BAB II

VARIASI FUNGSIONAL

2.1. FUNGSIONAL

Definisi

Misalkan M adalah suatu kumpulan fungsi y(x). Fungsional J adalah suatu aturan atau cara yang menghubungkan setiap fungsi $y(x) \in M$ ke bilangan tertentu J.

Fungsional J ditulis dengan $J = J[\, y(x)\,]$.

M disebut domain dari fungsional J.

CONTOH :

1. Kumpulan semua fungsi y(x)yang kontinu dalam selang [0,1]

$$J\,[y(x)] = \int_0^1 y(x)\, dx$$

J [y(x)] adalah fungsional dari y(x), sebab setiap fungsi $y(x) \in C\,[0,1]$ dikawankan dengan bilangan tertentu J [y].

Misal y(x) = 1, maka :

$$J\,[1] = \int_0^1 1\, .dx = 1$$

2. Misalkan M suatu fungsi yang didefenisikan pada [-1,1], semua fungsi y(x) kontinu dalam selang [-1,1]

$$J\,[y(x)] = \int_{-1}^{1} \rho\,\pi\,[y(x)]^2\,dx$$

Misal diambil $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, maka

$$J\,[y(x)] = \int_{-1}^{1} \rho\,\pi\,[y(x)]^2\,dx$$

$$J\,[\sqrt{1 - x^2}\,] = \int_{-1}^{1} \rho\,\pi\,(1-x^2)\,dx$$

$$J\,[\sqrt{1 - x^2}\,] = \frac{4}{3}\,\pi\,\rho$$

π dan ρ konstan.

3. Diberikan

$$J\,[y(x)] = \int_{P}^{Q} [(y')^2 + 2yx - y^2]\,dx\ ,$$

dimana :

P(0,0) dan Q($\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$)

Misal diambil $y = x$

maka :

$$J\,[x] = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ((1)^2 + 2x^2 - x^2)\,dx$$

$$J\,[x] = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ((1 + x^2)\,dx = x + \frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$J\,[x] = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\pi^2}{12}\right).$$

2.2. FUNGSIONAL KONTINU

Definisi

Fungsional $J\,[y(x)]$ yang berada dalam himpunan M, dimana M adalah suatu kumpulan fungsi $y(x)$ dikatakan kontinu pada $y = y_o(x)$ dalam pendekatan turunan tingkat ke-n jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga fungsi $y = y(x)$ memenuhi syarat :

$| y(x) - y_o(x) | < \delta$, $| y'(x) - y_o'(x) | < \delta$

$| y^{(n)}(x) - y_o^{(n)}(x) | < \delta$ dan

$| J [y(x)] - J [y_o(x)] | < \varepsilon$

Fungsional yang tidak kontinu dalam turunan tingkat ke-n disebut diskontinu.

Ambil :

$$y^{(k)}(x) = y_o^{(k)}(x) + \alpha\, \omega^{(k)}(x)$$
$$k = 0,1,\dots,n$$

Dimana α adalah parameter dan $\omega(x)$ merupakan fungsi sembarang dalam domain M.

Bila $y^{(k)}(x)$ diambil limitnya untuk $\alpha \rightarrow 0$ maka :

$$\lim_{\alpha\rightarrow 0} y^{(k)}(x) = y_o^{(k)}(x) \quad , \quad k = 0,1,\dots, n$$

Selanjutnya dari definisi kontinuitas fungsional bila $y(x) = y_o(x)$ dapat ditulis :

$$\lim_{\alpha\rightarrow 0} J [y_o(x) + \alpha\, \omega(x)] = J [y_o(x)]$$

CONTOH :

1. Tunjukan bahwa fungsional

   $$J [y(x)] = \int_0^1 [y(x) + 2y'(x)]\, dx$$

   yang didefinisikan pada C_1 [0,1] adalah kontinu pada fungsi $y_o(x) = x$ dalam turunan tingkat pertama.

SOLUSI :

Ambil bilangan sembarang $\varepsilon > 0$, akan ditunjukan adanya bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$| J\,[y(x) - J\,[x]\;| < \varepsilon$ selama

$|\, y(x) - x \,| < \delta$ dan $|\, y'(x) - 1 \,| < \delta$

$| J[y(x)] - J[x] | = \left| \int_0^1 [y(x) + 2y'(x) - x - 2]\, dx \right|$

$\leq \int_0^1 |\, y(x) - x \,|\, dx + 2 \int_0^1 |\, y'(x) - 1 \,|\, dx$

Pilihlah $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, untuk semua $y(x) \in C_1\,[0,1]$

$|\, y(x) - x \,| < \frac{\varepsilon}{3}$, dan $|\, y'(x) - 1 \,| < \frac{\varepsilon}{3}$

sehingga didapat :

$|\, J\,[y(x)] - J\,[x] \,| < \varepsilon$

jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Menurut definisi fungsional kontinu, maka

$J\,[y(x)] = \int_0^1 [y(x) + 2y'(x)]\, dx$

adalah kontinu pada fungsi $y_o = x$ dalam turunan tingkat pertama.

2. Tunjukkan bahwa fungsional

$$J\,[y(x)] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + y^2(x)}\; dx \;,$$

$y(x) \in C\,[0,1]$ kontinu pada fungsi $y_o(x) = x^2$ dalam turunan tingkat nol.

SOLUSI :

Ambil $y(x) = x^2 + \alpha\, \eta(x)$

dimana $\eta(x) \in C\,[0,1]$ dan α sembarang bilangan relatif kecil.

$J\,[y(x)] = J\,[x^2 + \alpha\, \eta(x)]$

$$= \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + [x^2 + \alpha\, \eta(x)]^2} \quad dx$$

$$= \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^4 + 2\alpha x^2 \eta(x) + \alpha^2 \eta^2(x)}\ dx$$

Dengan mengambil limit untuk $\alpha \longrightarrow 0$

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} J\ [y(x)] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^4} \quad dx$$

$$= J\ [x^2]$$

jadi fungsional kontinu pada $y_0 = x^2$

2.3. RUANG NORM

Definisi

Himpunan R disebut ruang norm linear jika :

1. R merupakan himpunan linear.
2. Untuk setiap elemen $x \in R$ dikawankan dengan bilangan real $\| x \|$ dan memenuhi syarat-syarat :

   a. $\| x \| \geq 0$

   b. $\| x \| = 0 \iff x = 0$

   c. $\| \alpha x \| = | \alpha |\ \| x \|$

   d. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

   dimana $\| x \| = \max\limits_{x \in R} | x |$

   Himpunan R linear bila memenuhi operasi penjumlahan dan pergandaan terhadap skalar dan memenuhi syarat-syarat :

   a. $x + y = y + x$; komutatif terhadap penjumlahan.

b. $(x + y) + z = x + (y + z)$; asosiatif terhadap penjumlahan.

c. Terhadap elemen nol sedemikian sehingga $x + 0 = x$, $\forall x \in R$.

d. Untuk setiap $x \in R$ ada elemen $(-x)$ sedemikian sehingga $x + (-x) = 0$.

e. $1 x = x$

f. $\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$

g. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

h. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

DEFINISI I

Misalkan M adalah ruang norm pada fungsi y(x). Fungsional L [y(x)] didefenisikan dalam ruang M disebut fungsional linear jika memenuhi syarat-syarat :

1. $L [c\, y_1(x)] = c\, L [y_1(x)]$, c = konstanta
2. $L [y_1(x) + y_2(x)] = L [y_1(x)] + L [y_2(x)]$
   dimana $y_1(x) \in M$ dan $y_2(x) \in M$

CONTOH

Suatu fungsional :

$$L [y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} [y'(x) + y(x)]\, dx$$

Yang didefenisikan dalam $C_1 [x_1,x_2]$ adalah jelas merupakan fungsional linear.

DEFINISI II

Fungsional L [y(x)] dikatakan linear bila :

1. Kontinu
2. Untuk $y_1 \in M$ dan $y_2 \in M$ memenuhi syarat :

$$L\ [y_1(x) + y_2(x)] = L\ [y_1(x)] + L\ [y_2(x)]$$

$L\ [y(x)]$ kontinu maka $L\ [y(x)]$ linear, dari definisi fungsional kontinu dikatakan bahwa fungsional $L\ [y(x)]$ kontinu dalam himpunan M, M adalah suatu himpunan fungsi y(x) yang kontinu, maka M adalah ruang norm pada fungsi y(x). Menurut definisi I fungsional $L\ [y(x)]$ merupakan fungsional linear dalam M.

Sekarang sebaliknya bila fungsional $L\ [y(x)]$ adalah fungsional linear maka $L\ [y(x)]$ kontinu.

$$L\ [cy] = c\ L\ [y]$$

$$|\ L\ [cy]\ | = |\ c\ |\ |\ L\ [y]\ |$$

kita anggap :

$$L\ [y] \leq k \quad \text{untuk semua } y \in M\ ,$$

untuk setiap $c > 0$ kita mendapatkan $cy \in M$

maka :

$$|\ L\ [cy]\ | \leq k$$

$$|\ c\ |\ |\ L\ [y]\ | \leq k$$

$$|\ L\ [y]\ | \leq \frac{k}{|c|}$$

$$|\ L\ [y]\ | \leq k\ ||\ y\ ||$$

Ambil :

$y = y_1 - y_2$

$$|\ L\ [y_1 - y_2]\ | = |\ L\ [y_1] - L\ [y_2]\ |$$

$\leq k \; || \; y_1 - y_2 \; ||$

$\forall \; y_1, y_2 \in M$ maka L [y] kontinu.

Sehingga definisi I dan definisi II adalah equivalen.

2.4. VARIASI FUNGSIONAL

Misalkan fungsional J [y(x)] didefenisikan pada M. M adalah kumpulan suatu fungsi y(x). Incremen dari fungsional J [y(x)] sesuai dengan pertambahan atau kenaikan dari δ y(x) dan didefinisikan dengan :

$$\Delta J = \Delta J \; [y(x)]$$
$$= J \; [y(x) + \delta y(x)] - J \; [y(x)]$$

$\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$, dimana $y(x) \in M$ dan $\tilde{y}(x) \in M$.

2.5. VARIASI PERTAMA

DEFINISI

Bila incremen dari fungsional :

$$\Delta J = J \; [y(x) + \delta y(x)] - J \; [y(x)]$$

dapat dinyatakan dengan :

$$\Delta J = L \; [y(x), \delta y] + \beta \; (y(x), \delta y) . || \; \delta y \; ||$$

dimana :

L [y(x), δy] adalah fungsional linear yang tergantung dari δy dan β (y(x), δy) $\longrightarrow$ 0 bila $|| \; \delta y \; || \longrightarrow 0$, maka besarnya incremen fungsional adalah linear yang bergantung dari δy , yaitu L [y(x), δy] yang disebut variasi pertama fungsional dan dinotasikan dengan δJ.

Dalam hal ini fungsional $J[y(x)]$ dikatakan dapat diturunkan (diffentiable) pada y(x).

pandang fungsional $J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$

fungsi $F(x,y,y')$ adalah kontinu pada $[x_1,x_2]$, mempunyai turunan parsial orde dua yang kontinu dalam domain $x_1 \le x \le x_2$, $-\infty \le y \le +\infty$ $-\infty \le y' \le +\infty$

Untuk mencari incremen dari fungsional $J[y(x)]$ adalah :

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} [F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y')]\,dx$$

Dengan menggunakan deret Taylor disekitar (x,y,y') adalah :

$$F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y') = \frac{\partial F}{\partial y}\,\partial y + \frac{\partial F}{\partial y}.\partial y' +$$
$$R\,(x,y,y',\delta y,\delta y')$$

Dimana $R\,(x,y,y',\delta y,\delta y')$ adalah sisa dari deret Taylor.

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y}.\delta y'\right) dx \quad +$$
$$\int_{x_1}^{x_2} R\,(x,y,y',\delta y,\delta y')\,dx$$

$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y}.\delta y'\right) dx$ adalah linear yang tergantung pada δy dan $\delta y'$.

Andaikan semua turunan parsial kedua dari fungsi

F (x,y,y′) yang tergantung pada y dan y′ tidak melebihi harga mutlak sebuah bilangan M , M > 0 dalam domain terbatas.

$$\int_{x_1}^{x_2} |\ R\ (x,y,y',\delta y,\delta y')|\ dx \le 2M \int_{x_1}^{x_2} ||\delta y||^2\ dx$$

$$\le 2M\ (x_2-x_1)\ ||\delta y||^2$$

Disini $||\delta y|| = \max\limits_{x_1 \le x \le x_2} (|\delta y|,|\delta y'|)$

jadi bentuk kedua adalah relatif orde dua terhadap $||\delta y||$.

Akibatnya, dengan menggunakan definisi differentiable pada $C_1\ [x_1,x_2]$ maka variasinya berbentuk :

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\ \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right] dx$$

CONTOH :

$$J\ [y(x)] = \int_0^1 (x^2 y'^2 - y^2)\ dx$$

dengan $y = x^2$, $\delta y = \varepsilon x^3$

bandingkan $\Delta J\ [y(x)]$ dengan $\delta J\ [y(x)]$

untuk ε = 1,0.1,0.01

SOLUSI :

$$\delta J = \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial y}\ \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right] dx$$

$$F = (\ x^2 y'^2 - y^2\ )$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2x^2 y'$$

$y = x^2 \qquad y' = 2x$

$\delta y = \varepsilon x^3 \qquad \delta y' = 3\varepsilon x^2$

$$\delta J = \int_0^1 (-2y\varepsilon x^3 + 2xy' .\ 3\varepsilon x^2)\ dx$$

$$= \int_0^1 (-2x^5\varepsilon + 12x^5\varepsilon)\ dx$$

$$= \int_0^1 10\varepsilon x^5\ dx$$

$$= \frac{10}{6}\ \varepsilon\ x^6 \Big|_0^1$$

$$= \frac{5}{3}\ \varepsilon$$

$$\Delta J = J\ [y + \delta y] - J\ [y]$$

$$= J\ [x^2 + \varepsilon x^3] - J\ [x^2]$$

$$= \int_0^1 [x^2(2x^2+3x^2\varepsilon)^2 - (x^2+\varepsilon x^3)^2]\ dx - \int_0^1 (x^2(2x^2)-x^4)\ dx$$

$$\Delta J = \frac{5}{3}\ \varepsilon + \frac{8}{7}\ \varepsilon^2$$

ε	ΔJ	δJ
1	2.810	1.677
0.1	0.181	0.167
0.01	0.0168	0.0167

2.6. VARIASI KEDUA

DEFINISI

Misalkan $J\ [y(x)]$ suatu fungsional yang didefinisikan dalam ruang norm M.

Fungsional $J[y(x)]$ mempunyai variasi kedua bila incremen $\Delta J = J\ [y + \delta y] - J\ [y]$

dapat dinyatakan dengan :

$\Delta J = L_1[\delta y] + \frac{1}{2} L_2[\delta y] + \beta \; ||\delta y||^2$

Dimana $L_1[\delta y]$ adalah fungsional linear, $L_2[\delta y]$ adalah fungsional kuadratis dan $\beta \rightarrow 0$ selama $||\delta y|| \rightarrow 0$.

Selanjutnya fungsional kuadratis $L_2[\delta y]$ disebut variasi kedua (turunan kedua) dari fungsional $J\,[y]$ dan dinotasikan dengan $\delta^2 J$.

Misalkan fungsi $\phi\,(\alpha) = J\,[y + \alpha\,\delta\,y]$ maka variasi kedua dari fungsi fungsional $J[y]$ dapat didefinisikan dalam bentuk turunan kedua dari fungsi $\phi\,(\alpha)$ pada titik $\alpha = 0$:

$$\delta^2 J = \frac{d^2\phi(\alpha)}{d\,\alpha^2}\bigg|_{\alpha = 0}$$

Pandang fungsional

$$J\,[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$$

fungsi $F(x,y,y')$ adalah kontinu pada $[x_1,x_2]$ mempunyai turunan ketiga yang kontinu dalam domain $C_1[x_1,x_2]$.

$\phi(\alpha) = J\,[y + \alpha\delta y]$, kita pandang $F(\alpha)$ merupakan fungsi dari α.

$\phi(\alpha) = J\,[\alpha]$

$$J\,[\alpha] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\alpha)\,dx$$

$$\frac{d}{d\alpha} J\,[\alpha]\bigg|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2} F(x,\alpha)\,dx\,\bigg|_{\alpha = 0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} F(x,\alpha)\, dx \Big|_{\alpha = 0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} F(x, y+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y')\, dx \Big|_{\alpha=0}$$

Misalkan :

$$z = y + \alpha\delta y$$

$$z' = y' + \alpha\delta y' \quad \text{, maka}$$

$$\frac{d}{d\alpha} J[\alpha]\Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{dz'}{d\alpha} \right) dx$$

$$\frac{dz}{d\alpha} = \delta y \qquad \frac{dz'}{d\alpha} = \delta y'$$

$$\frac{d}{d\alpha} J[\alpha]\Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta y' \right) dx$$

$$\delta^2 J = \frac{d^2 \phi(\alpha)}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\,\phi(\alpha)}{d\alpha} \right)\Big|_{\alpha=0}$$

$$\delta^2 J = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\,J[\alpha]}{d\alpha} \right)\Big|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta y' \right) dx \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta y' \right) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{dz}{d\alpha} \delta y + \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial z'} \frac{dz'}{d\alpha} \delta y + \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} \delta y' \frac{dz'}{d\alpha} + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z} \delta y' \frac{dz}{d\alpha} \right) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} (\delta y)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial z'} \delta y' \delta y + \right.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} \quad (\delta y')^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z} \quad \delta y \; \delta y' \Big] \, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (\delta y)^2 \quad + \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z \; \partial z'} \, 2 \; \delta y' \; \delta y \; + \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} \quad (\delta y')^2 \Big] \, dx \quad \Big|_{\alpha \, = \, 0}$$

$z = y + \alpha \; \delta y$

untuk $\alpha \longrightarrow 0$ maka $z = y$

$\partial z = \partial y$ dan $\partial z' = \partial y'$

$$\delta^2 J \quad = \int_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (\delta y)^2 \quad + \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \; \partial y'} \, 2 \; \delta y' \; \delta y \; + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \quad (\delta y')^2 \Big] \, dx$$

Jadi variasi kedua dari :

$$J \, [y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y') \, dx \quad \text{adalah}$$

$$\delta^2 J \quad = \int_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (\delta y)^2 \quad + \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \; \partial y'} \, 2 \; \delta y' \; \delta y \; + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \quad (\delta y')^2 \Big] \, dx$$