BAB II
MATRIK DAN SOLUSI BASIS

2.1 Matrik dan Vektor

2.1.1 Matrik

Matrik adalah daftar bilangan yang dituliskan dalam baris dan kolom seperti berikut,

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \ldots(2.1)$$

Matrik A diatas mempunyai m baris dan n kolom, dan dikatakan matrik A bertipe (m x n). Elemen a_{ij} menunjukkan anggota matriks pada baris ke i dan kolom ke j

Jika diberikan matrik $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ dan $C = (c_{ij})$, maka :

a. A = B bila dan hanya bila $a_{ij}=b_{ij}$ untuk setiap i dan j

b. Jika matrik A dan B bertipe sama maka A + B = C dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

c. Jika λ suatu bilangan real maka $\lambda A = (\lambda\, a_{ij})$.

d. Perkalian matrik A dan B, ditulis AB didefinisikan bila dan hanya bila jumlah kolom matrik A sama dengan jumlah baris matrik B. Perkalian matrik A(m x r) dan B(r x s) menghasilkan matrik C (m x s), dengan $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$, $i = 1,2,\ldots..m$ dan $j = 1,2,\ldots.n$.

e. Tranpose suatu matrik $A = (a_{ij})$, ditulis $A^T=(a^T_{ij})$ dengan $a^T_{ij} = a_{ji}$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Setiap matrik bujur sangkar dapat dikaitkan dengan suatu bilangan real yang disebut determinan. Determinan matrik A ditulis |A|. Matrik yang determinannya nol disebut matrik singular. Untuk setiap matrik nonsingular A terdapat dengan tunggal matrik A^{-1} sedemikian sehingga $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$, dengan I adalah matrik identitas yaitu matrik bujur sangkar yang elemen diagonal utamanya 1 dan elemen yang lainnya nol, dan A^{-1} disebut invers matrik A.

2.1.2 Vektor

Kolom atau baris suatu matrik sering dipandang sebagai vektor. Vektor $a = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ atau vektor $a = [a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n]$ disebut vektor n-komponen dan a_i, $i = 1, 2, \ldots n$ disebut komponen ke i dari a. Vektor baris ditulis dengan kurung biasa ( ) sedangkan vektor kolom menggunakan kurung siku [ ].

Hasil kali skalar (skalar product) dari dua buah vektor n-komponen a dan b didefinisikan sebagai bilangan yang besarnya sama dengan $\sum_{i=1}^{n} a_i\ b_i$.

Vektor $v \neq 0$ dikatakan leksikograpik positif jika elemen pertama yang tidak sama dengan nol adalah positif (dinotasikan sebagai $v \overset{L}{>} 0$). Sebagai contoh $v = (0,0,7,-6,4) \overset{L}{>} 0$. Vektor v dikatakan leksikograpik terbesar dari vektor u jika $v - u \overset{L}{>} 0$. Rangkaian dari vektor $\{ v^t \}$ dikatakan leksikograpik bertambah/meningkat jika $v^{t+1} - v^t > 0$ untuk semua t. Jika $-v \overset{L}{>} 0$, v dikatakan leksikograpik negatif (dinotasikan $v \overset{L}{<} 0$), dan jika $v - u \overset{L}{<} 0$ maka v dikatakan leksikograpik terkecil dari u. Notasi $v \overset{L}{\geq} 0$ berarti bahwa

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$\upsilon = 0$ atau $\upsilon \overset{L}{>} 0$.

Jika $\upsilon_o = (y_{oo}, 0, \ldots, 0)$ dan $\upsilon_i = (y_{io}, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ $i = 1,2,\ldots,m$, jika koefisien pada kolom m+1 dari baris i dan $y_{io} > 0$, $i = 1,2,\ldots,m$ maka $\upsilon_i \overset{L}{>} 0$

2.2 Ruang Euclid

Ruang Euclid dimensi n, dilambangkan dengan E^n, didefinisikan sebagai himpunan semua vektor $a = (a_1, \ldots a_n)$ dan vektor ini diberikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar seperti pada matrik.

Vektor $a \in E^n$ dikatakan merupakan kombinasi linear dari vektor $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dengan $a_i \in E^n$, jika :

$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k$ dengan λ_i skalar.

Himpunan vektor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dari E^n disebut tak bebas linear jika terdapat λ_i yang tidak sama dengan nol sedemikian sehingga $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$ ....(2.2) jika (2.2) hanya dipenuhi untuk $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$ maka himpunan vektor tersebut dikatakan bebas linear.

$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $a_i \in E^n$ dan $m > 2$ akan tak bebas linear bila dan hanya bila terdapat salah satu vektor yang merupakan kombinasi linear vektor yang lain.

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i \in E^n$ disebut basis jika $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ bebas linear dan himpunan tersebut membangun seluruh ruang E^n. Basis untuk E^n tidak tunggal.

Jika $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i \in E^n$ basis untuk E^n maka setiap anggota E^n dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear vektor $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.3 Definisi dan teorema

2.3.1 Solusi basis

Tinjau m persamaan yang bebas linear, dengan r variabel yang tak diketahui (m < r).

$$Ax = b \qquad \ldots\ldots\ldots(2.3)$$

dimana

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} \\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mr} \end{bmatrix} \in R^m$$

Definisi 2.3.1.1

Ambil (r-m) variabel bernilai nol, bila sistem persamaan yang terjadi mempunyai solusi maka solusi ini bersama-sama dengan (r-m) variabel yang bernilai nol dikatakan solusi basis sistem (2.3).

Tulis A = ($P_1, P_2, \ldots, P_r$), dimana P_j (j= 1,2,...,r) menggambarkan j vektor kolom dari matrik A yaitu :

$$P_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots\ldots\ldots, P_1 = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{bmatrix}.$$

maka (2.3) dapat ditulis sebagai

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots\ldots + x_rP_r = b$$

kita sebut x_j variabel yang berkaitan dengan P_j. Misalkan m vektor dari $P_1, P_2, \ldots, P_r$ adalah bebas linear. Jika (r-m) variabel yang bukan berkaitan dengan m vektor dari P_1 , $P_2, \ldots, P_r$, yang bebas linear tersebut diambil nol, jelas bahwa sistem persamaan yang terjadi mempunyai solusi

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dan solusi bersama-sama dengan (r-m) variabel diatas merupakan solusi basis.

Contoh 2.1 : Tinjau sistem persamaan

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

disini $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$A = (P_1, P_2, P_3)$ dimana

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ambil $x_3 = 0$,

maka diperoleh solusi sistem persamaan tersebut adalah $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Jadi (2,-1,0) merupakan solusi basis.

Ambil $x_1 = 0$,

maka diperoleh solusi sistem persamaan adalah $x_2 = -1$, $x_3 = -2$. Jadi (0,-1 -2) merupakan solusi basis. Sekarang jika diambil $x_2 = 0$, maka akan terdapat persamaan $x_1 - x_3 = 1$ dan $x_1 - x_3 = 3$ yang tidak akan mempunyai solusi. Sehingga $x_2 = 0$ tidak memberikan solusi basis.

Terlihat bahwa untuk $x_3 = 0$, vektor-vektor P_1 dan P_2 bebas linear. Untuk $x_1 = 0$, vektor-vektor P_2 dan P_3 bebas linear, sedangkan untuk $x_2 = 0$, vektor-vektor P_1, P_3 bukan bebas linear.

<u>**Definisi 2.3.1.2**</u>

Variabel-variabel yang tidak diambil nol untuk menghasilkan solusi basis disebut basis. Dengan kata lain variabel-variabel yang berkaitan m vektor yang bebas

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

linear diantara $P_1, P_2, \ldots, P_r$ disebut basis.

Contoh 2.2 : dalam contoh *2.1* diatas

$\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$ basis, tetapi $\{x_1, x_3\}$ bukan basis.

Definisi 2.3.1.3

Solusi basis yang memenuhi syarat ketidak negatipan disebut solusi basis fisibel.

Contoh 2.3 : tinjau sistem persamaan

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$

Solusi basis diberikan oleh (2,-1,0), (5/3,0,2/3) dan (0,5,4). Solusi basis fisibelnya (5/3,0,2/3) dan (0,5,4).

Definisi 2.3.1.4

Solusi basis fisibel yang persis ada m komponen yang positif disebut solusi basis fisibel nondegenerasi.

Contoh 2.4: Dalam contoh *2.3* diatas (5/3,0,2/3) dan (0,5,4) solusi basis fisibel nondegenerasi.

Definisi 2.3.1.5

Solusi fisibel yang mengoptimumkan fungsi sasaran (obyektif) disebut solusi optimum.

Definisi 2.3.1.6

Solusi basis fisibel yang mengoptimumkan fungsi obyektif disebut solusi basis optimum.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.3.2 Himpunan konvek

Misalkan diberikan titik-titik yang berbeda :

$x_i = (x_1, x_2, \ldots . . x_n)$ diruang dimensi n, untuk

$0 \le \lambda \le 1$ dan $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; x_i$

disebut "kombinasi konvek" dari x_i.

<u>*contoh 2.5*</u> : 1. $x = 1/2 \; x_1 + 1/2 \; x_2$

2. $x = 1/2 \; x_1 + 1/4 \; x_2 + 1/4 \; x_3$

3. $x = x_1 + 1/2 \; x_2 - 1/2 \; x_3$

terlihat bahwa untuk contoh 1 dan 2 adalah kombinasi konvek, sedangka untuk contoh 3 bukan kombinasi konvek, karena $\lambda_3 = -1/2 < 0$.

Himpunan C diruang dimensi n disebut konveks apabila untuk setiap x_1, x_2 di C dengan $x_1 \neq x_2$ dan untuk setiap λ $0 \le \lambda \le 1$, vektor

$$x = \lambda \; x_1 + (1-\lambda) \; x_2 \in C$$

atau dengan kata lain ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut juga didalam C

<u>*contoh 2.6*</u> :

(1) konveks (2) konveks (3) tak konveks

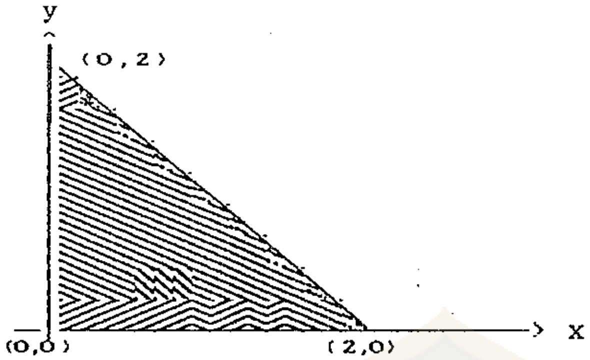
Misalkan titik S didalam himpunan konveks C, S dikatakan titik *ekstrim* atau *verteks* dari C, apabila tidak terdapat x_1 dan x_2 di C sehingga

$$S = \lambda \; x_1 + (1-\lambda) \; x_2, \quad \text{untuk } 0 \le \lambda \le 1.$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

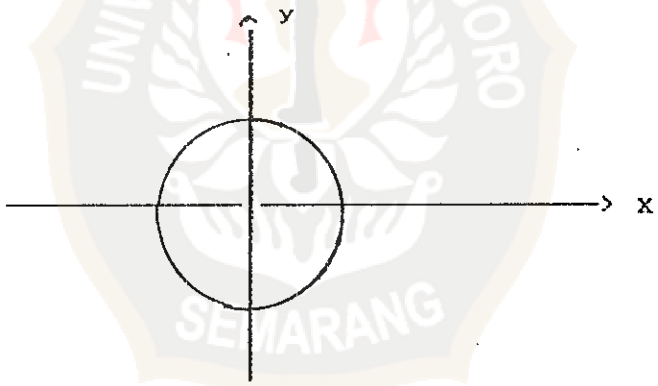
contoh 2.7 :

1. $C = \{ (x,y) \mid x + y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \}$



C mempunyai titik ekstrim di (0,0), (2,0), (0,2).

2. $C = \{ (x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$



C mempunyai titik ekstrim di (x,y) dengan $x^2 + y^2 = 1$

Definisi 2.3.2.1

Himpunan semua penyelesaian fisibel masalah program linear merupakan himpunan konveks.

Definisi 2.3.2.2

Fungsi sasaran masalah program linear akan mencapai nilai optimum (jika ada), paling sedikit pada satu titik ekstrim.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.4 Solusi optimum masalah program linear

Solusi optimum harus merupakan suatu solusi basis fisibel. Untuk membuktikan hal tersebut tinjau 3 teorema dibawah ini.

Sebut $Q = \{ x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0 \}$ yaitu himpunan semua fisibel dari masalah program linear.

Teorema 2.4.1

Himpunan Q adalah konveks.

Bukti :

Ambil $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ di Q dengan $x^{(1)} \neq x^{(2)}$. Karena Q merupakan himpunan dari semua solusi fisibel, maka :

$A\ x^{(1)} = b,\quad x^{(1)} \geq 0$ dan

$A\ x^{(2)} = b,\quad x^{(2)} \geq 0$

Akan ditunjukkan bahwa $x = \lambda\ x^{(1)} + (1-\lambda)\ x^{(2)}$ $0 \leq \lambda \leq 1$ akan berada di Q.

$$\begin{aligned} A\ x &= A\ [\ \lambda\ x^{(1)} + (1-\lambda)\ x^{(2)}\ ] \\ &= \lambda\ A\ x^{(1)} + (1-\lambda)\ A\ x^{(2)} \\ &= \lambda\ b + (1-\lambda)\ b = b. \end{aligned}$$

Karena $x^{(1)} \geq 0$, $x^{(2)} \geq 0$ dan $(1-\lambda) \geq 0$, maka

$x = \lambda\ x^{(1)} + (1-\lambda)\ x^{(2)} \geq 0$ jadi $x \in Q$, sehingga Q konveks.

Teorema 2.4.2

$x_o \in Q$ adalah titik ekstim jika dan hanya jika x_o adalah solusi basis fisibel untuk sistem $Ax = b$, $x \geq 0$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Bukti :

($\Leftarrow$) Misalkan $x_o = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ suatu solusi basis fisibel dan anggap $x_i \geq 0$ $1 \leq i \leq m$, $(1 \leq m \leq k)$ dan $x_i = 0$ $(m+1 \leq i \leq n)$.

Andaikan ada dua solusi fisibel Y dan Z yang berlainan dan tidak sama dengan x, sehingga :

$x = \lambda Y + (1-\lambda) Z$ untuk suatu $0 \leq \lambda \leq 1$. Dari hubungan ini untuk (n-m) komponen berlaku :

$$\lambda y_i + (1-\lambda) z_j = 0 \quad (j = m+1, \ldots, n).$$

karena $\lambda > 0$, $(1-\lambda) > 0$, y_i dan z_j dua-duanya non negatif, maka haruslah $y_j = 0$ dan $z_j = 0$, $(j = m+1, \ldots, n)$. Karena X, Y dan Z solusi-solusi fisibel maka haruslah $AX \neq b$, $AY \neq b$ $AZ = b$, maka $A(X - Y) = 0$ dan $A(X - Z) = 0$ atau

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i) A_i = 0 \quad \text{dan} \quad \sum_{i=0}^{m} (x_i - z_i) A_i = 0$$

dimana $A_1, A_2, \ldots, A_m$ kolom-kolom dari A yang bebas linear (bebas linear karena solusi basis fisibel). Ini mengakibatkan

$$x_i - y_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

$$x_i - z_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

sehingga $X = Y = Z$. Hal ini bertentangan $X \neq Y$ dan $X \neq Z$. Jadi X adalah verteks.

($\Rightarrow$)Misalkan X^* titik ekstrim (verteks) dari Q = daerah fisibelnya. Misalkan $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ dengan $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$ positif dan $x_{m+1}^*, x_{m+2}^*, \ldots, x_n^*$ adalah nol. Akan ditunjukkan kolom-kolom $A_1, A_2, \ldots, A_m$ dari matrik A adalah bebas linear. Andaikan kolom-kolom matrik tersebut bergantung linear, maka terdapat bilangan-bilangan $y_1, y_2, \ldots, y_k$ yang tidak semua nol, sehingga :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \ A_i = 0 \qquad \qquad ......(2.5.1)$$

Didefinisikan bilangan positif α sebagai :

$$\alpha = \min_{i \le i \le k} \left| \frac{x_i^*}{y} \right| , \ y_i = 0 \qquad \qquad ....(2.5.2)$$

pilih bilangan $\delta > 0$, $\delta > \alpha$ sehingga,

$$x_i^* + \delta \ y_i > 0 \qquad \qquad ....(2.5.3)$$

dan $x_i^* + \alpha \ y_i > 0$ ....(2.5.4)

untuk $i = 1,2,..,k$. Ambil vektor $Y = (\ y_1,y_2,...y_m,0,..,0)$ di R^n. Dari (2.5.3) dan (2.5.4) jelas bahwa $X_1 \ge 0$ dan $X_2 \ge 0$. Selanjutnya dari definisi Y dan (2.5.1) didapat :

$$A \ Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \ A_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \ A_i = 0 \qquad \qquad ....(2.5.5)$$

Jadi dari (2.5.5) diperoleh :

$$A \ X_1 = A \ X^* + \delta \ A \ Y = A \ X^* = b$$

$$A \ X_2 = A \ X^* - \delta \ A \ Y = A \ X^* = b$$

mengingat X^* adalah solusi fisibel. Jadi X_1 dan X_2 adalah solusi fisibel yang berlainan. Selanjutnya berlaku :

$$X^* = 1/2 \ X_1 + 1/2 \ X_2$$

Ini bertentangan dengan titik ekstrim. Maka pengandaian tidak benar dan haruslah kolom A_1, $A_2,....,A_m$ bebas linear. Karena paling banyak ada n vektor dari A yang bebas linear, maka $m \le n$,sehingga paling sedikit m komponen lainnya dari X^* adalah nol. Jadi X^* adalah solusi basis fisibel.

<u>Teorema 2.4.3</u>

Misalkan solusi optimum masalah program linear : Maksimumkan $Z = A \ X$ terhadap $A \ X = b$, $X \ge 0$,adalah terbatas (berhingga). Maka solusi optimum tersebut

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

akan sama untuk semua kombinasi konveks dari titik ekstrim tersebut. Misalkan fungsi obyektif mencapai nilai maksimum pada titik-titik ekstim E_1, E_2, $\ldots, E_p$. Sehingga kita peroleh :

$$CE_1 = CE_2 = \ldots = CE_p = \rho$$

Ambil X suatu kombinasi konveks dari titik-titik ekstrim E_1, E_2, $\ldots, E_p$, sehingga

$$X = a_1E_1 + a_2E_2 + \ldots + a_pE_p$$

dimana $0 \leq a_i \leq 1$ dan $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 1$

maka $Z = C\,X$

$$= C\,(a_1E_1 + a_2E_2 + \ldots + a_pE_p)$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_p).\ \rho = \rho$$

$$Z = \rho$$

Sehingga teorema terbukti.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)