BAB II

TEORI DASAR

2.1. ALJABAR BOOLE

Aljabar Boole merupakan bagian matematika yang menyebabkan timbulnya rangkaian digital. Aljabar Boole adalah dasar matematika teori switching dan rancangan logika.

Definisi 1

Aljabar Boole adalah suatu aljabar ($B; \cdot, +, '; 0, 1$) yang terdiri dari suatu himpunan B (dimana memuat paling sedikit dua elemen 0 dan 1) dengan tiga operasi, operasi AND ($\cdot$) / pergandaan Boole, operasi OR (+)/ penjumlahan Boole dan operasi NOT (')/ komplemen yang didefinisikan pada himpunan tersebut, sedemikian hingga operasi-operasi tersebut mempunyai sifat :

a). Tertutup

(1). $(\forall x,y \in B)\ x.y \in B$

(2). $(\forall x,y \in B)\ x+y \in B$

(3). $(\forall x \in B)\ x' \in B$

b). Idempotent

(1). $(\forall x \in B)\ x.x = x$

(2). $(\forall x \in B)\ x+x = x$

c). Komutatif

(1). $(\forall x,y \in B)\ x.y=y.x$

(2). $(\forall x,y \in B)\ x+y=y+x$

d). Assosiatif

(1). $(\forall x,y,z \in B)\ x.(y.z) = (x.y).z$

(2). $(\forall x,y,z \in B)\ x+(y+z) = (x+y)+z$

e). Absorptif

(1). $(\forall x,y \in B)\ x.(x+y) = x$

(2). $(\forall x,y \in B)\ x+(x.y) = x$

f). Ditributif

(1). $(\forall x,y,z \in B)\ x.(y+z) = x.y + x.z$

(2). $(\forall x,y,z \in B)\ x+(y.z) = (x+y).(x+z)$

g). Elemen netral

(1). Elemen netral pergandaan. $(\forall 1 \in B)(\forall x \in B)\ x.1 = 1.x = x$

(2). Elemen netral penjumlahan. $(\forall 0 \in B)(\forall x \in B)\ (x+0) = (0+x) = x$

h). Komplemen

(1). $(\forall x \in B)(\exists !\ x' \in B)\ (x.x') = (x'.x) = 0$

(2). $(\forall x \in B)(\exists !\ x' \in B)\ (x+x') = (x'+x) = 1$

<u>Teorema 1</u>

$(\forall x,1,0 \in B)\ (x+1) = 1$ dan $(x.0) = 0$

Bukti :

$(x+1) = x+x+x' = x+x' = 1$

$(x.0) = x.x.x' = x.x' = 0$

(terbukti).

<u>Teorema 2</u>

$(\forall 1,0 \in B)\ 1' = 0$

Bukti :

$1' = 1'.1 = 0$

(terbukti).

<u>Teorema 3</u>

$(\forall x \in B)\ x'$ adalah tunggal

Bukti :

Misalkan ada dua komplemen terhadap x yaitu x'_1 dan x'_2 ,

sehingga $x+x'_1 = 1$, $x+x'_2 = 1$, $x.x'_1 = 0$, $x.x'_2 = 0$

maka $x'_2 = 1.x'_2 = (x+x'_1).x'_2 = xx'_2 + x'_1x'_2 = 0 + x'_1x'_2$

$= xx'_1 + x'_1x'_2 = (x+x'_2)x'_1 = 1.x'_1 = x'_1$ (terbukti).

Teorema 4

$(\forall x \in B)\ (x')' = x$

Bukti :

Misalkan $(x')' = y$ maka $(x').y = 0$ dan $(x') + y = 1$

tetapi $(x').x = 0$ dan $(x') + x = 1$

Jadi y dan x sebagai komplemen dari (x'), dan berdasarkan teorema 3 yaitu komplemen suatu elemen adalah tunggal, maka $y = x$ sehingga $(x')' = x$.

(terbukti).

Teorema 5 (Teorema De Morgan)

Dalam aljabar Boole berlaku :

1). $(x.y)' = x' + y'$

2). $(x+y)' = x' . y'$

Bukti :

1). $(x.y) + (x'+y') = (x+(x'+y')).(y+(x'+y'))$

$= ((x+x')+y').(y+(y'+x'))$

$= ((x+x')+y').((y+y')+x')$

$= (1+y').(1+x') = 1.1 = 1$

$(x.y) . (x'+y') = ((x.y)x') + ((x.y)y')$

$= (y(x.x')) + (x(y.y'))$

$= y(0) + x(0) = 0+0 = 0$

Maka $x.y$ dan $x'+y'$ adalah komplementer satu sama lain, dan berdasarkan pada teorema 3 (suatu komplemen adalah tunggal), maka $x.y$ satu-satunya komplemen $x'+y'$ dan sebaliknya, sehingga $(x.y)' = x'+y'$.

2). $(x+y) + (x'.y') = (x+(x'.y')) + (y+(x'.y'))$

$= ((x+x').(x+y')) + ((y+x').(y+y'))$

$= (1(x+y')) + ((y+x')1) = (x+y')+(y+x')$

$= (x+x') + (y'+y) = 1+1 = 1$

$(x+y).(x'.y') = ((x+y)x').((x+y)y')$

$= (x.x' + y.x').(x.y' + y.y')$

$= (0 + y.x').(x.y' + 0) = (y.x').(x.y')$

$= y.y'.x.x' = 0$

Maka $x+y$ dan $x'.y'$ adalah komplementer satusama lain dan berdasarkan pada teorema 3 (suatu komplemen adalah tunggal), maka $x+y$ satu-satunya komplemen $x'.y'$ dan sebaliknya, sehingga $(x+y)' = x'.y'$.

(terbukti).

<u>Teorema 6</u> (<u>Teorema De Morgan Generalisasi</u>)

1). $(x_1.x_2.\ldots.x_n)' = x_1'+x_2' + \ldots +x_n'$

2). $(x_1+x_2+ \ldots +x_n)' = x_1'.x_2'. \ldots .x_n'$

Bukti :

Dengan induksi matematis

1). Untuk n=1

$(x_1)' = x_1'$

Diassumsikan berlaku untuk n=k, maka

$(x_1.x_2. \ldots .x_k)' = x_1'+x_2'+ \ldots +x_k'$

Untuk n=k+1

$(x_1.x_2. \ldots .x_k.x_{k+1})' = ((x_1.x_2. \ldots x_k).x_{k+1})'$

$= (x_1.x_2. \ldots . x_k)' +x_{k+1}'$

$= x_1'+x_2'+ \ldots +x_k'+x_{k+1}'$

Jadi $(x_1 . x_2 . \ldots . x_n)' = x_1' + x_2' + \ldots + x_n'$

2). Untuk $n=1$

$(x_1)' = x_1'$

Diassumsikan berlaku untuk $n=k$, maka

$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)' = x_1' . x_2' . \ldots . x_k'$

Untuk $n=k+1$

$$
\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1})' &= ((x_1 + x_2 + \ldots + x_k) + x_{k+1})' \\
&= (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)' . x_{k+1}' \\
&= x_1' . x_2' . \ldots . x_k' . x_{k+1}'
\end{aligned}
$$

Jadi $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)' = x_1' . x_2' . \ldots . x_n'$

(terbukti).

Definisi 2

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel-variabel pada suatu aljabar Boole B. Suatu pemetaan F dari B ke dirinya sendiri adalah suatu fungsi Boole n variabel, dinyatakan dengan $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jika dapat dibangun menurut aturan-aturan berikut :

1). Misalkan a menunjukkan suatu konstanta pada B. Fungsi konstanta yaitu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$ dan fungsi proyeksi yaitu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$ adalah fungsi fungsi Boole.

2). Jika $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah suatu fungsi Boole, maka $(F(x_1, x_2, \ldots, x_n))'$ adalah suatu fungsi Boole.

3). Jika $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah fungsi-fungsi Boole, maka $F_1(x_1, x_2, \ldots, x\ ) + F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) . F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah fungsi-fungsi Boole.

4). Suatu fungsi yang dapat dibangun dalam jumlah berhingga dengan menggunakan aturan-aturan diatas, dan hanya fungsi demikian adalah suatu fungsi Boole.

Jadi suatu fungsi Boole adalah setiap fungsi yang dapat disusun dari fungsi konstanta dan fungsi proyeksi dalam jumlah berhingga dengan menggunakan operasi-operasi +, . ,' . Untuk suatu fungsi dari satu variabel, fungsi proyeksinya adalah fungsi identitas yaitu $F(x)=x$.

Contoh 1

$$F(x_1,x_2,x_3) = ax_1 + (bx_2x_3')'(x_2 + x_3') + b$$

Definisi 3

Suatu literal didefinisikan sebagai suatu tetapan (konstanta), variabel, atau variabel terkomplemen.

Contoh 2

$$F(x_1,x_2) = x_1x_2' + x_2 + a$$

Fungsi diatas terdiri dari 4 literal yaitu 2 variabel (x_1 dan x_2), 1 variabel terkomplemen (x_2') dan 1 konstanta (a).

2.2. GERBANG-GERBANG LOGIKA

2.2.3. GERBANG AND

Suatu gerbang AND mempunyai dua atau lebih input dan satu output, dan operasinya mengikuti definisi berikut

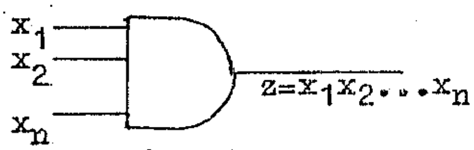
Definisi 4

Output dari gerbang AND menghasilkan keadaan 1 jika dan hanya jika semua input dalam keadaan 1.

Simbol untuk rangkaian AND diberikan dalam gambar 2.. dan de ngan ekspresi Boole untuk gerbang ini, serta tabel kebenaran dua input yang konsisten dengan definisi dari operasi diatas diberikan dalam tabel 1.

Tabel 1. Tabel kebenaran AND

input		output
x_1	x_2	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Gambar 2

2.2.2. GERBANG OR

Suatu gerbang OR mempunyai dua atau lebih input dan satu output, dan operasinya mengikuti definisi berikut

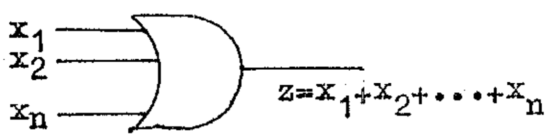
Definisi 5

Output dari gerbang OR menghasilkan keadaan 1 jika satu atau lebih input dalam keadaan 1.

Simbol untuk rangkaian gerbang OR diberikan dalam gambar 3 dan dengan ekspresi Boole untuk gerbang ini, dan tabel kebenarannya untuk dua input yang konsisten dengan definisi operasi OR diatas diberikan dalam tabel 2.

Tabel 2. Tabel kebenaran OR

input		output
x_1	x_2	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Gambar 3

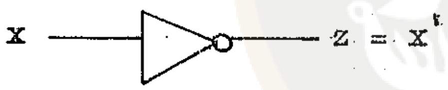
2.2.3. GERBANG NOT (INVERTER)

Suatu gerbang NOT (INVERTER) mempunyai satu input dan satu output, dan ini merupakan negasi logika yang operasinya mengikuti definisi berikut

Definisi 6

Output dari gerbang NOT dalamkeadaan 1 jika dan hanya jika inputnya tidak dalam keadaan 1 dan begitu pula sebaliknya.

Simbol untuk rangkaian NOT diberikan dalam gambar 4 dan dengan ekspresi Boole untuk negasi ini, dan tabel kebenarannya yang konsisten dengan definisi operasi NOT diatas diberikan dalam tabel 3. Output dari operasi NOT ini merupakan komplemen dari input.



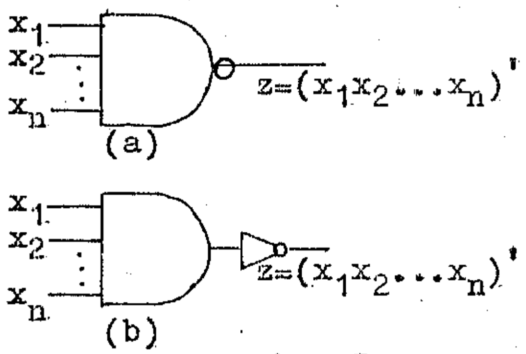
Gambar 4

Tabel 3. Tabel kebenaran NOT

input	output
x	z
0	1
1	0

2.2.4. GERBANG NAND

Gerbang NAND adalah suatu kombinasi dari gerbang AND dan NOT, oleh karena itu berdasarkan operasi gerbang AND dan NOT maka output dari suatu gerbang NAND adalah 1 jika satu atau lebih dari input adalah 0, dan 0 hanya jika semua input 1. Simbol untuk rangkaian NAND diberikan dalam gambar 5(a) dan gambar 5(b) merupakan rangkaian ekivalennya. Tabel kebenarannya untuk dua input diberikan dalam tabel 4.



Gambar 5

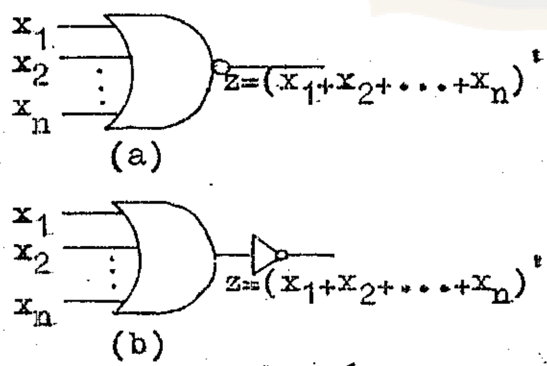
Tabel 4. Tabel kebenaran NAND

input		output
x_1	x_2	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.2.5. GERBANG NOR

Gerbang NOR adalah suatu kombinasi dari gerbang OR dan NOT, dan oleh karena itu berdasarkan operasi gerbang OR dan NOT, maka output dari gerbang NOR adalah 1 jika tak ada satu pun input dalam keadaan 1, dan 0 jika satu atau lebih dari input dalam keadaan 1.

Simbol untuk rangkaian gerbang NOR diberikan dalam gambar 6(a) dan gambar 6(b) merupakan rangkaian ekivalennya. Tabel kebenarannya untuk dua input diberikan dalam tabel 5.



Gambar 6

Tabel 5. Tabel kebenaran NOR

input		output
x_1	x_2	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2.2.5. GERBANG OR-EKSKLUSIF

Suatu gerbang OR-EKSKLUSIF mempunyai dua input dan satu output, dan operasinya mengikuti definisi berikut

Definisi 7

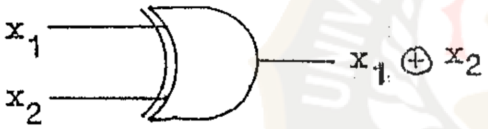
Output dari dua input gerbang OR-EKSKLUSIF adalah keadaan 1 jika satu dan hanya satu input adalah keadaan 1.

Definisi diatas ekivalen dengan statemen : Jika $x_1=1$ dan $x_2=0$, atau jika $x_1=0$ dan $x_2=1$ maka $z=1$.

Dalam ekspresi Boole $z = x_1x_2' + x_1'x_2$ dan bisa ditulis

$$z = x_1 \oplus x_2$$

Simbol untuk gerbang OR-EKSKLUSIF diberikan dalam gambar 7 dan tabel kebenarannya diberikan dalam tabel 6.



gambar 7

Tabel 6. Tabel kebenaran XOR

input		output
x_1	x_2	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.3. ALJABAR SWITCHING DAN FUNGSI SWITCHING

Dalam bagian akan dibahas aljabar Boole dua-elemen (B_2) yang disebut aljabar switching. Fungsi-fungsi yang didefinisikan pada B_2 disebut fungsi switching. Aljabar switching merupakan landasan matematik bagi analisa dan perancangan rangkaian-rangkaian switching yang membangun sistem-sistem digital. Aljabar switching ini mengandung dua-elemen yaitu 1 yang menyatakan bilangan terbesar dan 0 yang menyatak bilangan terkecil. Aljabar switching ditulis B(0, 1, +, . ,') dengan 0 dan 1 adalah nilai-nilai sinyal digital, tanda operasi + menyatakan rangkaian paralel, operasi . menyatakan rangkaian seri, dan operasi ' menyatakan komplemen.

Teorema 7

1). $F(x_1,x_2, \dots ,x_n) = x_1 . F(1,x_2, \dots ,x_n)+x_1' . F(0 ,x_2,\dots,x_n)$

$= x_1 . F(1,x_2,\dots,x_n) \oplus x_1' . F(0 ,x_2,\dots,x_n)$

2). $F(x_1,x_2, \dots ,x_n) = (x_1+F(0,x_2,\dots,x_n))(x_1'+F(1,x_2,\dots,x_n))$

Bukti :

Karena B(0, 1) maka

1). Masukkan nilai $x_1=0$ dan $x_1'=1$,akan didapatkan

$F(0,x_2,\dots,x_n)=0.F(1,x_2,\dots,x_n)+1.F(0,x_2,\dots,x_n)$

$=0+F(0,x_2,\dots,x_n) = F(0,x_2,\dots,x_n)$

Jika dimasukkan nilai $x_1=1$ dan $x_1'=0$, akan didapatkan

$F(1,x_2,\dots,x_n) = 1.F(1,x_2,\dots,x_n) + 0.F(0,x_2,\dots,x_n)$

$= F(1,x_2,\dots,x_n) + 0 = F(1,x_2,\dots,x_n)$

Jadi $F(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1.F(1,x_2,\dots,x_n)+x_1'.F(0,x_2,\dots,x_n)$

Masukkan nilai $x_1=0$ dan $x_1'=1$, akan didapatkan

$F(0,x_2,\dots,x_n) = 0.F(1,x_2,\dots,x_n) \oplus 1.F(0,x_2,\dots,x_n)$

$= 0 \oplus F(0,x_2,\dots,x_n)$

$= 0.(F(0,x_2,\dots,x_n))'+0'.F(0,x_2,\dots,x_n)$

$= 0 + 1.F(0,x_2,\dots,x_n) = F(0,x_2,\dots,x_n)$

Jika dimasukkan nilai $x_1=1$ dan $x_1'=0$, akan didapatkan

$F(1,x_2,\dots,x_n) = 1.F(1,x_2,\dots,x_n) \oplus 0.F(0,x_2,\dots,x_n)$

$= F(1,x_2,\dots,x_n) \oplus 0$

$= F(1,x_2,\dots,x_n).0'+ (F(1,x_2,\dots,x_n))'.0$

$= F(1,x_2,\dots,x_n).1 + 0 = F(1,x_2,\dots,x_n)$

Jadi $F(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1.F(1,x_2,\dots,x_n) \oplus x_1'.F(0,x_2,\dots,x_n)$

2). Masukkan nilai $x_1=0$ dan $x_1'=1$, akan didapatkan

$F(0,x_2,\dots,x_n) = (0+F(0,x_2,\dots,x_n))(1+F(1,x_2,\dots,x_n))$

$= F(0,x_2,\dots,x_n).1 = F(0,x_2,\dots,x_n)$

Jika dimasukkan nilai $x_1=1$ dan $x_1'=0$, akan didapatkan

$$F(1,x_2,\dots,x_n) = (1+F(0,x_2,\dots,x_n))(0+F(1,x_2,\dots,x_n))$$
$$= 1.F(1,x_2,\dots,x_n) = F(1,x_2,\dots,x_n)$$

Jadi $F(x_1,x_2,\dots,x_n) = (x_1+F(0,x_2,\dots,x_n))(x_1'+F(1,x_2,\dots,x_n))$

(terbukti).

<u>Teorema 8</u>

Setiap fungsi Boole $F(x_1,x_2, \dots ,x_n)$ dapat ditulis dalam Bentuk Jumlah-dari-Hasilkali Kanonik, yaitu

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum F(a_1,a_2,\dots,a_n)x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}$$

dimana $x_i^{a_i} = 1$ jika $x_i = a_i$ dan $x_i^{a_i} = 0$ jika $x_i \neq a_i$

Bukti :

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n) = F(x_1,x_2,\dots,x_n).1.1.\dots.1 + F(x_1,x_2,\dots,x_n).0.1\dots1 + F(x_1,x_2,\dots,x_n).1.0.1\dots1 + \dots + F(x_1,x_2,\dots,x_n).0.0\dots0$$

Jika $x_i=a_i$ maka $x_i^{a_i}=1$ dan jika $x_i \neq a_i$ maka $x_i^{a_i}=0$, sehingga

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n) = F(a_1,a_2,\dots,a_n)x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n} + F(x_1,a_2,\dots,a_n)x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n} + F(a_1,x_2,a_3,\dots,a_n)x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n} + \dots + F(x_1,x_2,\dots,x_n)x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\dots x_1^{a_n}$$

$$= F(a_1,a_2,\dots,a_n)x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n} + \underbrace{F(a_1,a_2,\dots,a_n)x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}}_{x_1 \neq a_1} + \underbrace{F(a_1,a_2,\dots,a_n)x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}}_{x_2 \neq a_2} + \dots + \underbrace{F(a_1,a_2,\dots,a_n)x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}}_{x_1 \neq a_1,x_2 \neq a_2,\dots,x_n \neq a_n}$$

Jadi $F(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum F(a_1,a_2,\dots,a_n)x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}$

dimana $x_i^{a_i} = 1$ jika $x_i= a_i$ dan $x_i^{a_i} = 0$ jika $x_i \neq a_i$

(terbukti).

Contoh 3

Tuliskan fungsi dalam Bentuk Jumlah-dari-Hasilkali kanonik

x_1	x_2	$F(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Penyelesaian

$$\begin{aligned} F(x\ ,x\ ) &= F(0,0)x_1^0x_2^0 + F(0,1)x_1^0x_2^1 + F(1,0)x_1^1x_2^0 + F(1,1)x_1^1x_2^1 \\ &= 0.x_1^0\,x_2^0 + 1.x_1^0\,x_2^1 + 0.x_1^1\,x_2^0 + 1.x_1^1\,x_2^1 \\ &= x_1^0\,x_2^1 + x_1^1\,x_2^1 \end{aligned}$$

$x_i^{a_i}$ dimaksudkan sebagai x_i jika $a_i = 1$ dan sebagai x_i' jika $a_i = 0$. Jadi fungsi contoh 3 adalah $F(x_1,x_2) = x_1'x_2 + x_1x_2$.

Teorema 9

Setiap fungsi Boole $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dapat ditulis dalam Bentuk Hasilkali-dari-Jumlah Kanonik, yaitu

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod (F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'}$$

dimana $x_i^{a_i'} = 0$ jika $x_i = a_i$ dan $x_i^{a_i'} = 1$ jika $x_i \neq a_i$

Bukti :

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = {} & (F(x_1,x_2,\ldots,x_n) + 0 + 0 + \ldots + 0)(F(x_1, x_2,\ldots,x_n) + 1 + 0 + \ldots + 0)(F(x_1,x_2,\ldots,x_n) + 0 + 1 + \\ & 0 + \ldots + 0) \ldots (F(x_1,x_2,\ldots,x_n) + 1 + 1 + \ldots + 1) \end{aligned}$$

Jika $x_i = a_i$ maka $x_i^{a_i'} = 0$ dan jika $x_i \neq a_i$ maka $x_i^{a_i'} = 1$,

sehingga

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = {} & (F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'}) \\ & (F(x_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'})(F(a_1,x_2,a_3,\ldots, \\ & a_n) + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'}) \ldots (F(x_1,x_2,\ldots,x_n) + x_1^{a_1'} + \\ & x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'}) \\ = {} & (F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'})(\underbrace{F(a_1,a_2,\ldots,a_n) \\ & + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'})}_{x_1 \neq a_1}(\underbrace{F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} +}_{x_2 \neq a_2} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\ldots + x_n^{a'_n})}\ \ldots\ \underbrace{(F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a'_1} + x_2^{a'_2} + \ldots + x_n^{a'_n})}_{x_1 \neq a_1\ ,\ x_2 \neq a_2\ ,\ \ldots,\ x_n \neq a_n}.$$

Jadi $F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod (F(a_1,a_2,\ldots,a_n)+x_1^{a'_1}+x_2^{a'_2}+\ldots+x_n^{a'_n})$

dimana $x_i^{a'_i} = 0$ jika $x_i = a_i$ dan $x_i^{a'_i} = 1$ jika $x_i \neq a_i$

(terbukti).

<u>Contoh 4</u>

Dari contoh 3 dapat ditulis dalam Bentuk Hasilkali-dari-Jumlah Kanonik

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2) &= (F(0,0)+x_1^1+x_2^1)(F(0,1)+x_1^1+x_2^0)(F(1,0)+x_1^0+x_2^1)(F(1,1) \\ &\quad +x_1^0+x_2^0) \\ &= (0 + x_1 + x_2)(1 + x_1 + x_2')(0 + x_1' + x_2)(1 + x_1' + x_2') \\ &= (x_1+ x_2)(x_1'+ x_2) \end{aligned}$$

Karena nilai $F(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ dari suatu fungsi switching hanya dapat bernilai 0 atau 1, maka bentuk kanonik fungsi switching (teorema 8 dan 9) dapat ditulis sebagai

Bentuk Jumlah-dari-Hasilkali Kanoniknya adalah

$$F(x\ ,x\ ,\ldots,x\ ) = \sum_{\substack{\text{semua kombinasi} \\ \text{dari nilai } x_1,x_2,\ldots,x_n \\ \text{dengan } F(a_1,a_2,\ldots,a_n)=1}} x_1^{a_1}\ x_2^{a_2}\ \ldots\ x_n^{a_n}$$

Bentuk Hasilkali-dari-Jumlah Kanoniknya adalah

$$F(x\ ,x\ ,\ldots,x\ ) = \prod_{\substack{\text{semua kombinasi} \\ \text{dari nilai } x_1,x_2,\ldots,x_n \\ \text{dengan } F(a_1,a_2,\ldots,a_n)=0}} (x_1^{a'_1} + x_2^{a'_2} + \ldots + x_n^{a'_n}\ )$$

Masing-masing term dari Jumlah-dari-Hasilkali disebut minterm dan term dari Hasilkali-dari-Jumlah disebut maxterm.

2.4. KALKULUS DIFFERENSIAL BOOLE

Dalam bagian diperkenalkan differensi Boole dari suatu fungsi Boole, baik differensi satu variabel maupun multipel variabel, dimana merupakan salah satu metode untuk mendeteksi kesalahan rangkaian.

Definisi 8

Differnsi Boole didefinisikan sebagai operasi OR-EKSKLUSIF antara dua fungsi Boole, fungsi yang satu menyatakan rangkaian normal dan yang lain menyatakan rangkaian salah.

Definisi 8 diatas dapat ditulis sebagai

Definisi 9 .

Differnsi Boole dari $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ terhadap x_i didefinisikan sebagai

$$\frac{dF(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{dx_i} = F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \oplus F(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n)$$

Teorema 10

$$\frac{dF(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{dx_i} = F(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n) \oplus F(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)$$

Bukti :

Berdasarkan Teorema 7(1)

$$F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=x_iF(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n) \oplus x_i'F(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)$$

Dengan definisi 9 diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dF(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{dx_i} &= (x_iF(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n) \oplus x_i'F(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)) \oplus \\ &\quad (x_i'F(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n) \oplus x_iF(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)) \\ &=(x_i \oplus x_i')(F(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n) \oplus F(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)) \\ &=F(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n) \oplus F(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

(terbukti).

Contoh 5

Differensi Boole dari fungsi $F(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2' + x_1x_3$ terhadap x_1 adalah

$$\begin{aligned}\frac{dF(x_1,x_2,x_3)}{dx_1} &= (x_1x_2' + x_1x_3) \oplus (x_1'x_2' + x_1'x_3)\\ &= (1.x_2' + 1.\ x_3) \oplus (0.\ x_2' + 0.\ x_3)\\ &= (x_2' + x_3) \oplus 0 = (x_2' + x_3).0' + (x_2' + x_3)'.0\\ &= x_2' + x_3\end{aligned}$$

Definisi 10

Differensi Boole dari suatu fungsi $F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = F(X)$ secara simultan terhadap variabel x_i dan x_j , didefinisikan sebagai

$$\frac{dF(X)}{d(x_ix_j)} = F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) + F(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_j',\ldots,x_n)$$

Untuk differensi Boole dari suatu fungsi $F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = F(X)$ secara simultan terhadap multipel variabel $x_i,x_j,\ldots,x_k$ adalah

$$\frac{dF(X)}{d(x_ix_j\ldots x_k)} = F(x_1,\ldots,x_i,x_j,\ldots,x_k,\ldots,x_n) \oplus (F(x_1,\ldots,x_i',x_j',\ldots,x_k',\ldots,x_n)$$

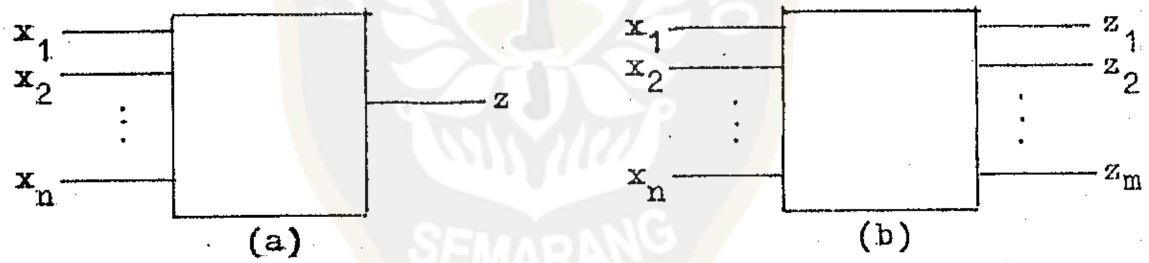
Contoh 6

Differensi Boole dari $F(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2' + x_1x_3$ secara simultan terhadap x_2 dan x_3 , adalah

$$\begin{aligned}\frac{dF(X)}{d(x_2x_3)} &= (x_1x_2' + x_1x_3) \oplus (x_1x_2 + x_1x_3')\\ &= (x_1x_2' + x_1x_3)(x_1x_2 + x_1x_3')' + (x_1x_2' + x_1x_3)'(x_1x_2 + x_1x_3')\\ &= (x_1x_2'+x_1x_3)(x_1x_2)'(x_1x_3')' + (x_1x_2')'(x_1x_3)'(x_1x_2+x_1x_3')\\ &= (x_1x_2'+x_1x_3)(x_1'+x_2')(x_1'+x_3) + (x_1'+x_2)(x_1'+x_3')(x_1x_2+x_1x_3')\\ &= x_1x_2'x_3 + x_1x_2'x_3 + x_1x_2x_3' + x_1x_2x_3'\\ &= x_1x_2'x_3 + x_1x_2x_3'\end{aligned}$$

2.5. RANGKAIAN KOMBINASIONAL

Suatu rangkaian kombinasional output tunggal dimaksudkan rangkaian yang mempunyai jumlah n berhingga dari input-input biner $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan suatu output biner z, seperti diperlihatkan pada gambar 8(a) dan pada sembarang waktu t nilai output z hanya bergantung pada nilai dari input-input pada waktu t, yaitu output saat ini hanya bergantung pada input input saat ini. Suatu sistem demikian tidak mempunyai memori karena outputnya tidak tergantung pada nilai input yang lalu. Rangkaian kombinasional multipel-output mempunyai m output $z_1, z_2, \ldots, z_m$ dimana output-output tersebut mempunyai sifat z diatas, dan diperlihatkan pada gambar 8(b)



Gambar 8

Definisi 11

Dalam suatu rangkaian logika , output primer adalah suatu saluran dimana output sinyalnya dapat diterima oleh bagian luar dari rangkaian, dan input primer adalah suatu saluran yang tidak dimasuki oleh saluran lain dalam rangkaian.

Definisi 12

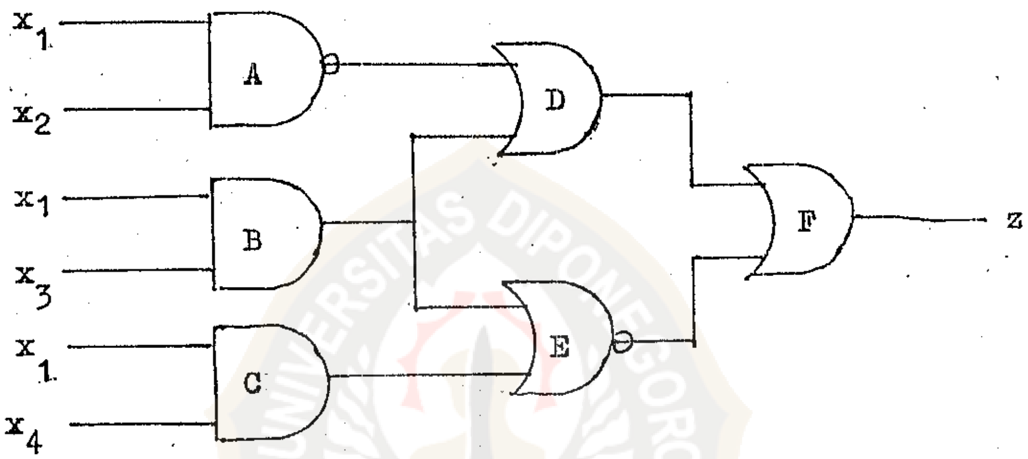
Lintasan transmisi (=lintasan) dari rangkaian kombinasional adalah graph terarah, terhubung, tidak melingkar dari suatu input primer atau saluran internal ke output primernya.

Definisi 13:

Fan-out dari suatu gerbang logika adalah jumlah gerbang-gerbang yang tergantung oleh gerbang tersebut.

Contoh 7

Perhatikan gambar 9



Gambar 9

Fan-out gerbang A adalah 1 yaitu gerbang D

Fan-out gerbang B adalah 2 yaitu gerbang D dan E

Fan-out gerbang C adalah 1 yaitu gerbang E

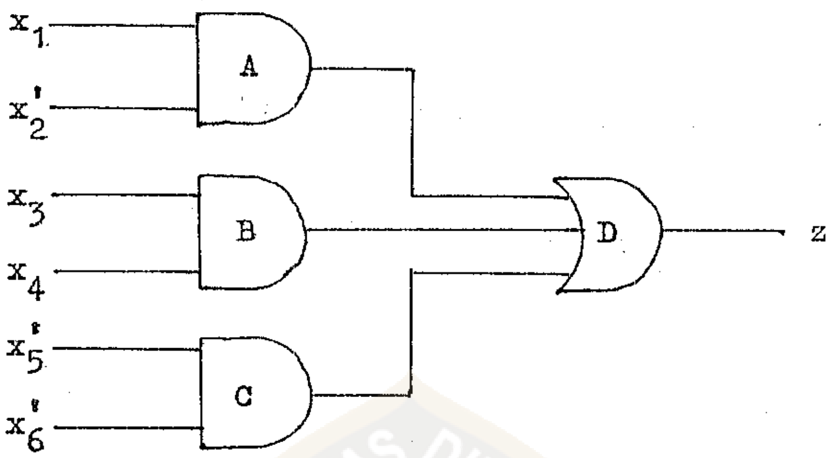
Fan-out gerbang D adalah 1 yaitu gerbang F

Fan-out gerbang E adalah 1 yaitu gerbang F

Definisi 14

Suatu rangkaian seperti-pohon (tree-like circut) didefinisikan sebagai rangkaian dimana masing-masing input adalah suatu saluran input independen terhadap rangkaiannya dan fan-out dari setiap gerbang adalah 1.

Contoh 8



Gambar 10