BAB IV

K E S I M P U L A N

Dari pembahasan pembahasan beserta contoh contoh nya yang ada pada bab II, dan III . Dapatlah ditarik ke - simpulan :

1. Pandang R adalah suatu ring dan I_i ; $i = 1,2,\ldots$ adalah ideal kanan dari R. R dikatakan memenuhi Syarat Rangkaian Menurun (Descending Chain Condition) pada ideal kanan dari R , jika terdapat suatu bilangan bulat positif k sedemikian sehingga untuk suatu rangkaian menurun ideal kanan I_i , yaitu

   $$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \ \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$$

   berlaku :

   $$I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \ldots$$

2. Misalkan A adalah ideal kanan dari ring R, maka A disebut ideal kanan nilpotent jika terdapat suatu bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $A^n = 0$ dengan A^n dimaksudkan pergandaan A sebanyak n kali. yaitu :

   $$A^n = A_1 . A_2 . A_3 . \ \ldots \ A_n \ \ ; \ A_1 = A_2 = \ldots A_n = A$$

3. Jumlahan dari dua buah ideal kanan (kiri) nilpotent merupakan ideal kanan (kiri) nilpotent.

4. Jika R adalah suatu ring dan N adalah jumlahan ideal kanan nilpotent dari ring R, maka N juga memuat semua ideal kiri nilpotent.

5. Jika R adalah suatu ring dan N merupakan radical dari ring R, maka N merupakan ideal nilpotent.

6. Setiap ring semi sederhana maka ring tersebut mempunyai radical , yaitu ideal nol.

TAMBAHAN

Pandang Ring M_n yaitu himpunan matrik segitiga atas berukuran n x n atas ring pembagi $\triangle$.

$$M_n = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \middle| \; m_{ij} \in \triangle \right\}.$$

Pandang kembali P_n yaitu himpunan matrik segitiga atas berukuran nxn atas ring pembagi, dengan elemen-elemen pada diagonal utamanya = 0.

$$P_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ 0 & 0 & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \; p_{ij} \in \triangle \right\}$$

Akan dibuktikan bahwa P_n merupakan ideal nilpotent dalam ring M_n.

Terlebih dahulu dibuktikan bahwa P_n merupakan ideal.

(i). Diambil sembarang elemen dalam P_n , misalkan :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in P_n$$

maka :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & c_{34} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in P_n$$

dengan $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$; $i,j = 1,2,\ldots,n$

(ii). Diambil sembarang elemen dalam P_n dan sembarang elemen dalam M_n , misalkan :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in P_n \quad \text{dan}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \in M_n$$

maka :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & \cdots & m_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & \cdots & m_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 0 & d_{23} & d_{24} & \cdots & d_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & \cdots & d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in P_n$$

dengan $d_{ij} = \sum_{t:1}^{n} a_{it} m_{tj}$, $i < t \leqslant j$

$i,j = 1, 2, 3 \ldots, n$

Dari (i) dan (ii) berarti P_n memenuhi aksioma ideal, dengan demikian P_n merupakan ideal.

Selanjutnya apabila P_n tersebut digandakan dengan dirinya sendiri sebanyak n kali, dengan komposisi pergandaan yang sesuai dengan matrik, yaitu :

$$(P_n)^n = (P_n)_1 . (P_n)_2 . (P_n)_3 \ldots (P_n)_n$$

Akan menghasilkan matrik berukuran nxn yang terdiri elemen nol pada setiap posisi, yaitu :

$$\begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & 0_{13} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & 0_{23} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_{n1} & 0_{n2} & 0_{n3} & \cdots & 0_{nn} \end{pmatrix}$$

Dengan demikian terdapatlah bilangan bulat positif yaitu n sedemikian sehingga ideal $(P_n)^n = (0)$.

Jadi terbukti ideal P_n dalam ring M_n merupakan ideal nilpotent.