BAB I

PENDAHULUAN

1.2. Pengertian

Pandang suatu sistem persamaan differensial dimensi dua :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1,x_2) \qquad \ldots\ldots (1)$$

dengan $x_1 = x_1(t)$ dan $x_2 = x_2(t)$

Jika pada sisi sebelah kanan dari sistem persamaan differensial (1) yaitu $f_1(x_1,x_2)$ dan $f_2(x_1,x_2)$, variabel bebas t tidak tampak/muncul, **maka** sistem persamaan differensial (1) dikatakan sebagai sistem persamaan differensial yang autonomous atau secara singkatnya sistem autonomous.

Kurva dari sistem autonomous (1), digambarkan pada bidang (x_1,x_2) yang dinamakan **bidang fase**.

Contoh 1

a. Diketahui sistem persamaan differensial dimensi dua :

$$\frac{dx_1}{dt} = 2\ t\ x_1 + 3\ t^2\ x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3\ x_1 + 5\ t\ x_2$$

dengan $x_1 = x_1(t)$ dan $x_2 = x_2(t)$

Bukan sistem autonomous, karena masih terdapat variabel bebas t.

b. Diketahui sistem persamaan differensial dimensi dua : $\frac{dx_1}{dt} = 5\ x_1 + 2\ x_2$

$\frac{dx_2}{dt} = 4\ x_1 - 2\ \ x_2$

dengan $x_1 = x_1(t)$ dan $x_2 = x_2(t)$

Adalah sistem autonomous, karena variabel bebas t tidak tampak/muncul.

Trayektori C adalah suatu kurva pada bidang fase (x_1, x_2) yang menggambarkan solusi $X = (x_1(t), x_2(t))$ dari sistem autonomous (1) untuk $-\infty < t < \infty$.

Trayektori C ini dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu trayektori positip C^+ yang menggambarkan solusi $X = (x_1(t), x_2(t))$ untuk $t_o \leq t < \infty$, dan trayektori negatip C^- yang menggambarkan solusi $X = (x_1(t), x_2(t))$ untuk $-\infty < t \leq t_o$.

Himpunan semua titik limit dari C^+ disebut dengan himpunan limit C^+ dan dinotasikan dengan $L^+(C)$, sedangkan himpunan semua titik limit dari C^- disebut dengan himpunan limit C^- dan dinotasikan dengan $L^-(C)$.

Theori Poincare-Bendixson adalah suatu theori yang membicarakan sifat dan kelakuan dari trayektori C^+ dan himpunan limit $L^+(C)$ di sekitar titik kritisnya, dan bilamana suatu trayektori C^+ akan berupa trayektori periodik.

Sifat daripada himpunan limit $L^+(C)$ diantaranya bahwa himpunan ini merupakan himpunan yang tertutup, terhubung dan bukan himpunan yang kosong, sedangkan kelakuan dari trayektori positip C^+ dan himpunan limit $L^+(C)$, diantara nya bahwa :

1. Jika antara C^+ dan $L^+(C)$ terdapat titik berserikat (common point) maka trayektori C^+ ini merupakan trayektori periodik
2. Jika himpunan limit $L^+(C)$ memuat trayektori periodik maka $L^+(C)$ identik dengan trayektori periodik tersebut
3. Jika himpunan limit $L^+(C)$ hanya memuat titik regular, maka :
   (i). C^+ identik dengan $L^+(C)$ merupakan trayektori periodik, atau
   (ii). $L^+(C)$ merupakan trayektori periodik
4. Jika himpunan limit $L^+(C)$ hanya memuat titik kritis, maka :
   (i). trayektori positip C^+ akan mendekati titik kritis tersebut untuk $t \longrightarrow \infty$, atau
   (ii). $L^+(C)$ merupakan trayektori periodik, atau
   (iii). $L^+(C)$ terdiri dari himpunan-himpunan trayektori yang masing-masing menuju ke suatu titik kritis untuk $t \longrightarrow \pm\infty$

2.2. Permasalahan

Permasalahan pokok yang timbul pada Theori Poincare-Bendixson diantaranya :

1. Bagaimana kelakuan dari trayektori C^+ dan himpunan limit $L^+(C)$, jika himpunan limit $L^+(C)$ hanya memuat titik regular
2. Bagaimana kelakuan dari trayektori C^+ dan himpunan limit $L^+(C)$, jika himpunan limit $L^+(C)$ hanya memuat

titik kritis

1.3. Pembahasan

Dengan berdasarkan definisi dan theorema dasar, akan dibahas diantaranya pengertian-pengertian yang lebih mendalam dari sistem autonomous, solusi dan trayektorinya, himpunan limit dari trayektori serta sifat-sifat dan kelakuan dari trayektori dan himpunan limit dari trayektori.