BAB II

KONSEP DASAR

2.1 PERSAMAAN DIFFERENSIAL PARSIEL LINIER DENGAN KOEFFESIEN KONSTAN.

Pandang sebuah persamaan differensial parsiel linier dengan koeffesien konstan

$$F(D,D')z = f(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

Dengan $F(D,D') = \sum_r \sum_s c_{rs} D^r D'^s$

dan c_{rs} merupakan konstan dan $D = \frac{\partial}{\partial x}$, $D' = \frac{\partial}{\partial y}$,

Maka bentuk persamaan differensial parsiel linier homogennya adalah

$$F(D,D')z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2)$$

yang dikenal sebagai fungsi komplementer.

Setiap penyelesaian persamaan (2.1) disebut sebuah particular integral persamaan (2.1).

Theorema 2.1

Jika u merupakan fungsi komplementer dan z_1 sebuah particular integral sebuah persamaan differensial parsiel linier, maka $u + z_1$ merupakan penyelesaian umum dari persamaan.

Bukti :

Karena persamaan (2.1) dan (2.2) sejenis, penyelesaian $u + z_1$ akan memuat jumlah yang tepat dari elemen sembarang yang merupakan penyelesaian

(2.1). Maka

$F(D,D')u = 0$

$F(D,D')z_1 = f(x,y)$

Sehingga $F(D,D')(u + z_1) = f(x,y)$

membuktikan bahwa $u + z_1$ merupakan penyelesaian persamaan (2.1).

Theorema 2.2

Jika $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_n$, merupakan pe - nyelesaian - penyelesaian persamaan differensial parsiel linier homogen $F(D,D')z = 0$, maka

$$\sum_{r=1}^{n} c_r u_r$$

dengan c_r merupakan konstanta sembarang, juga me rupakan sebuah penyelesaian.

Bukti :

Karena $F(D,D')(c_r u_r) = c_r F(D,D') u_r$

dan

$$F(D,D') \sum_{r=1}^{n} \nu_r = \sum_{r=1}^{n} F(D,D') \nu_r$$

untuk setiap himpunan fungsi ν_r, maka

$$F(D,D') \sum_{r=1}^{n} c_r u_r = \sum_{r=1}^{n} F(D,D')(c_r u_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} c_r F(D,D') u_r$$

$$= 0$$

2.1.1 PERSAMAAN OPERATOR DIFFERENSIAL LINIER YANG DAPAT DISEDERHANAKAN.

Operator differensial linier $F(D,D')$ dapat dibagi dua jenis :

- $F(D,D')$ yang dapat disederhanakan, yaitu $F(D,D')$ yang dapat dituliskan sebagai produk faktor linier berbentuk $D + a D' + b$, dengan a dan b konstanta.
- $F(D,D')$ yang tak dapat disederhanakan, yaitu $F(D,D')$ yang tak dapat dituliskan sebagai bentuk diatas.

Contoh :

Operator $D^2 - D'$ dapat ditulis sebagai $(D + D')(D - D')$, jadi dapat disederhanakan. Sedangkan $D^2 - D'$ tak dapat dipecah menjadi faktor - faktor linier, jadi tak dapat disederhanakan.

Theorema 2.3

Jika operator $F(D,D')$ dapat disederhanakan, maka order - order dalam faktor linier yang ada tidaklah penting.

Bukti :

Theorema akan terbukti jika dibuktikan bahwa

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)(\alpha_s D + \beta_s D' + \gamma_s)$$
$$= (\alpha_s D + \beta_s D' + \gamma_s)(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

untuk setiap operator yang dapat disederhanakan. Sehingga dapat dituliskan sebagai

$$F(D,D') = \prod_{r=1}^{n} (\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) \quad \ldots.(2.4)$$

Pembuktian theorema ini jelas karena hasil perkalian ruas kiri sama dengan hasil persamaan ruas kanan yaitu :

$$\alpha_r \ \alpha_s \ D^2 + (\alpha_s \ \beta_r + \alpha_r \ \beta_s) D D' +$$

$$\beta_r \ \beta_s \ D'^2 + (\gamma_s \ \alpha_r + \gamma_r \ \alpha_s) D +$$

$$(\gamma_s \ \beta_r + \gamma_r \ \beta_s) D' + \gamma_r \ \gamma_s$$

Theorema 2.4

Jika $\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r$ merupakan sebuah faktor dari F(D,D') dan $\phi_r(\xi)$ merupakan sebuah fungsi sembarang dari variabel ξ, maka jika $\alpha_r \neq 0$,

$$u_r = \exp \left(- \frac{\gamma_r x}{\alpha_r} \right) \phi_r (\beta_r x - \alpha_r y)$$

merupakan sebuah penyelesaian persamaan

$F(D,D')z = 0$

Bukti :

Dengan mendefferensialkan

$$u_r = \exp \left(- \frac{\gamma_r x}{\alpha_r} \right) \phi_r (\beta_r x - \alpha_r y)$$

didapat

$$D u_r = - \frac{\gamma_r}{\alpha_r} u_r + \beta_r \exp \left(- \frac{\gamma_r x}{\alpha_r} \right) \phi' (\beta_r x - \alpha_r y)$$

$$D' u_r = - \alpha_r \exp \left(- \frac{\gamma_r x}{\alpha_r} \right) \phi' (\beta_r x - \alpha_r y)$$

Sehingga

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) u_r = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$

Dengan theorema (2.3) didapat

$$F(D,D')\, u_r = \left\{ \prod_{s=1}^{n} (\alpha_s D + \beta_s D' + \gamma_s) \right\}$$

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) u_r$$

untuk s = r maka

$$F(D,D')\, u_r = \left\{ \prod_{s=1}^{n} (\alpha_s D + \beta_s D' + \gamma_s) \right\} u_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.6)$$

Gabungkan (2.5) dan (2.6) sehingga didapat

$F(D,D')\, u_r = 0$

Maka terbuktilah.

Theorema 2.5

Jika $\beta_r D' + \gamma_r$ adalah faktor dari $F(D,D')$ dan $\varnothing_r(\xi)$ adalah sebuah fungsi sembarang dari variabel tunggal ξ, maka jika $\beta_r \neq 0$,

$$u_r = \exp - \frac{\gamma_r y}{\beta_r} \, . \, \varnothing_r(\beta_r x)$$

adalah sebuah penyelesaian dari persamaan

$F(D,D') = 0$

Bukti :

Pecah $F(D,D')$ kedalam faktor - faktor linier didapat faktor - faktor perkalian jenis penyelesaian, dari faktor - faktor jenis ini didapat dengan theorema (2.4) dan (2.5) , misal n = 2 untuk mencari penyelesaian

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)^2 z = 0$$

Ambil $Z = (\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) z$

Maka $(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) Z = 0$

Dengan theorema (2.4) didapat penyelesaian

$$Z = \exp \left(- \frac{\gamma_r x}{\alpha_r} \right) \emptyset_r(\beta_r x - \alpha_r y)$$

jika $\alpha_r \neq 0$

Untuk mendapatkan fungsi yang berkaitan dengan z diselesaiakan persamaan differensial parsiel linier order satu berbentuk

$$\alpha_r \frac{\partial z}{\partial x} + \beta_r \frac{\partial z}{\partial y} + \gamma_r z = e^{- \gamma_r x/\alpha_r} \emptyset_r(\beta_r x - \alpha_r y)$$

Yang mempunyai persamaan - persamaan auxiliari dengan penyelesaian

$\beta_r x - \alpha_r y = c_1$, substitusikan penyelesaian ini kedalam persamaan auxiliari

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{dz}{- \gamma_r z + e^{- \gamma_r x/\alpha_r} \emptyset_r(c_1)}$$

yang merupakan persamaan linier berorder satu dengan penyelesaian

$$z = \frac{1}{\alpha_r} \left\{ \emptyset_r(c_1) x + c_2 \right\} e^{- \gamma_r x/ \alpha_r}$$

Sehingga penyelesaian yang dicari adalah

$$z = \left\{ x \emptyset_r(\beta_r x - \alpha_r y) + \gamma_r (\beta_r x - \alpha_r y) \right\} e^{- \gamma_r x/ \alpha_r}$$

Secara umum dapat dikatakan bahwa

1. Jika $(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)^n$ $(\alpha_r \neq 0)$ merupakan sebuah faktor dari F(D,D') dan jika fungsi ϕ_{r1}, ϕ_{r2}, ..., ϕ_{rn} merupakan fungsi sembarang, maka penyelesaian F(D,D') = 0 adalah

$$\exp\left(-\frac{\gamma_r x}{\alpha_r}\right)\sum_{s=1}^{n} x^{s-1}\, \phi_{rs}(\beta_r x - \alpha_r y)$$

2. Jika $(\beta_r D' + \gamma_r)^m$ merupakan faktor F(D,D') dan jika fungsi - fungsi ϕ_{r1}, ..., ϕ_{rm} fungsi sembarang maka penyelesaian F(D,D')z = 0 adalah

$$\exp\left(-\frac{\gamma_r y}{\beta_r}\right)\sum_{s=1}^{n} x^{s-1}\, \phi_{rs}(\beta_r x)$$

Contoh :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$$

Persamaan ini dapat dituliskan sebagai

$(D - D')(D + D')\, z = x - y$

Sehingga persamaan komplementernya adalah

$\phi_1(x + y) + \phi_2(x - y)$

dengan ϕ_1 dan ϕ_2 sembarang

Dengan integral particularnya adalah

$z_1 = (D + D')\, z$ ....(2.7)

Maka persamaan untuk z_1 adalah

$(D - D')\, z_1 = x - y$

yang merupakan persamaan linier order satu yang merupakan penyelesaian

$$z_1 = \frac{1}{4}(x - y)^2 + f(x + y)$$

dengan f fungsi sembarang. Karena hanya dicari sebuah integral particular maka $f \equiv 0$. Substitusikan nilai z_1 kedalam persamaan (2.7) sehingga didapat persamaan untuk integral particular adalah

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{4}(x - y)^2$$

yang penyelesaiannya adalah

$$z = \frac{1}{4} x (x - y)^2 + f(x - y)$$

dengan f fungsi sembarang.

Ambil $f \equiv 0$ didapat integral particularnya

$$z = \frac{1}{4} x (x - y)^2$$

Sehingga penyelesaian umum persamaan dapat dituliskan sebagai

$$z = \frac{1}{4} x (x - y)^2 + \emptyset_1(x + y) + \emptyset_2(x - y)$$

dengan $\emptyset_1$ dan $\emptyset_2$ fungsi sembarang

2.1.2 PERSAMAAN OPERATOR DIFFERENSIAL LINIER YANG TAK DAPAT DISEDERHANAKAN

Jika $F(D,D')$ tak dapat tersederhanakan tak selalu bisa didapat sebuah penyelesaian dengan bilangan penuh dari fungsi sembarang tapi dapat dibangun sebuah penyelesaian yang memuat sebanyak konstanta sembarang yang diperlukan.

Theorema 2.6

$$F(D,D')\, e^{ax + by} = F(a,b)\, e^{ax + by}$$

Bentuk persamaan jelas $F(D,D')$ dibangun dari ben tuk $c_{rs}\, D^r\, D'^s$ dan

$D^r(e^{ax+by}) = a^r\, e^{ax+by}$,

$D'^s(e^{ax+by}) = b^s\, e^{ax+by}$

Sehingga

$(c_{rs}\, D^r\, D'^s)(e^{ax+by}) = c_{rs}\, a^r\, b^s\, e^{ax+by}$

Theorema 2.7

$$F(D,D')\left\{ e^{ax+by}\, \emptyset(x,y) \right\} = e^{ax+by}\, F(D+a\,,\, D'+b)\, \emptyset(x,y)$$

Dengan theorema Leibnitz

$$D^r(e^{ax}\,\emptyset) = \sum_{\rho=0}^{r} {}^rC_\rho\, (D^\rho\, e^{ax})(D^{r-\rho}\,\emptyset)$$

$$= e^{ax}\left(\sum_{\rho=0}^{r} {}^rC_\rho\, a^\rho\, D^{r-\rho} \right)\emptyset$$

$$= e^{ax}\,(D+a)^r\,\emptyset$$

Untuk menentukan fungsi komplementer persamaan jenis $F(D,D')z = f(x,y)$, operator - operator $F(D,D')$ dipecah menjadi faktor - faktor. Faktor-faktor yang dapat disederhanakan dipecah dengan metode yang dapat disederhanakan. Faktor yang tak dapat tersederhanakan diselesaikan sebagai berikut. Dengan theorema (2.6) didapat e^{ax+by} merupakan penyelesaian dari $F(D,D')z = 0$.

Sehingga didapat $F(D,D') = 0$, sehingga

$$z = \sum_r c_r \exp(a_r\, x + b_r\, y)$$

dengan a_r , b_r , c_r merupakan konstanta - konstanta, dengan a_r , b_r, c_r bisa didapat dengan persamaan

$$F(a_r\ ,\ b_r) = 0$$

Contoh dengan demikian dapat dibangun persamaan homogen

$$F(D,D')z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

yang memuat konstanta - konstanta sebanyak yang dibutuhkan.

Contoh

Buktikan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t}$

mempunyai penyelesaian

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\ nx - \varepsilon_n\ )\ e^{-k n^2 t}$$

Tampak jelas bahwa $e^{ax + bt}$ merupakan sebuah penyelesaian hanya jika $a^2 = \frac{b}{k}$ dan relasi ini terpenuhi jika diambil $a = \pm\ in$, $b = -k n^2$

Untuk mendapatkan integral particular persamaan

$f(D,D')z = f(x,y)$

secara simbol dapat dituliskan

$$z = \frac{1}{f(D,D')}\ f(x,y)$$

Contoh

Carilah integral particular dari persamaan

$(\ D^2 - D')z = 2y - x^2$

Dituliskan diatas menjadi

$$z = \frac{1}{D^2 - D'}\ (\ 2y - x^2\ )$$

Sehingga

$$\frac{1}{D^2 - D'} = -\left(1 - \frac{D^2}{D'}\right)^{-1} \frac{1}{D'}$$

$$= -\frac{1}{D'} - \frac{D^2}{D'^2} - \frac{D^4}{D'^3} - \ldots\ldots\ldots$$

$$z = -\frac{1}{D'}\ (2y - x^2) - \frac{1}{D'^2} D^2\ (2y - x^2)$$

$$= -y^2 + x^2y + \frac{1}{D^2}\ (2)$$

$$= x^2y$$

Bila $f(x,y)$ dibuat dari bentuk - bentuk exp $(ax + by)$ maka didapat sebuah integral par - ticular yang dibentuk dari

$$\frac{1}{F(a,b)} \exp\ (ax + by)$$

kecuali jika $F(a,b) \equiv 0$

2.2 PERSAMAAN DIFFERENSIAL LINIER ORDER DUA

2.2.1 Persamaan differensial order dua dikatakan lini - er jika dapat ditulis sebagai

$$D^2y + p(x)\ Dy + q(x)\ y = r(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.9)$$

Ciri - ciri persamaan ini adalah linier dalam fungsi a- nu y dan turunannya, sedangkan p, q, r merupakan fung - si sembarang dari x.

Jika $r(x) \equiv 0$ yaitu $r(x) = 0$ untuk semua harga x maka persamaan (2.9) menjadi

$$D^2y + p(x)\ Dy + q(x)\ y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.10)$$

dan dikatakan homogen.

Jika sebaliknya, yaitu jika $r(x) \neq 0$ maka (2.9) dikatakan non homogen.

Contoh

Persamaan differensial linier non homogen

$y'' + 4y = e^{-x} \sin x$,ditulis juga

$D^2y + 4y = e^{-x} \sin x$

Persamaan differensial linier homogen

$(1 - x^2)\, y'' - 2\, xy' + 6y = 0$, ditulis juga

$(1 - x^2)\, D^2y - 2\, x\, Dy + 6y = 0$

Fungsi p dan q dalam persamaan (2.9) dan (2.10) disebut koeffesien dari persamaan.

Persamaan differensial berorder dua yang tak dapat ditulis sebagai bentuk persamaan (2.9) dikatakan sebagai non linier.

Contoh

$y''\, y + y' = 0$

$y'' = \sqrt{y'^2 + 1}$

2.2.2 PERSAMAAN HOMOGEN DENGAN KOEFFESIEN KONSTAN

Pandang persamaan differensial linier homogen

$$D^2y + c_1\, Dy + c_2\, y = 0 \quad \text{.........................(2.11)}$$

dengan c_1 dan c_2 elemen riel. Pandang persamaan differensial linier order satu

$D'y + k\, y = 0$

yang punya penyelesaian $y = e^{-kx}$

dengan bentuk umumnya $y = e^{\lambda x}$ ....(2.12)

(2.12) dapat menjadi penyelesaian (2.11) dengan memberikan harga λ yang tepat. Substitusikan (2.12) kedalam (2.11) maka turunannya adalah

$$Dy = \lambda \, e^{\lambda x}$$

dan $$D^2y = \lambda^2 \, e^{\lambda x}$$

Sehingga persamaan (2.11) dapat dituliskan sebagai

$$(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2) \, e^{\lambda x} = 0$$

Akibatnya $\lambda^2 + c_1 \lambda + c_2 = 0$ ....(2.13)

Persamaan (2.13) disebut persamaan karakteristik dengan akar - akarnya adalah

$$\lambda_1 = \frac{- c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4 c_2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{- c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4 c_2}}{2}$$

Akar - akar ini tergantung pada $c_1^2 - 4 c_2$

- Jika $c_1^2 - 4 c_2 > 0$ maka terdapat dua akar riel tertentu
- Jika $c_1^2 - 4 c_2 < 0$ maka terdapat dua akar kom - pleks sekawan
- Jika $c_1^2 - 4 c_2 = 0$ maka terdapat sebuah akar kembar

Dua akar riel tertentu

Dengan $c_1^2 - 4 c_2 > 0$ maka akan tercatat a - kar λ_1 dan λ_2 sehingga akar basisnya adalah

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

Maka penyelesaian umum persamaan ini

$$y = c_3\, e^{\lambda_1 x} + c_4\, e^{\lambda_2 x}$$

Contoh

Pandang persamaan $y'' + y' - 2y = 0$

Persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

dengan akar - akar riel ini maka penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_3\, e^{x} + c_4\, e^{-2x}$$

Dua akar kompleks sekawan

Dengan $c_1^2 - 4c_2 < 0$ maka akar $c_1^2 - 4c_2$ akan memberikan bilangan kompleks $\pm$ iw dengan

$$w = \sqrt{c_2 - \frac{1}{4} c_1^2}\;,\text{ sehingga}$$

$$\lambda_1 = \frac{-1}{2} c_1 + iw$$

$$\lambda_2 = \frac{-1}{2} c_1 - iw$$

Pandang fungsi exponensial kompleks e^z dengan variabel kompleks $z = s + ih$ yang terdefinisikan dengan

$$e^z = e^{s + ih}$$

$$= e^s (\cos h + i \sin h) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.14)$$

Untuk $z = \lambda_1 x = \frac{-1}{2} c_1 x + iwx$ dan

$z = \lambda_2 x = \frac{-1}{2} c_1 x - iwx$

dari (2.14) didapat

$$s = \frac{-1}{2} c_1 x$$

$h = wx$ serta $h = -wx$

Sehingga fungsi exponensial kompleks menjadi

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-c_1 x/2} (\cos wx + i \sin wx)$$

$$Y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-c_2 x/2} (\cos wx - i \sin wx)$$

Dengan menambahkan dan mengurangkan maka didapat nilai y_1 dan y_2 yaitu

$$\frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) = e^{-c_1 x/2} \cos wx = y_1$$

$$\frac{1}{2i}(Y_1 - Y_2) = e^{-c_1 x/2} \sin wx = y_2$$

Maka akar basisnya adalah

$$y_1 = e^{-c_1 x/2} \cos wx$$

$$y_2 = e^{-c_1 x/2} \sin wx$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y = e^{-c_1 x/2} (A \cos wx + B \sin wx) \text{.........} (2.15)$$

Contoh :

Diketahui $y'' - 2 y' + 10y = 0$

Persamaan karakteristiknya $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

Dengan akar $\lambda_1 = 1 + \sqrt{1 - 10} = 1 + 3i$

$\lambda_2 = 1 - 3i$

memberikan akar basis

$$y_1 = e^x \cos 3x$$

$y_2 = e^x \sin 3x$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$y = e^x$ (A cos 3x + Bi sin 3x)

Sebuah akar kembar

Dengan $c_1^2 - 4 c_2 = 0$ maka didapat

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = - \frac{1}{2} c_1$

Sehingga akar basisnya

$y_1 = y_2 = e^{-c_1 x/2}$; $x e^{-c_1 x/2}$

Contoh :

Pandang $y'' + 8 y' + 16y = 0$

Maka persamaan karakteristiknya $\lambda = e^{-4}$

Yang akar basisnya e^{-4x}

$x e^{-4x}$

dan penyelesaian umumnya

$Y = (c_5 + c_6 x) e^{-4x}$

2.2.3 MASALAH NILAI AWAL

Dalam persamaan berorder dua terdapat dua konstanta sembarang sehingga dibutuhkan dua syarat yang dapat dituliskan sebagai

$$\left. \begin{array}{l} y(x_0) = K_0 \\ y'(x_0) = K_0 \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots (2.16)$$

dengan $x = x_0$ merupakan titik awal dan K_0 dan K_1 merupakan sebuah bilangan. Syarat (2.16) disebut syarat - syarat awal yang dikenal membentuk masalah nilai awal.

Contoh

Dari persamaan differensial linier homogen yang mempunyai akar persamaan karakteristik λ_1 dan λ_2 elemen riel. Dengan penyelesaian umum

$y = c_7\ e^{x} + c_8\ e^{-2x}$

Diketahui mempunyai nilai awal

$y(0) = 4$

$y'(0) = 1$

$y(0) = c_7\ e^{0} + c_8\ e^{-2.0}$

$\quad = c_7 + c_8 = 4$

$y'(0) = c_7\ e^{0} - 2\ c_8\ e^{-2.0}$

$\quad = c_7 - 2\ c_8 = 1$

Maka didapat $c_7 = 3$

$c_8 = 1$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y(x) = 3\ e^{x} + e^{-2x}$$

Contoh

Diketahui persamaan $y'' - 2\ y' + 10\ y = 0$

dengan syarat awal $y(0) = 4$

$y'(0) = 1$

Penyelesaian umum persamaan

$y = e^{x}\ (\ A \cos 3x + B \sin 3x\ )$

$y(0) = A = 4$

$y'(0) = e^{x}\ (\ A \cos 3x + B \sin 3x - 3A \sin 3x + 3B \cos 3x\ )$

$\quad = A + 3B = 1$

$B = -1$

Sehingga penyelesaian

$y = e^{x} (4 \cos 3x - \sin 3x)$

Contoh

Diketahui persamaan $y'' - 4 y' + 4y = 0$

dengan syarat awal $y(0) = 3$

$y'(0) = 1$

Penyelesaian umum persamaan

$y(x) = (c_9 + c_{10}x)\ e^{2x}$

$y(0) = c_9 = 3$

$y'(0) = c_{10}\ e^{2x} + 2\ (c_9 + c_{10}x)\ e^{2x}$

$= c_{10} + 2.3 = 1$

$c_{10} = 1 - 6 = 5$

2.2.4 MASALAH NILAI BATAS

Dalam penerapan maka ada beberapa syarat - syarat berbentuk

$y(P_1) = k_1$

$y(P_2) = k_2$

Sehingga konstanta - konstanta persamaan differensial penyelesaian umumnya dapat dicari harganya. Hal ini dikenal dengan syarat - syarat batas. Yaitu sesuai dengan titik ujung P_1 , P_2 , ..., P_n dari keadaan masalahnya.

Contoh

Selesaikan persamaan $y'' + y = 0$

dengan nilai batas $y(0) = 3$

$y(\pi/2) = 1$

Penyelesaian dasar persamaan adalah $y_1 = \cos x$

$$y_2 = \sin x$$

Maka penyelesaian umumnya adalah

$y(x) = c_{11} \cos x + c_{12} \sin x$

Syarat batas kiri $y(0) = c_{11} = 3$

Syarat batas kanan memberikan

$y(\pi/2) = c_{11} \cos \pi/2 + c_{12} \cdot 1 = 1$

Sedangkan $\cos \pi = 0$ dan $c_{12} = 1$

sehingga penyelesaian umumnya adalah

$y = 3 \cos x + \sin x$

2.3 DERET FOURIER DAN INTEGRAL FOURIER

2.3.1 DERET FOURIER

Deret Fourier dalam interval symetris $-L$, L berbentuk fungsi f(x) yang didefinisikan

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{L} x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad \ldots .(2.17)$$

dengan n merupakan integer positif. Gandakan (2.17) dengan $\cos (m\pi x/L)\, dx$, dan hasilnya diintegralkan antara $-L$ dan L maka koeffesien

$$A_o = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx$$

Gandakan persamaan (2.17) dengan $\sin n\pi x/L\, dx$ dan hasilnya diintegralkan $-L$ dan L maka didapat

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.18)$$

Expansikan deret Fourier dalam bentuk fungsi f(x) tidak tergantung apakah bentuk sinus , cosinus atau keduanya. Tetapi hanya tergantung apakah fungsi itu ganjil atau genap atau tidak kedua - duanya.

Fungsi genap yaitu fungsi yang memenuhi $f(x) = f(-x)$. Contoh x^2, $\cos nx$, $x \sin x$. Jika fungsi $f(x)$ adalah fungsi genap maka

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(x) \cos(n\pi x/L) = f(-x) \cos(-n\pi x/L)$$

$$f(x) \sin(n\pi x/L) = - f(-x) \sin(-n\pi x/L)$$

Sehingga

$$A_o = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{0}^{L} f(x)\, dx + \int_{-L}^{0} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{0}^{L} f(x)\, dx - \int_{0}^{-L} f(x)\, dx$$

Selanjutnya, misal $x = -w$ maka

$$\int_{0}^{-L} f(x)\, dx = - \int_{0}^{L} f(-w)\, dw$$

$$= - \int_{0}^{L} f(w)\, dw$$

$$= - \int_{0}^{L} f(x)\, dx$$

Sehingga

$$A_o = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x)\, dx$$

Begitu pula untuk A_n . Untuk B_n dicari sebagai berikut

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ \sin \frac{n\pi}{L}\ x\ dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \sin \frac{n\pi}{L}\ x\ dx - \int_{0}^{-L} f(x)\ \sin \frac{n\pi}{L}\ x\ dx$$

Untuk fungsi genap suku kedua ruas kanan

$$-\int_{0}^{L} f(x)\ \sin \frac{n\pi}{L}\ x\ dx = +\int_{0}^{L} f(-w)\ \sin \frac{-n\pi}{L}\ w\ dw$$

$$= -\int_{0}^{L} f(x)\ \sin \frac{n\pi}{L}\ x\ dx$$

Maka

$$B_n = -\frac{1}{L}\left[\int_{0}^{L} f(x)\ \sin \frac{n\pi}{L}\ x\ dx - \int_{0}^{L} f(x)\ \sin \frac{n\pi}{L} x\ dx\right]$$

$$= 0$$

Akibatnya jika f(x) fungsi genap maka

$$A_o = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ dx$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \cos \frac{n\pi}{L}\ x\ dx$$

$$B_n = 0$$

Fungsi f(x) ganjil yang didefinisikan dengan $f(x) = -f(-x)$. Contoh : x , x^3 , $\sin nx$, $x^2 \sin mx$, $x \cos nx$. Dan secara umum didapat

$$A_o = 0$$

$$A_n = 0$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \sin \frac{n\pi}{L}\ x\ dx$$

Harga - harga A dan B dikenal sebagai rumusan Euler

$$A_o = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx \qquad (n = 1,2,\ldots\ldots)$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx \qquad (n = 1,2,\ldots\ldots)$$

$$\ldots\ldots(2.19)$$

Contoh : Akan dicari deret Fourier yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = 0 \quad \text{jika} \quad -2 < x < -1$$

$$= k \quad \text{jika} \quad -1 < x < 1 \qquad p = 2L = 4$$

$$L = 2$$

$$= 0 \quad \text{jika} \quad 1 < x < 2$$

Jawab

Dari (2.19) didapat

$$A_o = \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} k\, dx = \frac{k}{2}$$

$$A_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \cos \frac{n\pi}{2} x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} k \cos \frac{n\pi}{2} x\, dx$$

$$= \frac{2k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

Jadi $A_n = 0$ jika n genap dan

$$A_n = \frac{2k}{n\pi} \qquad \text{jika } n = 1,5,9,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = \frac{-2k}{n\pi} \qquad \text{jika } n = 3,7,11,\ldots\ldots\ldots$$

Dari (2.19) didapat

$$B_n = 0 \qquad \text{untuk } n = 1,2,\ldots\ldots\ldots$$

Sehingga hasilnya

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} x - \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

2.3.2 INTEGRAL FOURIER

Dengan memasukkan nilai - nilai rumusan Euler (2.19) yaitu A dan B maka deret Fourier dari f_L menja - di

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(\nu)\, d\nu + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-L}^{L} f_L(\nu) \cos w_n\nu \, d\nu + \sin w_n x \int_{-L}^{L} f_L(\nu) \sin w_n\nu \, d\nu \right]$$

Dengan mengambil

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n$$

$$= \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

Maka $\frac{1}{L} = \frac{\Delta w}{\pi}$, dan deret Fourier dapat dituliskan sebagai

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(\nu)\, d\nu + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos w_n x)\, \Delta w \int_{-L}^{L} f_L(\nu) \cos w_n\nu \, d\nu + (\sin w_n x)\, \Delta w \int_{-L}^{L} f_L(\nu) \sin w_n\nu \, d\nu \right] \ldots\ldots\ldots\ldots (2.20)$$

Bentuk ini berlaku setiap harga L sembarang besar asal berhingga.

Sekarang misal $L \longrightarrow \infty$ dan assumsikan bahwa hasilnya merupakan fungsi non periodik

$$f(x) = \lim_{L \longrightarrow \infty} f_L(x)$$

yang dapat diintegralkan secara absolut sepanjang sumbu x yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right| dx$$

Maka $\frac{1}{L} \longrightarrow 0$ dan nilai ruas pertama sisi kanan dari persamaan (2.20) mendekati nol begitu pula

$\Delta w = \frac{\pi}{L} \longrightarrow 0$ sehingga persamaan (2.20) dapat diintegralkan dari 0 ke ∞ yaitu

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) \cos w\nu \, d\nu + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) \sin w\nu \, d\nu \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.21)$$

Dengan mengambil notasi

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) \cos w\nu \, d\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.22)$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) \sin w\nu \, d\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.23)$$

Maka persamaan (2.21) dapat dituliskan sebagai

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left[A(w) \cos wx + B(w) \sin wx \right] dw$$

2.4 PERSAMAAN BESSEL (FUNGSI BESSEL JENIS PERTAMA)

Salah satu persamaan differensial yang penting dalam matematika terapan adalah persamaan differensial Bessel yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$x^2\, y'' + x\, y' + (x^2 - v^2)\, y = 0 \quad \text{...............(2.24)}$$

dengan penyelesaiannya adalah sebagai berikut

$$J_v(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2^{2m+v}\, m!\, \Gamma(v+m+1)} \quad \text{....(2.25)}$$

Karena fungsi Bessel meliputi v^2 , fungsi J_v dan J_{-v} merupakan penyelesaian dari persamaan untuk v yang sama. Jika -v maka didapat

$$J_{-v}(x) = x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2^{2m-v}\, m!\, \Gamma(m-v+1)} \quad \text{....(2.26)}$$

Jika v bukan merupakan integer maka theorema (2.8)

Theorema 2.8

Jika v bukan merupakan integer, sebuah penyelesaian umum dari persamaan Bessel untuk $x \neq 0$ adalah

$$y(x) = c_1\, J_v(x) + c_2\, J_{-v}(x)$$

Jika v merupakan integer yang biasanya dinyatakan dengan n, dengan $n \geqslant 0$ maka penyelesaian persamaan Bessel dapat dituliskan sebagai

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2^{2m+n}\, m!\, (n+m)} \quad \text{............(2.27)}$$

Theorema 2.9 (Dependenci linier persamaan Bessel J_n dan J_{-n})

Untuk integer $v = n$ fungsi Bessel $J_n(x)$ dan

$J_{-n}(x)$ dependen secara linier karena

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \; J_n(x) \qquad (n = 1,2,\ldots) \qquad \ldots\ldots(2.28)$$

Bukti :

Pandang persamaan (2.26). Misalkan v mendekati integer positif n . Maka fungsi gamma dalam koefesien dari suku n pertama menjadi ∞ sehingga koeffesien menjadi nol dan penjumlahan nilai dengan m = n. Karena fungsi

$\Gamma(m - n + 1) = (m - n)!$

maka didapat

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m \; x^{2m-n}}{2^{2m-n} \; m! \; (m-n)!}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \; x^{2s+n}}{2^{2s+n} \; (n+s)! \; s!}$$

dengan m = n + 5 dan s = m - n . Dari (2.27) tampak deret terakhir menjadi $(-1)^n \, J_n(x)$. Maka terbuktilah.

2.5 PEMODELAN

2.5.1 PERSAMAAN PANAS

Dari pengamatan tampak bahwa panas sebuah benda akan mengalir dalam arah penurunan suhu, dari percobaan fisika menunjukkan bahwa tingkat aliran sebanding dengan gradien suhu berarti bahwa kecepatan alir panas v dalam benda berbentuk

$$v = -K \text{ grad } U \qquad \ldots\ldots(2.29)$$

dengan U(x,y,z,t) adalah suhu

t adalah waktu

K adalah konduktivitas panas dari benda.

Dalam lingkungan tetap maka K merupakan konstanta. Akan dicari model matematika untuk aliran panas yang disebut aliran panas.

Jawab

Misalkan T merupakan bagian dalam benda dan misalkan S merupakan permukaan batasnya. Jumlah panas yang meninggalkan T persatuan waktu adalah $\iint_S$ v.n dA dengan v.n merupakan komponen kecepatan dalam arah keluar dari vektor n dari S. Dari (2.29) dan theorema divergen didapat

$$\iint_S v.n\ dA = -K \iiint_T \operatorname{div}(\operatorname{grad} U)\ dx\ dy\ dz$$
$$= -K \iiint_T \nabla^2 U\ dx\ dy\ dz$$

dengan $\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$

merupakan Laplacian dari U

Jumlah panas H dalam T adalah

$$H = \iiint_T \sigma \rho\ dx\ dy\ dz$$

dengan konstanta σ merupakan panas jenis dari materi benda dan ρ merupakan massa jenis. Sehingga tingkat waktu dari penurunan H adalah

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = -\iiint_T \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t}\ dx\ dy\ dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.30)$$

Panas keluar sama dengan panas yang berkurang berarti (2.30) sama dengan (2.29). Yaitu

$$-\iiint \sigma\rho \, \frac{\partial U}{\partial t} \, dx\, dy\, dz = -K \iiint_T \nabla^2 U \, dx\, dy\, dz$$

atau

$$\iiint_T \left(\sigma\rho \, \frac{\partial U}{\partial t} - K \nabla^2 U \right) dx\, dy\, dz \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.31)$$

Karena (2.31) berlaku untuk setiap bagian T dalam benda maka pengintegralan haruslah sama dengan nol. Sehingga didapat :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \; \nabla^2 U \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.32)$$

dengan $c^2 = \dfrac{K}{\sigma\rho}$