BAB II

MATERI DASAR

2.1. DETERMINAN DAN MATRIKS

Definisi 1

Matriks adalah tabel bilangan yang diatur oleh baris dan kolum

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks A terdiri dari m baris, n kolom

Definisi 2

Bila m = n atau banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, maka matriks tersebut di - sebut matriks bujur sangkar

Contoh 1 $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -7 \\ 6 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

B adalah matriks dengan 4 baris dan 4 kolom (berukuran/ berordo 4).

Pandang matriks berukuran (nxn) $A = (a_{ij})$ dan M_{ij} suatu sub matriks dari A dengan ukuran $(n-1)\times(n-1)$ dimana semua elemen yang berada pada baris ke-i dan se mua elemen yang berada pada kolom ke-j dari A dihilang kan.

Definisi (3)

Minor dari elemen a_{ij} suatu matriks $A = (a_{ij})$ adalah M_{ij} dan kofaktor dari a_{ij} adalah $(-1)^{i+j}$ M_{ij}, merupakan suatu skalar.

Bentuk umum kofaktor

$$A_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij}$$

Definisi (4)

Determinan dari suatu matriks = jumlah per - kalian elemen-elemen dari sembarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya. Dengan perkataan lain :

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

dengan i sebarang, disebut uraian baris ke-i.

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + A_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

dengan j sebarang, disebut uraian kolom ke-j

Contoh : (2)

Hitung det (A) =
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Dengan menggunakan difinisi 4

Akan diuraikan menurut baris 1

$a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 3$, $a_{14} = 1$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |m_{11}| = + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\ (2) \quad -2\ (-7) \quad +5\ (-3) = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |m_{12}| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(+1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -\left(1\ (2) \quad - 2\ (1) \quad + 5\ (-1)\right) = 5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |m_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\ (-7) \quad - 0 \quad + 5\ (5) \quad = 18$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} |m_{14}| = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -\ (1\ (-3) \quad - \quad 0 \quad + \quad 2\ (5) \quad = -7$$

Jadi .....

Jadi $|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14}$

$= 2.(-1) + 1 (5) + 3 (18) + 1.(-7)$

$= -2 + 5 + 54 - 7$

$= 50$

2.2. DERIVATIF DAN INTEGRAL

Definisi (5)

Diberikan fungsi $y = f(x)$ dalam selang (a,b)

a). Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ maka $f(x)$ kontinu di $x = c$

b). Jika untuk setiap $X \in (a,b)$ harga dari $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ada maka $f(x)$ dikatakan dapat di defferensialkan dalam selang (a,b).

c). Derivatif dari $f(x)$ dituliskan dengan $f'(x) =$

$$\frac{d\, f(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Turunan order yang lebih tinggi juga dapat ditentukan sebagai berikut :

Turunan order kedua adalah $\frac{d}{dx} (\frac{dy}{dx})$ yang dinyatakan dengan $\frac{d^2y}{dx^2}$ atau kadang-kadang juga dengan y''

Turunan order ke-n dari fungsi y dinyatakan dengan $\frac{d^ny}{dx^n}$ atau dengan $y^{(n)}$

Definisi (6).

Diberikan fungsi $f(x)$, misalkan terdapat fungsi

$F(x)$ dengan $F'(x) = f(x)$ maka dikatakan bahwa integral dari fungsi $f(x)$ adalah $F(x)$ dinotasikan dengan

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \quad , c = \text{konstanta}$$

biasanya dinyatakan sebagai integral tak tentu dari $f(x)$ karena tidak ada nilai tertentu dari integral yang diketahui.

Definisi (7).

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

a dan b dinamakan batas bawah dan batas atas integrasi.

2.3. BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan kompleks merupakan bilangan yang berbentuk $Z = x + iy$, dimana x dan y adalah bilangan real dan $i = \sqrt{-1}$. Dalam hal ini x dinamakan bagian real dari Z dan ditulis $x = \text{Re}(Z)$ dan y dinamakan bagian imaginernya ditulis $y = \text{Im}(Z)$.

Bilangan kompleks $Z = x + iy$ dapat dinyatakan dengan suatu titik (x,y). Sumbu horisontal dinamakan sumbu real yang merupakan ukuran bagian real dari Z dan sumbu yang vertikal dinamakan sumbu imaginer yang merupakan ukuran dari koefisien i dalam Z yaitu bagian imaginer pada Z. Origin O menyatakan $0 = 0 + i\,0$.

Bilangan .....

Bilangan kompleks Z dapat juga ditulis dalam bentuk trigonometri sebagai $re^{i\theta} = r\ (\cos\theta + i\sin\theta)$ sedemikian sehingga $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dan r dinamakan modulus dari Z dan ditulis dengan Z

Jadi $|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arg Z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

TEOREMA DE MOIVRE (1)

Untuk setiap n bilangan bulat positip, berlaku :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin\theta$$

Bukti :

Dengan menggunakan induksi Matematik maka : Untuk n=1

$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos\theta + i\sin\theta$ ternyata benar untuk n = 1

Untuk n = 2

$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

ternyata benar untuk n = 2.

Selanjutnya diandaikan benar untuk n = k

$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$

maka benar untuk n = k+1

$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos k\theta + i\sin\theta k)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)$

$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$

sehingga terbukti teorema De'Moivre diatas.

2.4. POLINOMIAL ORTOGONAL

Dalam membahas polinomial ortogonal misalkan diambil sebarang 2 polinomial yaitu ki (x) merupakan polinomial order - i dan lj (x) merupakan polino -

mial order-j. Sebelumnya akan dinyatakan dulu definisi produk skalar (perkalian skalar).

Definisi (8).

a). Perkalian skalar antara dua vektor $\vec{A}$ dan vektor $\vec{B}$ adalah suatu skalar dinyatakan dengan :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| |B| \cos\theta$$

θ adalah sudut antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$

b). Jika vektor A dan B masing-masing mempunyai komponen (a_1, a_2, a_3) dan (b_1, b_2, b_3) sedemikian sehingga $\vec{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ dan $\vec{B} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$, maka : $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

i,j,k adalah vektor-vektor satuan sepanjang sumbu koordinat dan $i.i = j.j = k.k = 1$ sedangkan $i.j = j.k = k.i = j.i = k.j = i.k = 0$

Definisi (9)

Operasi untuk perkalian skalar dari dua polinomial ki (x) dan lj (x) dinyatakan sebagai berikut :

$$(ki, lj) = \int_a^b ki\ (x)\ \ lj\ (x)\ dx\ ,\ x \in (a,b).$$

Untuk menyatakan bahwa perkalian skalar dari 2 polinomial diatas adalah ortogonal dijelaskan dengan definisi berikut :

Definisi (10).

Himpunan $\{ki\ (x)\}$, i = 1,2,3,.... adalah ortogonal pada interval (a,b) bila memenuhi :

$$(ki, lj) = \int_a^b ki\ (x)\ \ lj\ (x)\ \ dx = 0$$

untuk $i \neq j$, $j = 1,2,3,\ldots$

Bentuk polinomial ortogonal pada definisi 10 nantinya akan digunakan untuk membuktikan bahwa polinomial chebychew jenis kedua (Un) merupakan salah satu polinomial ortogonal.

Selanjutnya akan dicari bentuk ekiwalen dari polinomial chebychev jenis kedua pada pembahasan 2.6.

2.5. FUNGSI TRIGONOMETRI

Definisi (11).

a). $\sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

b). $\cos (x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

c). $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

d). $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 2 \sin^2 x$

$= 2 \cos^2 x - 1$

e). $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

f). $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

Untuk fungsi invers trigonometri didapat :

Definisi (12).

a). Jika $y = \cos x$ maka $x = \arccos y$ atau

$x = \cos^{-1} y$

b). Jika $y = \sin x$ maka $x = \arcsin y$ atau

$x = \sin^{-1} y$

2.6. POLINOMIAL CHEBYCHEV JENIS KEDUA $U_n(x)$

Bentuk umum polinomial chebychev jenis kedua adalah

$$U_n(x) = \frac{\text{Sin } ((n+1) \text{ arc cos } x)}{\text{Sin } (\text{arc cos } x)}$$

Teorema (2).

Polinomial chebychev jenis kedua orde n =

$$\frac{\text{Sin } ((n+1) \text{ arc cos } x)}{\text{Sin } (\text{arc cos } x)} \text{ , dimana Sin (arc cos x)} \neq 0$$

merupakan salah satu jenis polinomial ortogonal.

Bukti :

$-1 < \cos \emptyset < 1$, sehingga batas x antara -1 sampai 1.

Fungsi $U_n(x)$ terdefinisi pada $x \in (-1,1)$.

Ambil n = 1 sehingga $U_1(x) = \dfrac{\text{Sin } (2 \text{ arc cos } x)}{\text{Sin } (\text{ arc cos } x)}$

n = 2 sehingga $U_2(x) = \dfrac{\text{Sin } (3 \text{ arc cos } x)}{\text{Sin } (\text{arc cos } x)}$

dengan menggunakan definisi 9 maka

$$(U_1, U_2) = \int_{-1}^{1} U_1(x) . U_2(x) \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\text{Sin } (2 \text{ arc cos } x)}{\text{Sin } (\text{arc cos } x)} . \frac{\text{Sin } (3 \text{ arc cos } x)}{\text{Sin } (\text{arc cos } x)} \, dx$$

Substitusi :

$\emptyset$ = arc cos x dengan menggunakan definisi 12 maka didapat $x = \cos \emptyset$. Selanjutnya dengan menggunakan definisi 5 diperoleh $x = \cos \emptyset$ maka $dx = - \text{Sin } \emptyset \, d\emptyset$

Untuk $x=-1$ maka $\emptyset = \pi$,untuk $x=1$ maka $\emptyset = 0$

$$= - \int_{0}^{\pi} \frac{\text{Sin } 2\emptyset}{\text{Sin } \emptyset} . \frac{\text{Sin } 3\emptyset}{\text{Sin } \emptyset} (- \text{Sin } \emptyset) \, d\emptyset$$

Integrannya diselesaikan dulu menjadi :

$$\frac{\text{Sin } 2\emptyset}{\text{Sin } \emptyset} . \frac{\text{Sin } 3\emptyset}{\text{Sin } \emptyset} = \frac{A}{\text{Sin}^2\emptyset}$$

dimana $A = \sin 2\phi \sin 3\phi$,dengan menggunakan definisi 11

$$= (2 \sin\phi \cos\phi)(3 \sin\phi - 4 \sin^3\phi)$$
$$= (2 \sin\phi \cos\phi)(4 \sin\phi \cos^2\phi - \sin\phi)$$
$$= 8 \sin^2\phi \cos^3\phi - 2 \sin^2\phi \cos\phi$$

Sehingga :

$$\frac{\sin 2\phi \sin 3\phi}{\sin^2\phi} = 8 \cos^3\phi - 2 \cos\phi$$

dengan menggunakan definisi 7 maka didapat :

$$= - \int_0^{\pi} (8 \cos^3\phi - 2 \cos\phi)(-\sin\phi)\, d\phi$$
$$= - \left(-8 \int_0^{\pi} \cos^3\phi \sin\phi\, d\phi + 2 \int_0^{\pi} \cos\phi \sin\phi\, d\phi \right)$$
$$= - \left(8 \int_0^{\pi} \cos^3\phi\, d\cos\phi + 2 \int_0^{\pi} \sin\phi\, d \sin\phi \right)$$
$$= - \left(8/4 \cos^4\phi \Big|_0^{\pi} + 2/2 \sin^2\phi \Big|_0^{\pi} \right)$$
$$= -2\,(1-1) - (0-0) = 0$$

Ternyata menurut definisi (10) $U_n(x)$ adalah ortogonal.

Bentuk $U_n(x)$ diatas akan ditransformasikan kedalam bentuk-bentuk yang ekivalen. Salah satu dari bentuk tersebut akan digunakan dalam pembahasan ini khususnya pada bab III. Untuk itu perlu dibahas beberapa teorema dan definisi berikut.

Definisi (13).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

adalah koefisien binomial.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = \binom{n+1}{0}(\cos\theta)^{n+1} + \binom{n+1}{1}(\cos\theta)^{n}$$
$$(i\sin\theta) + \binom{n+1}{2}(\cos\theta)^{n-1}$$
$$(i\sin\theta)^{2} + \binom{n+1}{3}(\cos\theta)^{n-2}$$
$$(i\sin\theta)^{3} + \dots + \binom{n+1}{n}$$
$$(\cos\theta)^{n+1-n}(i\sin\theta)^{n} + \binom{n+1}{n+1}$$
$$(i\sin\theta)^{n+1}$$
$$= \Big((\cos\theta)^{n+1} - \binom{n+1}{2}(\cos\theta)^{n-1}$$
$$(\sin\theta)^{2} + \binom{n+1}{4}(\cos\theta)^{n-3}(\sin\theta)^{4}$$
$$- \binom{n+1}{6}(\cos\theta)^{n-5}(\sin\theta)^{6} + \binom{n+1}{8}$$
$$(\cos\theta)^{n-7}(\sin\theta)^{8} - \dots\dots\dots\Big)$$
$$+ i\Big(\binom{n+1}{1}(\cos\theta)^{n}(\sin\theta) - \binom{n+1}{3}$$
$$(\cos\theta)^{n-2}(\sin\theta)^{3} + \binom{n+1}{5}$$
$$(\cos\theta)^{n-4}(\sin\theta)^{5} - \binom{n+1}{7}$$
$$(\cos\theta)^{n-6}(\sin\theta)^{7} + \binom{n+1}{9}$$
$$(\cos\theta)^{n-6}(\sin\theta)^{9} - \dots\dots\dots\Big)$$

$= \cos\ (n+1)\ \theta + i\ \sin\ (n+1)\ \theta$ = Teorema de'moivre

Sehingga diperoleh :

$$\sin\ (n+1)\ \theta = \binom{n+1}{1}(\cos\theta)^{n}(\sin\theta) - \binom{n+1}{3}(\cos\theta)^{n-2}$$
$$(\sin\theta)^{3} + \binom{n+1}{5}(\cos\theta)^{n-4}(\sin\theta)^{5} -$$
$$\binom{n+1}{1}(\cos\theta)^{n-6}(\sin\theta)^{7} + \binom{n+1}{9}$$
$$(\cos\theta)^{n-8}(\sin\theta)^{9} - \dots\dots$$

misalkan $\theta = \arccos x$

Maka :

$$U_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\ \text{arc}\cos x\big)}{\sin(\text{arc}\cos x)}$$ menjadi

$$= \frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin\theta}$$

Sehingga $\frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin\theta} = \binom{n+1}{1}(\cos\theta)^n - \binom{n+1}{3}$
$(\cos\theta)^{n-2}(\sin\theta)^2 +$
$\binom{n+1}{5}(\cos\theta)^{n-4} - \binom{n+1}{7}$
$(\cos\theta)^{n-6}(\sin\theta)^6 + \binom{n+1}{9}$
$(\cos\theta)^{n-8}(\sin\theta)^8 - \ldots.$

Catatan :

$(\sin\theta)^2 = 1 - \cos^2\theta = -((\cos\theta)^2 - 1)$
$(\sin\theta)^4 = ((\sin\theta)^2)^2 = ((\cos\theta)^2 - 1)^2$
$(\sin\theta)^6 = (\sin\theta)^4(\sin\theta)^2 = -((\cos\theta)^2 - 1)^3$
$(\sin\theta)^8 = ((\sin\theta)^4)^2 = ((\cos\theta)^2 - 1)^4$ dan seterusnya.

Jadi : $Un(x) = \binom{n+1}{1}(\cos\theta)^n + \binom{n+1}{3}(\cos\theta)^{n-2}$
$((\cos\theta)^2 - 1) + \binom{n+1}{5}(\cos\theta)^{n-4}$
$((\cos\theta)^2 - 1)^2 + \binom{n+1}{7}(\cos\theta)^{n-6}$
$((\cos\theta)^2 - 1)^3 + \binom{n+1}{9}(\cos\theta)^{n-8}$
$((\cos\theta)^2 - 1)^4 + \ldots..$

Dengan mengambil $\cos\theta = x$, maka

$Un(x) = \binom{n+1}{1} x^n + \binom{n+1}{3} x^{n-2}(x^2-1) + \binom{n+1}{5}$
$x^{n-4}(x^2-1)^2 + \binom{n+1}{7} x^{n-6}(x^2-1)^3 +$
$\binom{n+1}{9} x^{n-8}(x^2-1)^4 + \ldots.$

$$= \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k$$

Sehingga terbukti teorema diatas.

Setelah terbukti teorema 3, selanjutnya akan diperoleh bentuk lain dari Un (x) seperti dinyatakan pada teorema berikut :

TEOREMA (4)

Polinomial chebychev jenis kedua dapat juga di - nyatakan sebagai berikut :

$$Un\ (x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}},\ x \neq \pm 1$$

Bukti : Menurut teorema 2

$$Un\ (x) = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k$$

$$= \binom{n+1}{1} x^n + \binom{n+1}{3} x^{n-2}(x^2-1) + \binom{n+1}{5} x^{n-4} (x^2-1)^2 + \binom{n+1}{7} x^{n-6}(x^2-1)^3 + \binom{n+1}{9} x^{n-8} (x^2-1)^4 + \ldots.$$

$$= \binom{n+1}{1} x^n \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} + \binom{n+1}{3} x^{n-2} \frac{(\sqrt{x^2-1})^3}{\sqrt{x^2-1}} + \binom{n+1}{5} x^{n-4} \frac{(\sqrt{x^2-1})^5}{\sqrt{x^2-1}} + \binom{n+1}{7} x^{n-6} \frac{(\sqrt{x^2-1})^7}{\sqrt{x^2-1}} + \binom{n+1}{9} x^{n-8} \frac{(\sqrt{x^2-1})^9}{\sqrt{x^2-1}} + \ldots.$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{x^2-1}} \left[\binom{n+1}{1} x^n \sqrt{x^2-1} + \binom{n+1}{3} x^{n-2} (\sqrt{x^2-1})^3 + \binom{n+1}{5} x^{n-4} (\sqrt{x^2-1})^5 + \binom{n+1}{7} x^{n-6} (\sqrt{x^2-1})^7 + \binom{n+1}{9} x^{n-8} (\sqrt{x^2-1})^9 + \ldots. \right]$$

$$= \frac{A}{2\sqrt{x^2-1}}$$

Kita ....

Kita sederhanakan dulu untuk A menjadi

$$A = 2\left(\binom{n+1}{1}x^n\sqrt{x^2-1} + \binom{n+1}{3}x^{n-2}(\sqrt{x^2-1})^3 + \binom{n+1}{5}x^{n-4}\right.$$
$$\left.(\sqrt{x^2-1})^5 + \binom{n+1}{7}x^{n-6}(\sqrt{x^2-1})^7 + \binom{n+1}{9}x^{n-8}(\sqrt{x^2-1})^9 + \cdots\right)$$

$$= \left(\binom{n+1}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n\sqrt{x^2-1} + \binom{n+1}{2}x^{n-1}(\sqrt{x^2-1})^2 + \right.$$
$$\binom{n+1}{3}x^{n-2}(\sqrt{x^2-1})^3 + \binom{n+1}{4}x^{n-3}(\sqrt{x^2-1})^4 + \binom{n+1}{5}x^{n-4}$$
$$\left.(\sqrt{x^2-1})^5 + \ldots\right)$$
$$- \left(\binom{n+1}{0}x^{n+1} - \binom{n+1}{1}x^n\sqrt{x^2-1} + \binom{n+1}{2}x^{n-1}(\sqrt{x^2-1})^2 - \right.$$
$$\binom{n+1}{3}x^{n-2}(\sqrt{x^2-1})^3 + \binom{n+1}{4}x^{n+3}(\sqrt{x^2-1})^4 - \binom{n+1}{5}x^{n-4}$$
$$\left.(\sqrt{x^2-1})^5 + \ldots\ldots\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}(\sqrt{x^2-1})^k - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}$$
$$(-1)^k(\sqrt{x^2-1})^k$$

$$A = (x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}$$

Jadi terbukti :

$$Un\ (x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} \qquad x \neq \pm 1$$

Definisi (15).

Formula Recursif dari Polinomial chebychev jenis kedua Un (x) adalah : $U_{n+1}(x) - 2x\,Un(x) + U_{n-1}(x) = 0$

TEOREMA (5).

Polibomial chebychev jenis kedua memenuhi formula rekursif. $Un\ (x) = 2x\,U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$ untuk $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$ (1) dengan pendifinisian awal :

$U_{-1}(x) = U_{-2}(x) = 0$ dan $Uo\ (x) = 1$

Bukti ......

$n = 3$, $U_3(x) = 2x\ U_2(x) - U_1(x)$

$= 2x\ (4x^2-1) - 2x = 8x^3-4x$

$n = 4$, $U_4(x) = 2x\ U_3(x) - U_2(x)$

$= 2x\ (8x^3-4x) - (4x^2-1)$

$= 16x^4 - 12x^2 + 1$

$n = 5$, $U_5(x) = 2x\ U_4(x) - U_3(x)$

$= 2x\ (16x^4-12x^2+1)-(8x^3-4x)$

$= 32x^5 - 32x^3 + 6x$

$n = 6$, $U_6(x) = 2x\ U_5(x) - U_4(x)$

$= 2x\ (32x^5-32x^3+6x)-(16x^4-12x^2+1)$

$= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

dan seterusnya.

TABEL 1

n	$Un\ (x) = 2x\ Un-1(x) - Un-2(x)$
0	1
1	$2x$
2	$4x^2-1$
3	$8x^3- 4x$
4	$16x^4- 12x^2+ 1$
5	$32x^5- 32x^3+ 6x$
6	$64x^6- 80x^4+ 24x^2- 1$

Untuk selanjutnya tabel 1 digunakan untuk meng - hitung polinomial chebychev jenis kedua order - n. Dari tabel 1 dapat dilihat bahwa koefisien pangkat tertinggi (x^n) adalah 2^n dan koefisien lainnya adalah bilangan bulat. Dari hasil diatas dapat ditarik kesimpulan bahwa :

Polinomial chebychev jenis kedua order - n dapat dinyatakan dalam bentuk yang saling ekivalen yaitu :

a). $Un(x) = \dfrac{\text{Sin}\ ((n+1)\ \text{arc cos}\ x)}{\text{Sin}\ (\text{arc cos}\ x)}$, Sin (arc cos x) $\neq 0$

b). $Un(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k$ untuk setiap x riil $\neq \pm 1$

c). $Un(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$, $x \neq \pm 1$

Pada pembahasan selanjutnya bentuk Un(x) yang paling banyak digunakan adalah pada persamaan (C) dalam hal menyelesaikan persamaa-persamaan yang mencakup Un(x).

2.7. MENCARI AKAR-AKAR POLINOMIAL

Definisi (16)

Suatu persamaan kwadrat $ax^2 + bx + c = a$

penyelesaiannya adalah :

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a,b,c adalah bilangan real.

Untuk mendapatkan akar-akar polinomial dengan order yang lebih tinggi dengan menggunakan dalil sisa atau dikenal dengan metode Horner

Definisi (17).

Dalil disa dipakai dalam menentukan sisa pembagian apabila suatu polinomial F (x) dibagi oleh (x-b).

Pembagian .....

Pembagian tersebut memberikan :

$$F(x) = (x-b)\ f(x) + S(x)$$

dengan $f(x) = a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

adalah hasil bagi dan $S(x)$ sisanya yang merupakan konstanta.

Metode Horner atau dalil sisa ini dapat di - uraikan sebagai berikut :

Pertama yaitu dengan mengalikan $f(x)$ dengan $S(x)$ yang dinyatakan dengan :

$$f(x)(x-b) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)\ (x-b).$$

$$= (a_n x^{n+1} + a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^3 + a_1 x^2 + a_0 x) - (b\ a_n x^n + b\ a_{n-1}\ x^{n-1} + \cdots + b a_3 x^3 + b a_2 x^2 + b a_1 x + b a_0)$$

$$= a_n\ x^{n+1} + (a_{n-1} - b\ a_n)\ x^n + (a_{n-2} - b\ a_{n-1})\ x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b a_2)\ x^2\ (a_0 - b a_1) x - b a_0.$$

Sehingga $F(x) = f(x)\ (x-b) + S(x)$ .... (1)

$$= a_n\ x^{n+1} + (a_{n-1} - b a_n)\ x^n + (a_{n-2} - b\ a_{n-1})\ x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b a_2) x^2 + (a_0 - b a_1)\ x + S(x) - b\ a_0.$$

Persamaan (1) merupakan polinomial derajat (n+1) misalkan faktor adalah :

$A_{n+1} = a_n$ ------> $a_n = A_{n+1}$

$A_n = a_{n-1} - b\ a_n$ ----> $a_{n-1} = b\ a_n + A_n$

$= A_n + b\ A_{n+2}$

$A_{n-1} = a_{n-2} - b\ a_{n-1} \dashrightarrow a_{n-2} = b\ a_{n-1} + A_{n-1}$

$= A_{n-1} + b\ (A_n + bA_{n+1})$

$A_2 = a_1 - b\ a_2 \dashrightarrow a_1 = b\ a_2 + A_2$

$A_1 = a_0 - b\ a_1 \dashrightarrow a_0 = b\ a_1 + A_1$

$A_0 = S(x) - b\ A_0 \dashrightarrow S(x) = b\ a_0 + A_0$

dalam mencari f(x) dan S(x) dengan memasangkan ko - efisien berikut :

$x=b$	A_{n+1} + A_n	A_{n-1}	....	
	$b\ a_n$	$b\ a_{n-1}$	....	
	$A_{n-1}=a_n$	$(A_n+ba_n)=a_{n-1}$	$(A_{n-1}+ba_{n-1})=a_{n-2}$	....

A_2	A_1	A_0
$b\ a_2$	$b\ a_1$	$b\ a_0$
$(A_2+ba_2)=a_1$	$(A_1+ba_1)= a_0$	$(A_0+ba_0)= S(x)$

<u>Contoh</u> (3)

Carilah hasil bagi dan sisa

$(3x^5 - 4x^4 + 6x^2 - 5x + 7)\ (x-2)$

Jawab :

Kita tulis faktornya sebagai berikut :

$x=2$	3	-4	0	6	-5	7
	0	6	4	8	28	46 +
	3	2	4	14	23	53

Jadi hasil baginya $f(x) = 3\ x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 14x + 23$

dan sisanya $S(x) = 53$.

Contoh (4) ...

Contoh (4).

Carilah akar rasional dari persamaan

$$18x^3 - 9x^2 - 5x + 2 = 0$$

Jawab.

Dengan menggunakan metode Harner

dicoba untuk $x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 18 & -9 & -5 & +2 \\ x = -\frac{1}{2} & & -9 & 9 & -2 \\ \hline & 18 & -18 & 4 & 0 \end{array}$$

ternyata $f(-\frac{1}{2}) = 0$

Jadi hasil baginya $18x^2 - 18x + 4$ dan sisa $f(-\frac{1}{2}) = 0$

Selanjutnya akar-akar dari persamaan kuadrat berikut adalah : $f(x) = 18x^2 - 18x + 4 = 0$

Dengan menggunakan definisi (16) maka akar nya adalah : $x_{2,3} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4.18.4}}{2.18}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{9}}{18}$$

Sehingga didapat $x_2 = \dfrac{9 + \sqrt{9}}{18} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$

$$x_3 = \frac{9 - 3}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ akar akar rasional f adalah $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$