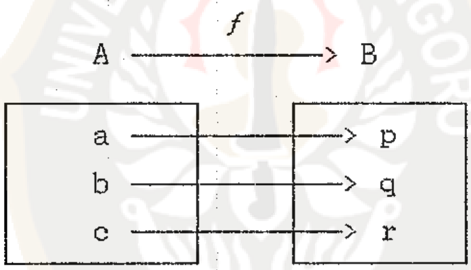

Imjektip tetapi tidak Surjektip jadi bukan Bijektip

2.




Surjektip tetapi tidak Injektip jadi bukan Bijektip

3.




Disamping Surjektip juga Injektip jadi Bijektip.

## 2.2 GROUP DAN RING

### 2.2.1 GROUP

DEFINISI 2.2.1 :

Suatu group G adalah suatu himpunan tidak kosong yang dengan suatu hukum komposisi yang di definisikan memenuhi sifat-sifat dibawah ini :

1. Tertutup ,yaitu untuk setiap dua elemen a dan b dialam G dapat ditemukan elemen c didalam G sedemikian hingga berlaku $a * b = c$.Dengan lambang :

$$(\forall\ a,b \in G)(\exists\ c \in G).a * b = c$$



2. Assosiatip, yaitu untuk setiap tripel $a,b,c \in G$ berlaku $(a * b)* c = a * (b * c)$ , dengan lambang

$$(\forall\ a,b,c \in G).\ (a * b) * c = a * (b * c)$$

3. Adanya elemen netral, yaitu adanya elemen $e \in G$

sedemikian hingga untuk setiap $a \in G$ berlaku :

$e * a = a * e = a$ . Dengan lambang :

$$(\exists\ e \in G)(\forall\ a \in G).e * a = a * e = a$$

4. Untuk setiap $a \in G$ mempunyai invers $a^{-1} \in G$ sedemikian hingga berlaku :

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Dengan lambang :

$$(\forall\ a \in G)(\exists\ a^{-1} \in G).a^{-1} * a = a * a^{-1}$$

Contoh 1 :

$\mathbb{Z}$ adalah himpunan dari bilangan-bilangan bulat dan diberikan aturan komposisi pada $\mathbb{Z}$ yaitu penjumlahan pada bilangan-bilangan. Akan kita tunjukan bahwa $\mathbb{Z}$ adalah suatu Group. Maka harus kita tunjukan bahwa $\mathbb{Z}$ mempunyai sifat :

1. Tertutup, jelas karena penjumlahan dari bilangan - bilangan bulat adalah bilangan bulat.
2. Assosiatip, jelas.

misal, $3,7,9 \in \mathbb{Z}$ ====> 3 + (7 + 9)=3 + 16=19

dan juga (3 + 7) + 9=10 + 9=19

====> 3 + (7 + 9)=(3 + 7) + 9

Jadi berlaku :

$$(\forall\ a,b,c \in \mathbb{Z}).a + (b + c) = (a + b) + c$$

3. Adanya elemen netral yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ , karena setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$ .
4. Setiap $a \in \mathbb{Z}$ mempunyai invers yaitu $-a \in \mathbb{Z}$ ,karena berlaku $-a + a = a + (-a) = 0$

Jadi terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ : himpunan bilangan-bilangan bulat adalah suatu Group.

contoh 2:

$R = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{Z}$ dan $b \neq 0\}$

Didefinisikan aturan komposisi pada R sbb :

$$(a,b) + (c,d) = (ad + bd,bd)$$

Maka R adalah suatu Group, karena aturan komposisi yang didefinisikan pada R memenuhi sifat :

- Tertutup, sebab :

  $\forall\ (a,b),(c,d) \in R \implies a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ dan $b,d \neq 0$

  Karena penjumlahan dan pergandaan dari bilangan - bilangan bulat menghasilkan bilangan - bilangan bulat pula, maka:

  $$ad + bc \in \mathbb{Z} \text{ dan } bd \in \mathbb{Z}$$

  Sehingga :

  $$(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd) \in R$$

  misal : $(2,3) + (1,5) = (10 + 3, 15) = (13,15) \in R$

  karena $13, 15 \in \mathbb{Z}$ dan $15 \neq 0$

- Assosiatip, jelas dari sifat tertutup pada $\mathbb{Z}$ maka

  $$\begin{aligned}(a,b) + [(c,d) + (e,f)] &= (a,b) + (cf + de, df)\\ &= (adf + b(cf + de), bdf)\\ &= (adf + bcf + bde, bdf)\end{aligned}$$

  $$\begin{aligned}[(a,b) + (c,d)] + (e,f) &= (ad + bc, bd) + (e,f)\\ &= (adf + bcf + bde, bdf)\end{aligned}$$

  Tampak bahwa $(a,b)+[(c,d)+(e,f)]=[(a,b)+(c,d)]+(e,f)$

- Adanya elemen netral, yaitu $(0,p) \in R$, $p \neq 0$ sebab

  $\forall\ (a,b) \in R \implies (a,b) + (0,p) = (ap,bp) = (a,b)$ .

  Menurut definisi kesamaan :

  $$(a,b) = (c,d) \iff ad = bc$$

  Sehingga $(ap,bp) = (a,b)$ karena $apb = bpa$.

- $\forall\ (a,b) \in R$ mempunyai invers yaitu $(-a,b)$ karena

  $(a,b) + (-a,b) = (ab - ab, b^2) = (0,b^2) = (0,p)$

Dengan demikian terbukti bahwa $R = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}$ , dan $b \neq 0\}$ adalah suatu Group.

<u>Contoh 3</u> :

$\mathbb{Z}$ terhadap aturan komposisi pergandaan biasa bukan merupakan Group , karena tidak setiap $a \in \mathbb{Z}$ mempunyai invers $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ .

misal ambil $6 \in \mathbb{Z}$ . Elemen satuan pada $\mathbb{Z}$ adalah 1 maka invers dari 6 adalah $\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z}$ .

DEFINISI 2.2.2 :

Suatu Group G dengan aturan komposisi yang didefinisikan pada G mempunyai sifat komutatip, yaitu

$$(\forall\ a,b \in G) \text{ berlaku } a * b = b * a$$

maka group G disebut sebagai group komutatip atau group abelian.

Contoh 4 :

Pada contoh 1 dan 2 diatas merupakan group abelian , karena aturan komposisinya memenuhi sifat komutatip.

Untuk contoh 1, $\forall\ a,b \in \mathbb{Z}$ =====> $a + b = b + a$

Untuk contoh 2, $\forall\ (a,b),(c,d) \in R$ berlaku :

$$(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$$

Suatu Group G dengan aturan komposisi $*$ , biasa dinyatakan dengan $(G,*)$ .

Contoh : $(\mathbb{Z} ,+)$ adalah suatu group dari himpunan bilangan-bilangan bulat dengan aturan komposisi penjumlahan (+).

## 2.2.2 RING

DEFINISI 2.2.3 :

Suatu Ring ialah suatu himpunan tidak kosong beserta dua hukum komposisi yang kita sajikan dengan tanda jumlahan dan pergandaan ( + dan .),memenuhi aksioma - aksioma dibawah ini :

I.R merupakan Group abelian terhadap penjumlahan,yaitu :

1.untuk semua $a,b \in R$ dapat ditemukan dengan tunggal elemen $c \in R$, sedemikian hingga $a + b = c$

$$(\forall\ a,b \in R)(\exists\ c \in R).a + b = c$$



2.untuk semua $a,b,c \in R$ , berlakulah $(a + b) + c =$

a + (b + c). Dengan lambang :

$$(\forall\ a,b,c \in R).(a + b) + c = a + (b + c)$$

3. Didalam R terdapat elemen 0 sedemikian hingga untuk setiap a dari R berlakulah 0 + a = a + 0= a

$$(\exists\ 0 \in R)(\forall\ a \in R).0 + a = a + 0 = a$$

4. Untuk setiap a $\in$ R dapat ditemukan elemen -a $\in$ R sedemikian hingga -a + a = a + (-a) = 0

$$(\forall\ a \in R)(\exists\ -a \in R).\ -a + a = a + (-a) = 0$$

5. Untuk $\forall$ a,b $\in$ R berlakulah a + b = b + a

$$(\forall\ a,b \in R).a + b = b + a$$

II. Pergandaan mempunyai sifat terutup dan assosiatip

1. Untuk semua a,b $\in$ R dapat ditemukan dengan tunggal elemen c $\in$ R, sedemikian hingga a b = c

$$(\forall\ a,b \in R)(\exists\ c \in R).a\ b = c$$

2. Untuk semua a,b $\in$ R berlakulah ab.c = a.bc

$$(\forall\ a,b \in R).(a\ b)\ c = a\ (b\ c)$$

III. Berlakunya hukum distributivitas pada kedua hukum komposisi diatas, yaitu :

1. $(\forall\ a,b,c \in R).a(b + c) = ab + bc$
2. $(\forall\ a,b,c \in R).(b + c)a = ba + ca$

<u>Contoh - contoh</u> :

1. Himpunan bilangan-bilangan riil terhadap jumlahan dan pergandaan aritmatik merupakan suatu ring dengan elemen 0 sebagai elemen netral terhadap jumlahan.
2. Himpunan bilangan-bilangan komplek terhadap jumlahan dan pergandaan aritmatik merupakan ring dengan elemen netralnya terhadap jumlahan adalah 0.
3. Himpunan bilangan-bilangan bulat modulo 6 terhadap jumlahan dan pergandaan modulo 6. Seperti diketahui dengan penjumlahan dan pergandaan modulo 6 dimaksud bahwa aturan jumlahan dan pergandaan modulo 6

sedemikian hingga dalam hasil jumlahan dan pergandaan itu, kelipatan-kelipatan 6 dilempar keluar.

Misal , $\overline{3} + \overline{6} = \overline{9} = 6 + 3 = \overline{3}$

$\overline{3}.\overline{6} = \overline{18} = 3.6 + 0 = \overline{0}$

## 2.3 FIELD,DAERAH INTEGRAL,DAERAH EUCLID DAN FIELD QUOTIENT

Klasifikasi dari Ring R:

I.Terhadap penjumlahan :

1.Tertutup,yaitu :

$$(\forall\ a,b \in R)(\exists\ c \in R).a + b = c$$

2.assosiatip,yaitu :

$$(\forall\ a,b,c \in R).a + (b + c) = (a + b) + c$$

3.Ada elemen netral,yaitu 0

$$(\exists\ 0 \in R)(\forall\ a \in R).a + 0 = 0 + a = a$$

4.Setiap elemen didalam R mempunyai invers didalam R

$$(\forall\ a \in R)(\exists\ -a \in R).-a + a = a + (-a) = 0$$

5.berlaku komutatip,yaitu :

$$(\forall\ a,b \in R).a + b = b + a$$

II.Terhadap pergandaan :

1.Tertutup,yaitu :

$$(\forall\ a,b \in R)(\exists\ c \in R).\ a.b = c$$

2.Assosiatip,yaitu :

$$(\forall\ a,b,c \in R).\ a(b.c) = (a.b)c$$

3.Ada elemen netral yaitu e $\in$ R,sedemikian hingga :

$$(\forall\ a \in R).a\ e = e\ a$$

4.Berlaku hukum komutatip, yaitu:

$$(\forall\ a,b \in R).\ a.b = b.a$$

5.Setiap elemen dari R mempunyai invers didalam R sedemikian hingga berlaku :

$$(\forall\ a \in R)(\exists\ a^{-1} \in R).a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$$

5'.Sistimnya tidak memuat pembagi nol sejati,yaitu:

jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka $a\,b \neq 0$, $\forall\, a,b \in R$

III. Berlaku hukum Distributivitas,yaitu :

1.($\forall$ a,b,c $\in$ R). $a(b + c) = ab + ac$

2.($\forall$ a,b,c $\in$ R). $(b + c)a = ba + ca$

## 2.3.1 FIELD

DEFINISI 2.2.4 :

Suatu Field adalah suatu struktur aljabar dengan dua hukum komposisi yang dinyatakan dengan penjumlahan dan pergandaan memenuhi aksioma-aksioma dibawah ini :

I.Terhadap penjumlahan merupakan group abelian.

Yaitu : I 1,2,3,4,5

II.Terhadap pergandaan merupakan group abelian

Yaitu : II 1,2,3,4,5

III.Berlakunya hukum distributivitas

.

Contoh-contoh :

1.Himpunan bilangan-bilangan riil,terhadap penjumlahan dan pergandaan aritmatika

2.Himpunan bilangan-bilangan komplek,terhadap pejumlahan dan pergandaan aritmatika

3.Himpunan bilangan-bilangan bulat $\{0, \pm1, \pm2, \pm3, ..\}$ bukanlah suatu field, karena disamping 0 ada elemen lain yang tidak mempunyai invers terhadap pergandaan .

## 2.3.2 DAERAH INTEGRAL

DEFINISI 2.2.5 :

D adalah suatu Daerah Integral, jika dipenuhi :

1. D adalah Ring Komutatip

2. Ada elemen satuan terhadap pergandaan

3. Tidak memuat pembagi nol sejati

1. Himpunan dari bilangan-bilangan riil,bulat,komplek
2. Setiap field adalah Daerah Integral. Ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

   F : field =====> F : Daerah Integral

   Kita tunjukan bahwa field F tidak memeuat pembagi nol sejati.

   Ambil dua elemen dari field F yang tidak sama dengan nol.

   Jadi harus ditunjukan bahwa $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka $a\,b \neq 0$

   Karena F - {0} terhadap pergandaan merupakan group maka :

   $$(\forall\ a\neq 0, b\neq 0 \in F)(\exists\ c \neq 0 \in F).a\,b = c \neq 0$$

   sehingga, $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ ====> $a\,b \neq 0$ ,ini berarti tidak ada p.n.s

   Jadi terbukti bahwa F adalah suatu Daerah Integral
3. Setiap Daerah Integral yang berhingga adalah suatu field (D :Daerah Integral berhingga ===>D :field )

   Ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

   Karena aksioma-aksioma dari Daerah Integral juga dipenuhi dalam field,kecuali tidak memuat p.n.s dan invers. Sehingga cukup ditunjukan bahwa setiap elemen dari Daerah Integral yang tidak sama dengan nol mempunyai invers terhadap pergandaan.

   $$D = \{\ \underbrace{0, e, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}}_{n}\}$$

   Pandang $D' = \{\ a\,x \mid x \in D\ \&\ x \neq 0\ \}$ dimana a sembarang elemen dari D

   Misal $D' = \{\ a_1e, a_1a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_{n-2}\}$ , karena D adalah Daerah Integral maka pergandaannya tertutup

   Ditunjukan bahwa banyaknya anggota dari D'= anggota dari D - {0}.

ambil $a_i$ , $a_j$ , $a_k$ . $a_i \neq a_j$ ====> $a_i\ a_j = a_i\ a_k$

$$a_i\ a_j = a_i\ a_k \implies a_j = a_k$$

$$a_i\ a_j - a_i\ a_k = a_i\ a_k - a_i\ a_k$$

$$a_i\ a_j - a_i\ a_k = 0$$

Karena berlaku distributip ====> $a_i(a_j - a_k) = 0$

Karena $a_i \neq 0$ dan D tidak memuat p.n.s ,

maka $a_j - a_k = 0$ ===> $a_j - a_k + a_k = a_k$

===> $a_j = a_k$

Dengan demikian benar bahwa banyaknya elemen dari D adalah anggota dari D - {0}, hanya mungkin urutanya yang berlainan.

Salah satu elemen dari D adalah elemen satuan e, maka a x = e, a ≠ 0 dan x ≠ 0, sehingga :

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ dan } x \text{ saling invers} \\ a \neq 0 \end{array}\right\} \implies \forall\, a \neq 0 \in D \text{ punya invers}$$

Jadi terbukti bahwa Daerah Integral yang berhingga adalah suatu field.

## 2.3.3 DAERAH EUCLID

DEFINISI 2.2.6 :

D adalah Daerah Euclid, jika dipenuhi :

1. D adalah Daerah Integral
2. Ada fungsi $g : D - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sedemikian hingga berlaku :

   $g(a\ b) \geq g(a)$ untuk $\forall\ a,b \in D - \{0\}$
3. Ada algoritma pembagian :

   jika $a,b \in D$ dan $a \neq 0$ maka :

   $(\exists\ q,r \in D)(b = qa + r)$ dengan r=0 atau g(r)<g(0)



Contoh-contoh :

1.F : Field adalah suatu Daerah Euclid, ini dapat ditunjukan sebagai berikut :

- Dari contoh diatas jelas bahwa F suatu field maka F adalah suatu Daerah Integral.
- didefinisikan $g : F - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dengan rumus $g : x \in F - \{0\} \longrightarrow 0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- Ambil sembarang $a, b \in F$ , $a \neq 0$

  Karena $a \neq 0 \in F$ maka a mempunyai invers $a^{-1} \in F$ sehingga ,

  $$b = eb = (a\, a^{-1})b = (a^{-1}b)a + 0$$
  $$= q\, a + 0$$

  dengan $q = a^{-1}b$ dan $r = 0$ , maka terdapatlah algoritma pembagian . Dan dengan demikian terbuktilah bahwa F field maka F Daerah Euclid.

2. $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan-bilangan riil.Dan didefinisikan fungsi :

$$g : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$
$$g : x \longrightarrow |x|$$

Jelas bahwa $\mathbb{R}$ adalah suatu field maka $\mathbb{R}$ adalah Daerah Integral.

Untuk setiap $x \in \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow |x| \geq 0$ , maka : fungsi tersebut memetakan elemen-elemen dari $\mathbb{R} - \{0\}$ ke $\mathbb{R}$ positip.

Jadi $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow g(x) = |x| \geq 0$

Algoritma pembagian berlaku untuk $\forall\, a,b \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$b > a \Longrightarrow b = q\, a + r \text{ dng } |r| \leq |a|$$

misal $5,2 \in \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow 5 = 2.2 + 1$ dimana bahwa $|1|=1 < 2=|2|$

Dengan demikian terbukti bahwa $\mathbb{R}$ :himpunan bilangan-bilangan riil adalah suatu Daerah Euclid.

3. Jika F field maka F[x] adalah suatu Daerah Euclid.

- F field maka F[x] adalah field,sehingga F[x] adalah suatu Daerah Integral pula.
- Didefinisikan fungsi :

dengan runus :

$g : f(x) \longmapsto \deg\{f(x)\}$

ambil sembarang $f(x), h(x) \in F[x] - \{0\}$

misal, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ dg $a_n \neq 0$

$h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$ dg $b_m \neq 0$

maka :

$f(x).h(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2$

$+ \ldots + a_n\, b_mx^{n+m}$

untuk m > n maka ;

$g\{f(x).h(x)\} = \deg\{f(x).h(x)\}$

$= m + n \geq n = \deg\{f(x)\} = g\{f(x)\}$

jadi $g\{f(x).h(x)\} \geq g\{f(x)\}, \forall\, f(x), h(x) \in F[x] - \{0\}$

- Algoritma pembagian berlaku, yaitu :

  $\exists\, q(x), r(x) \in F[x] - \{0\}$ sedemikian hingga berlaku $h(x) = q(x).r(x) + r(x)$ dengan $r(x) = 0$ atau $g(r(x)) < g(f(x))$

  maka terbukti ;

  F : field =====> F[x] adalah Daerah Euclid

Kesimpulannya : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ adalah suatu Daerah Euclid.

### 2.3.4 FIELD QUOTEINT UNTUK DAERAH INTEGRAL

Pandang : D adalah Daerah Integral

Ambil $S = \{(a,b) \mid a,b \in D$ dan $b \neq 0\}$

Didefinisikan suatu relasi sbb:

$(a,b)\ R\ (c,d) \iff a\,d = b\,c$

Akan ditunjukan bahwa relasi ini adalah relasi yang Ekuivalensi. Yaitu relasi yang memenuhi simetri, refleksip dan transitip.

1. Relasi R adalah relasi yang Refleksip, sebab :

   ambil sembarang $(a,b) \in S$ maka berlaku :

$$a\ b = b\ a \text{ atau } (a,b)\ R\ (a,b)$$

Jadi terbukti bahwa relasi R adalah relasi yang Refleksip

2. Relasi R adalah relasi yang simetris.

   ambil sembarang $(a,b)$ dan $(c,d) \in S$ sedemikian hingga $(a,b)\ R\ (c,d)$, maka $a\ d = b\ c$

   Karena $a,b,c,d \in D$ maka berlakulah komutatip, sehingga $c\ b = d\ a$, sehingga $(c,d)\ R\ (a,b)$ .Jadi terbukti bahwa relasi tersebut merupakan relasi yang simetri.

3. Relasi R adalah relasi yang Transitip.

   Ambil sembarang $(a,b),(c,d),(e,f) \in S$ sedemikian hingga $(a,b)\ R\ (c,d)$ dan $(c,d)\ R\ (e,f)$

   Dari $(a,b)\ R\ (c,d)$ berarti $a\ d = b\ c$ .............1

   Dari $(c,d)\ R\ (e,f)$ berarti $e\ f = d\ e$ .............2

   Dari 1, didapat $adf = bcf$

   Dari 2, didapat $cfb = deb$ , sehingga akan didapat

   $$adf = bde$$

   $$adf - bde = 0$$

   $$d(af - be) = 0$$

   Karena tak ada p.n.s pada D dan $d \neq 0$ maka :

   $$af - be = 0 \implies af = be$$

   $$\implies (a,b)\ R\ (e,f)$$

   $$\text{Jadi } \left.\begin{array}{l}(a,b)\ R\ (c,d)\\(c,d)\ R\ (e,f)\end{array}\right\} \implies (a,b)\ R\ (e,f)$$

   Jadi terbukti bahwa relasi tersebut merupakan relasi yang Transitip. Dan dengan demikian terbukti bahwa relasi R merupakan relasi Ekuivalensi.



Karena relasi pada S merupakan relasi yang Ekuivalensi, maka menurut teori himpunan maka himpunan S terpecah atas klas-klas yang saling asing. Sekarang pandang U adalah koleksi dari klas-klas Ekwivalensi pada S.Yaitu :

$U = \{[a,b],[c,d],[e,f],\ldots\ldots,[0,a],\ldots,[a,a],\ldots\ldots\}$

atau $U = \{[a,b] \mid a,b \in D \text{ dan } b \neq 0\}$

Didefinisikan aturan komposisi pada U sbb :

$$[a,b] + [c,d] = [ad + bc,bd]$$

$$[a,b].[c,d] = [ac,bd]$$

Akan dibuktikan bahwa U merupakan Field :

I.Terhadap penjumlahan,

1.Terutup, jelas

2.Assosiatip dipenuhi, sebab :

untuk sembarang $[a,b],[c,d],[e,f] \in U$ , berlaku

$([a,b] + [c,d]) + [e,f] = [a,b] + ([c,d] + [e,f])$

bukti :

$$\begin{aligned}([a,b] + [c,d]) + [e,f] &= [ad + bc,bd] + [e,f]\\ &= [(ad + bc)f + bde,bdf]\\ &= [adf + bcf + bde,bdf]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[a,b] + ([c,d] + [e,f]) &= [a,b] + [cf + df,df]\\ &= [adf + b(cf + de),bdf]\\ &= [adf + bcf + bde,bdf]\end{aligned}$$

Jadi $([a,b]+[c,d]) + [e,f]=[a,b] + ([c,d]+[e,f])$

3.Ada elemen netral,yaitu $[0,a]$. sebab :

$$\begin{aligned}[x,y] + [0,a] &= [xa + y0,ya]\\ &= [xa,ya] = [x,y]\end{aligned}$$

4.Setiap $[a,b]$ mempunyai invers, yaitu $[-a,b]$.sebab

$$\begin{aligned}[-a,b] + [a,b] &= [-ab + ab,b^2]\\ &= [0,b^2] = [0,a]\end{aligned}$$

5.Komutatip dipenuhi, sebab :

$$\begin{aligned}[a,b] + [c,d] &= [ad + bc,bd]\\ &= [da + cb,db]\\ &= [c,d] + [a,b]\end{aligned}$$

Jadi $[a,b] + [c,d] = [c,d] + [a,b]$ (komotatip)

II.Terhadap pergandaan,

1.Tertutup dipenuhi,jelas.

2.Assosiatip dipenuhi,sebab :

$$[a,b]([c,d].[e,f]) = [a,b].[ce,df]$$
$$= [ace,bdf]$$
$$= [ac,bd].[e,f]$$
$$= ([a,b].[c,d])[e,f]$$

Jadi $[a,b]([c,d].[e,f]) = ([a,b].[c,d])[e,f]$

3.Ada elemen satuan yaitu $[p,p]=[a,a]=[q,q]= \ldots.$ sebab, $[a,b].[p,p] = [ap,bp] = [a,b]$ ( dari definisi kesamaan )

4.Setiap $[a,b]$ yang tidak sama dengan $[0,p]$ pasti punya invers, yaitu $[b,a]$. Sebab dari definisi kesamaan $[a,b].[b,a] = [ab,ba] = [p,p]$

5.Komutatip dipenuhi, sebab :

$$[a,b].[c,d] = [ac,bd]$$
$$= [ca,db] = [c,d].[a,b]$$

III.Distributivitas dipenuhi, sebab :

$$[a,b]([c,d] + [e,f]) = [a,b].[cf + de,df]$$
$$= [acf + ade,bdf]$$

$$[a,b][c,d] + [a,b][e,f] = [ac,bd] + [ae,bf]$$
$$= [acbf + bdae,b^2df]$$

Dari definisi kesamaan, maka :

$[acbf + bdae,b^2df] = [acf + dae,bdf] \Longleftrightarrow (acbf+ bdae )bdf = b^2df(acf + dae) \Longleftrightarrow acdb^2f^2 + b^2d^2aef = b^2f^2dac + b^2d^2aef$

Jadi $[a,b]([c,a] + [e,f])=[a,b][c,d] + [a,b][e,f]$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan :

$$([c,d] + [e,f])[a,b] = [c,d][a,b] + [e,f][a,b]$$

Dengan demikian terbuktilah bahwa U merupakan suatu field dan disebut dengan field quoteint dari Daerah Integral D.

Untuk contoh-contohnya dapat diambil sebagai Daerah Integralnya adalah himpunan bilangan-bilangan bulat, himpunan bilangan-bilangan riil dan aturan komposisinya adalah penjumlahan dan pergandaan aritmatika.

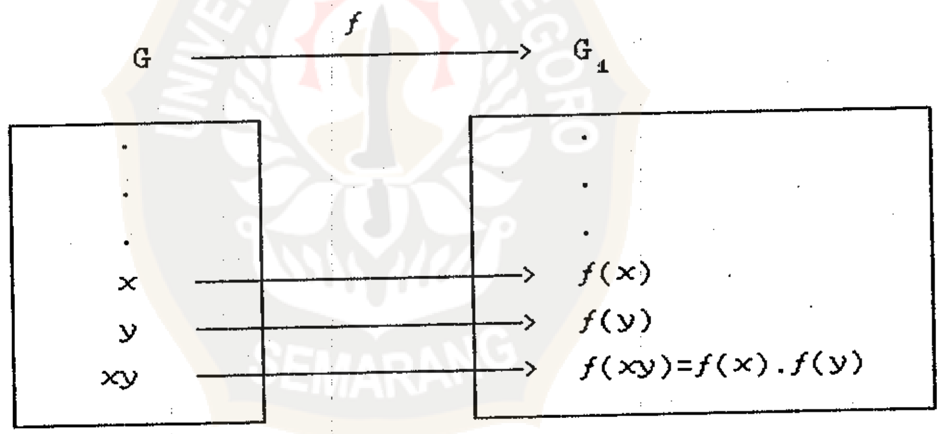
## 2.4 HOMOMORPHISMA

DEFINISI 2.2.7 :

Jika G dan $G_1$ adalah Group-group dan $f : G \longrightarrow G_1$ adalah suatu pemetaan yang memenuhi :

$$f(a\ b) = f(a).f(b) \text{ untuk } \forall\ a,b \in G$$

maka pemetaan $f$ disebut pemetaan Homomorphisma group.




Contoh :

Ambil $G = \mathbb{Z}$ :himpunan bilangan-bilangan bulat

$G_1 = \mathbb{Z}$ :himpunan bilangan-bilangan bulat

deberikan $f : G \longrightarrow G_1$ , maka

$f : x \longmapsto |x|$

$f$ adalah pemetaan, sebab :

$$x \longmapsto f(x) = |x|$$

$$y \longmapsto f(x) = |y|$$

Jika $x = y$ , maka $|x| = |y|$ , sehingga $f(x) = f(y)$ untuk $\forall\ x,y \in \mathbb{Z}$

$f(x + y) = |x + y|$ belum tentu sama dengan $|x| + |y|$ sehingga $f(x + y)$ belum tentu sama dengan $f(x) + f(y)$,untuk $\forall\ x,y \in \mathbb{Z}$ . Jadi pemetaan $f$ bukan suatu

2.Ambil $G = \mathbb{Z}$ dan $G_1 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ = himpunan bilangan-bilangan bulat modulo 6.

$$\overline{0} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid k.6 + 0 \} = 0 + [6]$$

$$\overline{1} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid k.6 + 1 \} = 1 + [6]$$

dst

$$\overline{5} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid k.6 + 5 \} = 5 + [6]$$

dimana $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\ldots\ldots$

Aturan komposisi pada $G_1$ adalah : $\overline{a}.\overline{b} = \overline{a.b}$

Didefinisikan relasi $f : G \longrightarrow G_1$

$$f : x \longmapsto \overline{x}$$

maka $f$ adalah suatu pemetaan, sebab :

Jika $x = y \Longrightarrow x + [6] = y + [6]$

$$\Longrightarrow \overline{x} = \overline{y}$$

$$\Longrightarrow f(x) = f(y)$$

$f$ adalah Homomorphisma, sebab :

$$f(xy) = \overline{x\,y} = \overline{x}.\overline{y}$$

$$= f(x).f(y) \text{ , } \forall\, x,y \in G$$

<u>THEOREMA 2.2.8</u> :

Bayangan Homomorphisma $G_1 = f(G)$ dari group G karena pemetaan $f$ merupakan suatu Group.

Pada Homomorphisma ini elemen netral e dari Group G dibawa ke elemen netral $e' \in G_1$. Sedangkan invers dari group G dibawa ke invers dari bayangannya.

$$G \longrightarrow G_1$$

$$\begin{array}{ccc}
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
x & \longrightarrow & f(x) \\
y & \longrightarrow & f(y) \\
xy & \longrightarrow & f(x).f(y) \\
e & \longrightarrow & f(e) = e' \\
x^{-1} & \longrightarrow & f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}
\end{array}$$

Karena $G_1 = f(G)$ maka pemetaannya adalah surjektip dari $G$ ke $G_1$. Sehingga $a_1 \in G_1$ maka $a_1$ mempunyai kawan di $G$ misal $a \in G$, sehingga $a \longmapsto f(a) = a_1$ demikian juga $b \in G$ sehingga $b \longmapsto f(b) = b_1$.

Akan kita tunjukan bahwa $G_1$ merupakan group. Demikian :

1. Karena G group maka,

   $a,b \in G \Longrightarrow ab \in G$, sehingga $f(a\,b) \in G_1$. Tetapi $f(a\,b) = f(a).f(b) = a_1b_1 \in G_1$. Sehingga sifat tertutupnya $G_1$ terpenuhi.

2. Ambil sembarang $a_1, b_1, c_1 \in G_1$ yang mempunyai kawan - kawan $a,b,c \in G$. Karena G group maka dengan sifat assosiatipnya ,

$$\begin{aligned} ab.c = a.bc &\Longrightarrow f(ab.c) = f(a.bc) \\ &\Longrightarrow f(ab).f(c) = f(a).f(bc) \\ &\Longrightarrow (f(a).f(b)).f(c) = f(a)(f(b).f(c)) \\ &\Longrightarrow (a_1.b_1)c_1 = a_1(b_1.c_1) \end{aligned}$$

   Dengan demikian $G_1$ memenuhi sifat assosiatip.

3. Ambil sembarang $a_1 \in G_1$ ,maka :

$$a \longmapsto a_1 = f(a)$$

   Karena G group maka $ea = a$, sehingga :

$$\begin{aligned} f(ea) = f(a) &\Longrightarrow f(e).f(a) = f(a) \\ &\Longrightarrow e_1\,a_1 = a_1 \end{aligned}$$

   Dengan demikian terlihat bahwa $e_1 = f(e)$ merupakan elemen netral dari $G_1$.

4. Ambil sembarang $a_1 \in G_1$ , Karena G group maka ada $a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $a^{-1}a = e$, sehingga :

$$f(a^{-1}a) = f(e) \Longrightarrow f(a^{-1}).f(a) = f(e)$$

   Karena $f(e)$ elemen netral dari $G_1$, maka terlihat bahwa $f(a^{-1})$ adalah invers dari $f(a)$.

Dengan demikian terbukti bahwa $G_1 = f(G)$ adalah Group.

Perhatikan bahwa jika G group abelian maka $G_1$ pun juga merupakan group abelian.

Ambil $a_1, b_1 \in G_1$ =====> $ab \in G$ ===> $f(ab) = f(a).f(b)$

karena G abelian =====> $ab = ba$, sehingga $f(ab)=f(ba)$ $= f(b).f(a) = b_1 a_1$

Dengan demikian terlihat bahwa untuk $\forall\ a_1, b_1 \in G_1$ berlaku $a_1 b_1 = b_1 a_1$ . Jadi $G_1$ adalah group abelian.

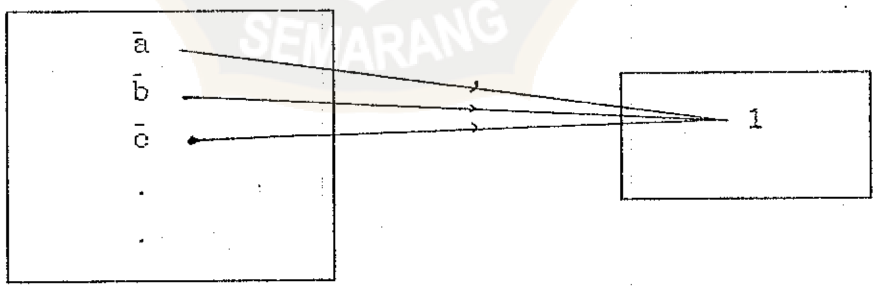
Perlu diperhatikan bahwa Theorema diatas tidak dapat dibalik ,yaitu apabila $G \longrightarrow f(G) = G_1$ merupakan pemetaan Homomorphisma sedangkan $G_1$ merupakan group, maka belum tentu bahwa G merupakan group juga.

contoh :

Ambil G adalah himpunan vektor-vektor $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}, \ldots\ \}$ dimana aturan komposisi pada group G adalah cross product , sedangkan $G_1 = \{1\}$ dengan aturan komposisi pergandaan .

Didefinisikan pemetaan $g: G \longrightarrow G_1$ sbb

$$g : \bar{a} \longrightarrow g(\bar{a}) = 1$$




maka pemetaan $g : G \longrightarrow G_1$ adalah suatu Homomorphisma, karena :

$$g(\bar{a} \times \bar{b}) = g(\bar{c}) = 1 = 1.1 = g(\bar{a}).g(\bar{b})$$

$G_1 = \{\ 1\ \}$ terhadap pergandaan adalah suatu group, sedangkan G bukan group.



THEOREMA 2.2.9 :

Jika g Homomorphisma $G \longrightarrow g(G) = g_1$

$H'$ subgroup dari $G'$ ===> $g^{-1}(H') = H$ subgroup dari G

Bukti :

Ambil $a,b \in H$ ====> $g(a) = a'$ dan $g(b) = b'$ didalam $H'$

$g(ab) = g(a).g(b) = a'b'$ karena g adalah Homomorphisma.

Kerena $H'$ sungroup dan $a',b' \in H'$ ===> $a'b' \in H'$ sehingga $ab \in H$.

Jadi $a,b \in H$ ======> $ab \in H$....... 1

ambil $a \in H$ =====> $a' = g(a) \in H'$

karena $H'$ subgroup =====> $(g(a))^{-1} \in H'$

=====> $g(a^{-1}) \in H'$

=====> $a^{-1} \in H$

Jadi $a \in H$ =====> $a^{-1} \in H$ .......... 2

Dari 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa H adalah subgroup.