BAB II

T E O R I   D A S A R

Dalam bab ini, tidak lagi dibahas tentang ring, karena telah banyak diberikan pada perkuliahan. Namun , yang akan dibahas adalah beberapa hal atau masalah yang berkaitan dengan ring. Sebagai pengingat, berikut ini sekilas tentang ring.

Definisi Ring

Pandang R suatu himpunan yang tak hampa, dan pada R dilengkapi dua hukum komposisi (operasi) yaitu "penjumlahan (+)" dan "pergandaan (.)". Untuk selanjutnya ditulis dengan : "(R , + , .)".

(R , + , .) dikatakan suatu ring, jika memenuhi aksioma aksioma berikut :

a. Terhadap penjumlahan :

- Tertutup : $(\forall a,b \in R)(\exists! c \in R).\ a + b = c.$
- Assosiatif :

  $(\forall\ a,b,c \in R)\ .\ (a + b) + c = a + (b + c).$
- Mempunyai elemen netral :

  $(\exists\ e \in R)(\forall\ a \in R)\quad e + a = a + e = a$
- Setiap elemen dalam R mempunyai invers dalam R :

  $(\forall\ a \in R)(\exists\ a^{-1} \in R)\quad a^{-1} + a = a + a^{-1} = e.$
- Komutatif.

  $(\forall\ a,b \in R)\quad a + b = b + a\ .$

b. Terhadap pergandaan :

- Tertutup : $(\forall a,b \in R)\ (\exists! c \in R)\quad a \cdot b = c$
- Assosiatif :

$(\forall a,b,c \in R)\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

c. Berlaku hukum distributif :

$$(\forall a,b,c \in R)\quad a.(b+c) = a.b + a.c$$
$$(b+c).a = b.a + c.a$$

Berikut ini contoh contoh ring yang telah banyak dibuktikan kebenarannya.

(1). $(Z, +, .)$ yaitu himpunan bilangan bulat dengan penjumlahan dan pergandaan.

(2). $(W_n,+,.)$ yaitu himpunan bilangan bulat kelipatan n, dengan penjumlahan dan pergandaan bilangan bulat.

(3). $(Q,+,.)$ yaitu himpunan bilangan rasional dengan penjumlahan dan pergandaannya.

(4). $(\bar{Z}_n,+,.)$ himpunan kelas residu modulo n, dengan pen jumlahan dan pergandaan didefinisikan :

$$\bar{a},\bar{b} \in Z_n \text{ maka } \bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \text{ dan } \bar{a}.\bar{b} = \overline{ab}$$

(5). $(K_n,+,.)$ himpunan matrik berukuran n x n dari himpunan bilangan bulat.

$$K_n = \left\{ \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \middle|\ \begin{array}{l} k_{ij} \in Z\ , \\ i,j = 1,2,\ldots,n \end{array} \right\}$$

Dengan penjumlahan dan pergandaan didefinisikan :

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (k_{11}+m_{11}) & (k_{12}+m_{12}) & \cdots & (k_{1n}+m_{1n}) \\ (k_{21}+m_{21}) & (k_{22}+m_{22}) & \cdots & (k_{2n}+m_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (k_{n1}+m_{n1}) & (k_{n2}+m_{n2}) & \cdots & (k_{nn}+m_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

dengan ;

$$p_{ij} = \sum_{t=1}^{n} (k_{it} \cdot m_{tj}) \quad ; \ i,j = 1,2,\ldots,n$$

2.1. BEBERAPA BENTUK KHUSUS RING

Berikut ini akan didefinisikan beberapa bentuk khusus ring dengan sifat sifat yang dimilikinya.

Definisi 2.1.1

Pandang (R,+,.) adalah suatu ring. R disebut "Ring komutatif", jika untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a.b = b.a$

Apabila $a.b \neq b.a$, maka ring demikian bukan ring komutatif.

Contoh 2.1.2

(1). Ring himpunan bilangan bulat $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\}$ merupakan ring komutatif..

(2). K_2 yaitu himpunan matrik berukuran 2x2 dari himpunan bilangan bulat Z.

$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \;\middle|\; k_{ij} \in Z \;\;,\;\; i,j = 1,2 \right\}$$

Sesuai contoh (5) definisi ring, maka K_2 merupakan ring Akan dibuktikan bahwa K_2 bukan ring komutatif.

Misalkan diberikan $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \in K_2$

maka : $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 14 & -27 \end{pmatrix}$

sedangkan, $\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -32 \\ 2 & -29 \end{pmatrix}$

Ternyata $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Terbukti bahwa K_2 bukan ring komutatif.

__Definisi 2.1.3__

Pandang (R,+,.) adalah ring. R disebut "ring dengan elemen satuan", jika terdapat suatu elemen $e \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku : $a.e = e.a = a$

Dalam himpunan bilangan bulat $Z = \{0, +1, +2, \ldots.\}$. Z mempunyai elemen satuan, yaitu 1 (satu). Dalam K_2 yaitu himpunan matrik berukuran 2x2, elemen satuannya : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tidak semua ring mempunyai elemen satuan.

Contoh 2.1.4.

Pandang $W_3 = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots\}$ yaitu himpunan bilangan bulat kelipatan 3. W_3 jelas ring, tapi bukan ring dengan elemen satuan, sebab untuk setiap $a, b \in W_3$ $a.b \neq a$ ataupun $a.b \neq b$

Definisi 2.1.5

Pandang R suatu ring. Suatu elemen $a \in R$ dan $a \neq 0$ maka a disebut "Pembagi nol kiri" jika terdapat suatu elemen $b \in R$, dan $b \neq 0$ sedemikian sehingga $a.b = 0$. Dengan cara yang sama, suatu elemen $r \in R$ dan $r \neq 0$, maka r disebut "Pembagi nol kanan" jika terdapat $p \in R$, $p \neq 0$ sedemikian sehingga $p.r = 0$.

Jika terdapat suatu elemen $s \in R$ dimana s merupakan pembagi nol kiri sekaligus pembagi nol kanan, maka s disebut "Pembagi nol.

Elemen $r \in R$ disebut "Pembagi nol sejati" untuk selanjutnya disingkat p.n.s jika dan hanya jika r merupakan pembagi nol dan $r \neq 0$.

Contoh 2.1.6.

(1). Pandang ring himpunan bilangan bulat Z. Z merupakan ring tanpa pembagi nol, kecuali nol sendiri.

(2). Z_6 = Himpunan bilangan bulat modulo 6, terhadap penjumlahan dan pergandaan modulo 6.

$Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$2 \in Z_6$ merupakan pembagi nol, sebab $\exists\, 3 \in Z_6$, $3 \neq 0$ sedemikian sehingga $2.3 = 3.2 = 6 = 0$

$3 \in Z_6$ merupakan pembagi nol, sebab $\exists\ 4 \in Z_6,\ 4 \neq 0$ sedemikian sehingga $3.4 = 4.3 = 12 = 2.6 = 0$

Demikian juga untuk $4 \in Z_6$, merupakan pembagi nol.

(3). Pandang M_2 adalah himpunan matrik segitiga atas dari himpunan bilangan bulat Z.

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix} \middle|\ m_{ij} \in Z \right\}$$

Sesuai contoh (5) definisi ring maka M_2 adalah ring.

Pandang $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$, dan $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$ maka

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi matrik $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$ merupakan pembagi nol kiri dalam ring M_2.

Definisi 2.1.7

Jika (R,+,.) adalah suatu ring yang dilengkapi sifat mempunyai elemen satuan, komutatif terhadap pergandaan dan tidak mempunyai pembagi nol sejati, maka (R,+,.) disebut "Daerah Integral".

Definisi 2.1.8

Jika (R,+,.) adalah suatu ring yang dilengkapi sifat mempunyai elemen satuan, komutatif terhadap pergandaan dan untuk setiap elemen $a \in R$, $a \neq 0$ mempunyai invers $a^{-1} \in R$ terhadap pergandaan, maka R disebut field.

Definisi 2.1.9

Pandang $(R,+,.)$ adalah ring dan misalkan $R^* = R - \{0\}$. R disebut "ring pembagi" (Devision ring), jika $(R^*,.)$ merupakan grup.

Untuk selanjutnya , Jika R adalah ring pembagi, R dinyatakan dengan tanda " $\triangle$ ".

Contoh 2.1.10.

(1). Pandang ring dari himpunan bilangan rasional Q.

$Q = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a,b \in Z,\ b \neq 0 \right\}$; Z = Himpunan bilangan bulat.

Selanjutnya pandang $Q^* = Q - \{0\}$

$$= \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a,b \in Z,\ a \neq 0,\ b \neq 0 \right\}$$

Sekarang diselidiki Q^* terhadap pergandaan.

- Untuk setiap $\frac{p}{q}, \frac{s}{t} \in Q^*$ maka :

  $\frac{p}{q} \cdot \frac{s}{t} = \frac{p.s}{q.t}$, karena p,q,s,t semuanya tidak = nol dan Q^* tidak memuat p.n.s, maka : $p.s \neq 0$ dan $s.t \neq 0$

  Sehingga terdapatlah $\frac{u}{v} \in Q^*$ sedemikian sehingga

  $$\frac{p.s}{q.t} = \frac{u}{v}$$

- Untuk setiap $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f} \in Q^*$ berlaku :

  $$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a.c}{b.d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a.c.e}{b.d.f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c.e}{d.f}\right) = \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

  Jadi sifat assosiatif dipenuhi.

- $\frac{a}{a}$, $a \neq 0$ adalah anggota Q^*, $\frac{a}{a}$ merupakan elemen netral dalam Q^*, sebab untuk setiap $\frac{p}{q} \in Q^*$ maka

  $$\frac{a}{a} \cdot \frac{p}{q} = \frac{a.p}{a.q} = \frac{p}{q}$$

- Untuk setiap $\frac{a}{b} \in Q^*$ dapat ditemukan inversnya yaitu $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \in Q^*$, sedemikian sehingga :

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a.b}{b.a} = \frac{c}{c}$$

sedangkan $\frac{c}{c}$ merupakan elemen satuan dalam Q^*

Dengan demikian (Q^*,.) merupakan grup.

Jadi Q merupakan ring pembagi.

(2) Pandang ring dari himpunan bilangan bulat Z.

$Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$ .Dapat dibuktikan bahwa Z bukan ring pembagi.

Pandang $Z^* = Z - \{0\}$

$$= \{\pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$$

Elemen netral terhadap pergandaan dalam Z^* adalah 1.

Diambil sembarang elemen $a \in Z^*$, misalkan $3 \in Z^*$.

Invers 3 terhadap pergandaan adalah $\frac{1}{3}$, sebab

$$3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Tetapi $\frac{1}{3} \notin Z^*$. Dengan demikian (Z^*,.) bukan grup.

Jadi (Z , + , .) bukan merupakan ring pembagi.

(3) Pandang K_2 adalah himpunan matrik berukuran 2 x 2 dari himpunan bilangan bulat.

$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \middle| \; k_{ij} \in Z \right\}$$; Z = himpunan bilangan bulat.

Akan dibuktikan bahwa K_2 bukan ring pembagi.

Pandang $K_2^* = K_2 - \{0\}$; yaitu himpunan matrik berukuran 2x2 tanpa matrik nol $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Jadi $$K_2^* = \left\{ \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \middle| \; l_{ij} \in Z - \{0\} \right\}$$

Matrik satuan dalam K_2^* adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Diambil matrik sembarang dalam K_2^* , misalkan $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Invers A yaitu $A^{-1} = \dfrac{1}{2.(-1) - 3.5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{-2}{17} \end{pmatrix}$$

$A^{-1} \notin K_2$ sebab elemen elemen dalam matrik A^{-1} bukan anggota himpunan bilangan bulat.

Karena ada elemen dalam K_2^* yang tidak mempunyai invers dalam K_2^*, maka (K_2^*, .) bukan grup.

Sehingga K_2 bukan ring pembagi.

(4) Pandang kembali L_2 yaitu himpunan matrik berukuran 2x2 dari himpunan bilangan rasional.

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \middle| \; l_{ij} \in Q \right\} \quad ; \; Q = \text{himpunan bilangan rasional.}$$

Pandang $L_2^* = L_2 - \{0\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \middle| \; m_{ij} \in Q - \{0\} \right\}$$

Karena elemen elemen dalam matrik L_2^* berupa bilangan rasional yang tidak sama dengan nol, maka setiap matrik tersebut pasti mempunyai invers yang merupakan anggota L_2^*. Jadi L_2^* merupakan grup terhadap perggandaan.

Dengan demikian L_2 merupakan ring pembagi.

Definisi 2.1.11

Pandang (R, + , .) suatu ring . Suatu elemen a anggota R disebut "Nilpotent", jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = 0$.

a^n dimaksudkan sebagai pergandaan n faktor elemen $a \in R$. Karena hasil pergandaan tersebut adalah nol, dapatlah dikatakan bahwa setiap elemen nilpotent merupakan pembagi nol, sebab bila $a \neq 0$ dan n bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $a^n = 0$, maka $n > 1$.
sehingga $a.a^{n-1} = 0$ dan $a^{n-1}.a = 0$ dengan $a^{n-1} \neq 0$, mengakibatkan a merupakan pembagi nol.

Contoh 2.1.12

(1) Pandang ring dari himpunan bilangan bulat modulo 9, yaitu $Z_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

$3 \in Z_9$ dan 3 merupakan elemen nilpotent, sebab

$$3^2 = 3.3 = 9 = 0.$$

$6 \in Z_9$ dan 6 juga merupakan elemen nilpotent, sebab,

$$6^2 = 6.6 = 36 = 4.9 = 4.0 = 0.$$

(2) Jika P_3 adalah himpunan matrik segitiga atas berukuran 3x3 dengan diagonal utamanya = nol dari himpunan bilangan bulat.

$$P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; p_{ij} \in Z \right\} \text{ ; } Z = \text{himpunan bilangan bulat}$$

Mudah dibuktikan bahwa P_3 merupakan ring, dengan penjumlahan dan perkalian dalam P_3 sesuai contoh (5) ring.

Terhadap penjumlahan jelas P_3 bersifat tertutup dan bersifat assosiatif, dan elemen netral dalam P_3 adalah

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, juga bersifat komutatif.

Terhadap pergandaan :

- Tertutup ,yaitu :

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (p_{12} \cdot q_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_3$$

- Assosiatif Yaitu :

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (p_{12} \cdot q_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{12} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dan $\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & (q_{12} \cdot r_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian terpenuhi sifat assosiatif.

- Terhadap hukum distributif :

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (q_{12}+r_{12}) & (q_{13}+r_{13}) \\ 0 & 0 & (q_{23}+r_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (p_{12} \cdot q_{23} + p_{12} \cdot r_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (p_{12} \cdot q_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & (p_{12}+r_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan untuk :

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian P_3 merupakan ring.

Selanjutnya, untuk sembarang matrik $\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_3$

merupakan elemen nilpotent , sebab :

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (p_{12}.p_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian $\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dilain pihak setiap elemen dalam P_3 merupakan elemen nilpotent, sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa P_3 merupakan himpunan matrik nilpotent.

2.2 M O D U L E

Sebagai pengembangan teori ring, berikut ini diberikan konsep dasar module yang kemudian diikuti sub module dari suatu ring.

Definisi 2.2.1

Pandang $(R,+,.)$ suatu ring dan $(M,+)$ adalah grup abelian. Selanjutnya M disebut " Module kanan atas ring R" (selanjutnya ditulis dengan " R-module kanan M"), jika terdapat suatu pemetaan

$f : M \times R \longrightarrow M$ dengan $f(m,r) = mr \in M$. Untuk setiap $m \in M$ dan $r \in R$ yang memenuhi :

(i). $m_1(r_1 + r_2) = m_1.r_1 + m_1.r_2$

(ii). $(m_1 + m_2).r_1 = m_1.r_1 + m_2.r_1$

(iii). $m_1(r_1.r_2) = (m_1.r_1).r_2$

Untuk setiap $m_1, m_2 \in M$ dan $r_1, r_2 \in R$.

Jika R mempunyai identitas I dan $mI = m$ untuk setiap $m \in M$ maka M disebut module unit kanan atas ring R.
Konsep yang sejajar dan sama pentingnya adalah Module kiri.

Definisi 2.2.2

Pandang $(R,+,.)$ suatu ring dan $(N,+)$ adalah grup abelian. Maka N disebut " Module kiri atas ring R" (selanjutnya ditulis dengan " R-module kiri N") jika terdapat suatu pemetaan $g : R \times N \longrightarrow N$ dengan $g(r,n) = rn \in N$,untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$, yang memenuhi :

(i). $(r_1 + r_2).n_1 = r_1.n_1 + r_2.n_1$

(ii). $r_1.(n_1 + n_2) = r_1.n_1 + r_1.n_2$

(iii). $(r_1.r_2).n_1 = r_1.(r_2.n_1)$.

Untuk setiap $n_1, n_2 \in N$ dan $r_1, r_2 \in R$.

Jika R mempunyai identitas I dan $In = n$, untuk setiap $n \in N$, maka N disebut Module unit kiri atas ring R. Selanjutnya ditulis dengan R-module unit kiri N.

Definisi 2.2.3

Jika R merupakan ring komutatif, maka R-module kiri M akan sekaligus merupakan R-module kanan M. Selanjutnya disebut module atas ring R. Kemudian ditulis dengan " R-module M ".

Contoh 2.2.4

(1) Pandang ring dari himpunan bilangan bulat Z. Misalkan diambil W_3 adalah himpunan bilangan bulat kelipatan 3. Akan dibuktikan bahwa W_3 merupakan module kanan atas ring Z.

Bukti :

Diketahui $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ dan

$$W_3 = \{k.3 \mid k \in Z\}$$
$$= \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots\} = 3Z.$$

Mudah dibuktikan bahwa W_3 merupakan grup abelian terhadap penjumlahan. Disamping itu pada W_3 berlaku pula untuk setiap $m \in W_3$ dan $a \in Z$ berlaku $m.a \in W_3$. Jadi terdapatlah suatu pemetaan $f : W_3 \times Z \longrightarrow W_3$ dengan $f(m,a) = ma \in W_3$.

Selanjutnya diambil sembarang elemen $m_1, m_2 \in W_3$ dan $a_1, a_2 \in Z$, diselidiki :

(i). $m_1(a_1 + a_2) = m_1.a_1 + m_1.a_2$.

Misalkan diambil $9 \in W_3$ dan $2, -11 \in Z$

maka : $9.(2 + (-11)) = 9(-9) = -81$
$= 18 + (-99)$
$= 9.2 + 9.(-11)$.

(ii). $(m_1 + m_2).a_1 = m_1.a_1 + m_2.a_1$

Misalkan diambil $(-6), 15 \in W_3$ dan $7 \in Z$

maka : $((-6) + 15).7 = 9.7 = 63$
$= (-42) + 105$
$= (-6).7 + 15.7$

(iii). $m_1.(a_1.a_2) = (m_1.a_1).a_2$

Misalkan diambil $(-12) \in W_3$ dan $5, (-8) \in Z$

maka : $(-12)(5.(-8)) = (-12).(-40)$
$= 480$
$= (-60).(-8)$
$= ((-12).5).(-8)$.

Dengan demikian terbuktilah bahwa W_3 merupakan module atas ring Z. Sedangkan Z sendiri merupakan ring komutatif, sebab $\forall\ a_1, a_2 \in Z$ berlaku $a_1 . a_2 = a_2 . a_1$. Oleh karena itu Z merupakan ring komutatif, sesuai definisi 2.2.3 mudah dibuktikan bahwa W_3 merupakan module kiri atas ring Z. Jadi dapatlah ditarik kesimpulan bahwa W_3 merupakan module atas ring Z atau ditulis R-module W_3 .

(2) Pandang kembali ring dari himpunan bilangan bulat $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ dan W_5 yaitu himpunan bilangan bulat kelipatan 5.

$W_5 = \{0, +5, +10, +15, \ldots\} = \{k5 \mid k \in Z\}$.

$= 5.Z$

Mudah dibuktikan bahwa W_5 merupakan ideal dalam R. Sekarang pandang Z/W_5 sebagai himpunan kelas residu.

Z/W_5 merupakan ring yang disebut ring kelas residu modulo W_5. Jadi $Z/W_5 = \{(m + W_5) \mid m \in Z\}$.

Didalam Z/W_5 berlaku : Untuk setiap m_1, m_2,$n \in Z$

$$(m_1 + W_5) + (m_2 + W_5) = (m_1 + m_2) + W_5$$

$$n.(m + W_5) = (n.m) + W_5$$

Akan dibuktikan bahwa Z/W_5 merupakan module atas ring Z.

Bukti :

Karena Z/W_5 merupakan ring , maka jelaslah Z/W_5 merupakan grup abelian terhadap penjumlahan.

Kemudian dari definisi operasi pergandaan dalam Z/W_5 yaitu untuk setiap $n \in Z$ dan $(m + W_5) \in Z/W_5$ berlaku $n.(m + W_5) = (n.m) + W_5$, maka terdapatlah suatu pemetaan $g : Z \times W_5 \longrightarrow W_5$

dengan $g(n,(m + W_5)) = n.(m + W_5)$

$= (n.m) + W_5 \in Z/W_5$.

Selanjutnya diambil sembarang $(m_1 + W_5)$, $(m_2 + W_5) \in Z/W_5$ dan n_1 , $n_2 \in Z$, maka :

(i). $(n_1 + n_2)(m_1 + W_5) = ((n_1 + n_2).m_1) + W_5$

$= (n_1.m_1 + n_2.m_1) + W_5$

$= ((n_1.m_1) + W_5) + ((n_2.m_1) + W_5)$

$= n_1.(m_1 + W_5) + n_2.(m_1 + W_5)$

Misalkan diambil $7, (-3) \in Z$ dan $19 = 4 + 15 \in Z/W_5$

maka : $(7 + (-3)).(4 + 15) = (4).(4 + W_5)$

$= (16 + W_5)$

$= (28 + (-12)) + W_5$

$= (7.4 + W_5) + ((-3)4+W_5)$

$= 7(4 + W_5) + (-3)(4 + W_5)$

(ii) $n_1((m_1 + W_5) + (m_2 + W_5)) = n_1((m_1 + m_2) + W_5)$

$= (n_1(m_1 + m_2)) + W_5$

$= (n_1.m_1 + n_1.m_2) + W_5$

$= (n_1.m_1) + W_5) + ((n_1.m_2) + W_5)$

$= n_1(m_1 + W_5) + n_1(m_2 + W_5)$

Misalkan diambil $(-12) \in Z$ dan $(3+W_5), (2+W_5) \in Z/W_5$

maka : $(-12).((3+W_5) + (2+W_5))$

$= (-12).((3 + 2) + W_5)$

$= ((-12)(3 + 2)) + W_5)$

$= ((-12).3 + (-12).2) + W_5$

$= (((-12).3) + W_5) + (((-12).2) + W_5)$

$= (-12).(3 + W_5) + (-12).(2 + W_5)$

(iii). $n_1.(n_2(m_1 + W_5)) = n_1.((n_2.m_1) + W_5)$

$= (n_1.n_2.m_1) + W_5$

$= (n_1.n_2).(m_1 + W_5)$

Misalkan diambil $15, (-8) \in Z$ dan $(4 + W_5) \in Z/W_5$

maka : $15.((-8)(4 + W_5)) = 15.(((-8).4) + W_5)$

$= (15.(-32)) + W_5$

$= (-480) + W_5$

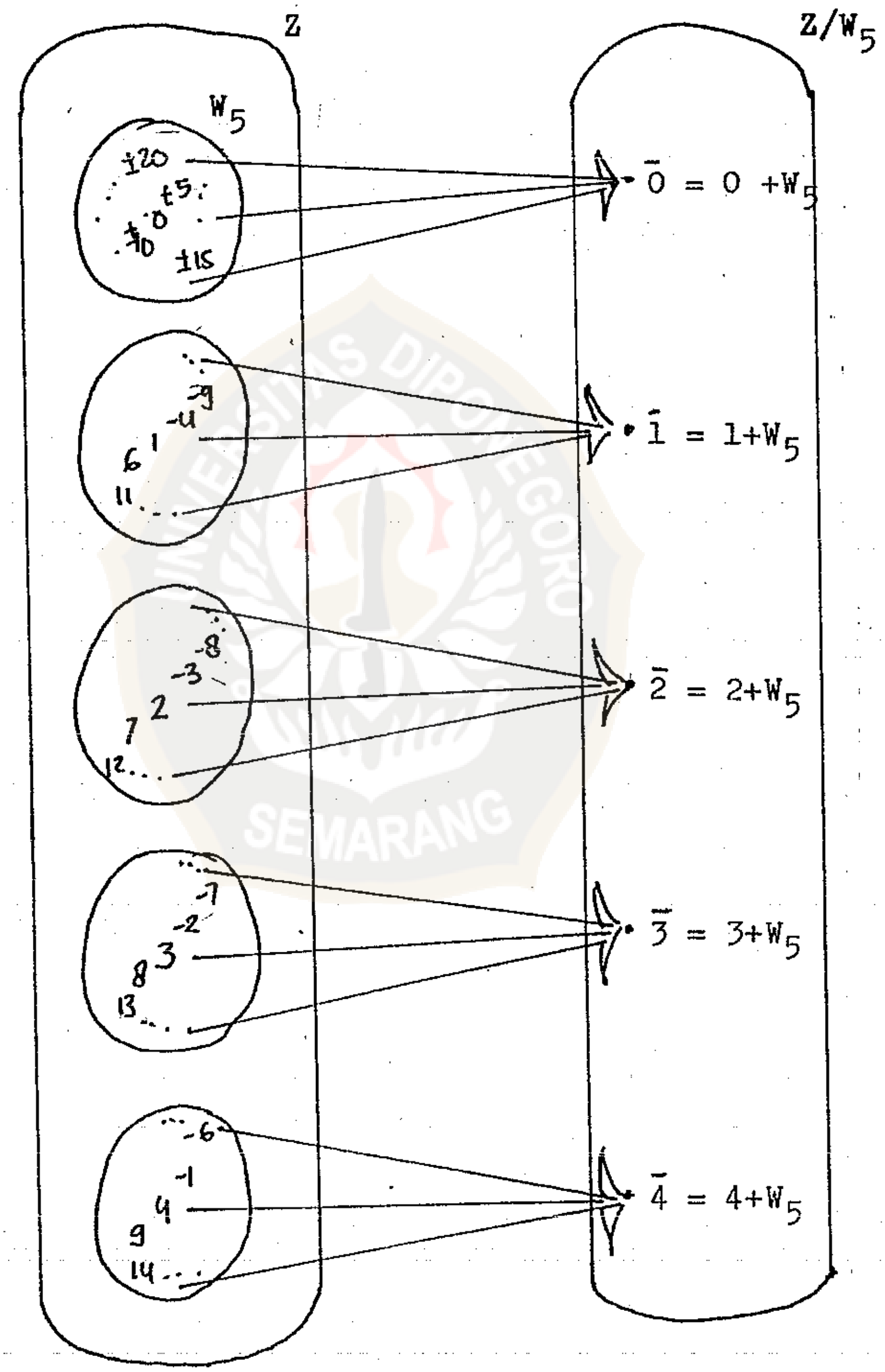
$= (-120)(4 + W_5)$

$= (15.(-8)).(4 + W_5)$.

Dengan demikian ketiga syarat terpenuhi oleh Z/W_5.
Terbukti bahwa Z/W_5 merupakan module atas ring Z.

Untuk selanjutnya "Z-module Z/W_5 disebut " Module quotient oleh W_5 atas ring Z ".

Pandang pemetaan berikut :



(3) Pandang K_3 sebagai himpunan matrik berukuran 3x3 dari himpunan bilangan bulat Z . Misalkan P_3 himpunan matrik segitiga atas berukuran 3x3 dengan diagonal utamanya sama dengan nol, dari himpunan bilangan bulat. Dapat dibuktikan bahwa P_3 bukan merupakan module atas ring K_3.

Bukti:

Pandang

$$K_3 = \left\{ \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \middle| \; k_{ij} \in Z \right\} \qquad i,j = 1,2,3$$

dan

$$P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; p_{ij} \in Z \right\}$$

Sifat penjumlahan dan pergandaan dalam K_3 dan P_3 didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\quad i,j = 1,2,3$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

dengan : $d_{ij} = \sum_{t=1}^{t=3} a_{it} \cdot b_{tj}$

Mudah dibuktikan bahwa P_3 merupakan grup abelian terhadap penjumlahan, yaitu :

- Memenuhi sifat tertutup, assosiatif.
- mempunyai elemen netral yaitu : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Untuk setiap $\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_3$

  mempunyai invers ; $\begin{pmatrix} 0 & -p_{12} & -p_{13} \\ 0 & 0 & -p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_3$

Terbuktilah P_3 merupakan grup abelian terhadap penjumlahan. Sekarang diselidiki keberadaan suatu pemetaan. Misalkan pemetaan $f : K_3 \times P_3 \longrightarrow P_3$.
Diambil sembarang matrik dalam K_3 dan P_3,
misalkan : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in K_3$ dan $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_3$

maka : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 26 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \notin P_3$

dan juga

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -13 \\ 15 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin P_3$$

Terlihat tidak ada pemetaan $f : K_3 \times P_3 \longrightarrow P_3$
juga pemetaan $P_3 \times K_3 \longrightarrow P_3$

Dengan demikian P_3 bukan module kiri (kanan) atas ring K_3. Jadi P_3 bukan module atas ring K_3

(4) Pandang ring M_3 yaitu himpunan matrik segitiga atas berukuran 3x3 dari himpunan bilangan bulat.

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \middle| \; m_{ij} \in Z \right\}$$

Pandang kembali

$$P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; p_{ij} \in Z \right\}$$

Pada M_3 dan P_3, sifat operasi penjumlahan dan pergandaan didefinisikan sesuai contoh (3).

Pada contoh terdahulu, telah dibuktikan bahwa P_3 merupakan grup abelian terhadap penjumlahan.

Kini diselidiki keberadaan pemetaan $f : M_3 \times P_3 \longrightarrow P_3$

Misalkan diambil sembarang matrik anggota M_3 dan matrik anggota P_3, yaitu :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in M_3 \text{ dan } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_3$$

maka :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 30 \\ 0 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_3$$

Jadi terdapatlah suatu pemetaan $f : M_3 \times P_3 \longrightarrow P_3$

Untuk setiap matrik dalam M_3 dan matrik dalam P_3.

Dengan $f(A,T) = AT \in P_3$, Untuk setiap matrik $A \in M_3$ dan matrik $T \in P_3$.

Selanjutnya diambil sembarang matrik $A,B \in M_3$ dan matrik $S,T \in P_3$, misalkan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diselidiki :

(i). $(A + B)T = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (a_{11}+b_{11})t_{12} & (a_{11}+b_{11})t_{13}+(a_{12}+b_{12})t_{23} \\ 0 & 0 & (a_{22}+b_{22})t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (a_{11}t_{12}) & (a_{11}t_{13}+ a_{12}t_{23}) \\ 0 & 0 & (a_{22}t_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & (b_{11}t_{12}) & (b_{11}t_{13}+ b_{12}t_{23}) \\ 0 & 0 & (b_{22}t_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi $(A + B).T = A.T + B.T$

(ii). $A.(S + T) =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (s_{12}+t_{12}) & (s_{13}+t_{13}) \\ 0 & 0 & (s_{23}+t_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (a_{11}(s_{12}+t_{12})) & (a_{11}(s_{13}+t_{13}) + a_{12}(s_{23}+t_{23})) \\ 0 & 0 & (a_{22}(s_{23}+t_{23})) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (a_{11}s_{12}) & (a_{11}s_{13} + a_{12}s_{23}) \\ 0 & 0 & (a_{22}.s_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & (a_{11}.t_{12}) & (a_{11}t_{13} + a_{12}t_{23}) \\ 0 & 0 & (a_{22}.t_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi $A.(S + T) = A.S + A.T$

(iii). $A.(B.T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (b_{11}t_{12}) & (b_{11}t_{13} + b_{12}t_{23}) \\ 0 & 0 & (b_{22}t_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (a_{11}b_{11}t_{12}) & (a_{11}(b_{11}t_{13}+b_{12}t_{23})+a_{12}b_{22}t_{23}) \\ 0 & 0 & (a_{22}b_{22}t_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (a_{11}b_{11})t_{12} & (a_{11}b_{11})t_{13}+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})t_{23} \\ 0 & 0 & ((a_{22}b_{22})t_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) & (a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}) \\ 0 & (a_{22}b_{22}) & (a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}) \\ 0 & 0 & (a_{33}b_{33}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \right) . \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$= (A.B).T$

Jadi $A.(B.T) = (A.B).T$

Dengan terpenuhinya aksioma (i) , (ii) dan (iii) dari module kiri, maka dapat disimpulkan bahwa P_3 merupakan module kiri atas ring M_3.

2.3. S U B   M O D U L E

Dimuka telah diuraikan pengertian module beserta contoh contohnya. Berikut ini diberikan suatu himpunan bagian dari suatu module yang disebut "Sub Module".

Definisi 2.3.1

Pandang M suatu R-module, dan (N,+) merupakan subgrup dari M. N disebut "Sub Module dari M atas ring R" Jika untuk setiap $n \in N$, $r \in R$ berlaku

$$nr \in N.$$

Dari definisi diatas , untuk menentukan bahwa N merupakan sub module dari R-module M, diperlukan keberadaan (N,+) sebagai sub grup dari M dan untuk setiap $n \in N$, $r \in R$ berlaku operasi pergandaan $nr \in N$.

Contoh 2.3.2

Ambil dari contoh 2.2.4.(1). Telah dibuktikan bahwa $W_3 = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots\} = \{k.3 \mid k \in Z\}$.

$$= 3Z$$

merupakan module atas ring himpunan bilangan bulat Z.

Sekarang pandang $W_6 = \{0, \pm 6, \pm 12, \pm 18, \ldots\}$.

$$= \{k.6 \mid k \in Z\} = 6Z.$$

Jelas W_6 merupakan himpunan bagian dari W_3. Mudah dibuktikan bahwa W_6 merupakan grup terhadap penjumlahan, sehingga W_6 merupakan sub grup dari Z-module W_3.

Sekarang diselidiki untuk sembarang $n \in W_6$ dan $a \in Z$, misalkan diambil $12 \in W_6$ dan $(-4) \in Z$, maka

$$12.(-4) = -48$$

$$= (-8).6 \in W_6$$

Ternyata untuk setiap $n \in W_6$ dan $a \in Z$, berlaku $na \in W_6$
Sesuai definisi 2.3.1 maka W_6 merupakan sub module dari Z-module W_3.

Theorema 2.3.4

Pandang suatu R-module M dan $N_1, N_2, \ldots N_n$ adalah sub module sub module dari R-module M, maka interseksi semua sub module N_i, $i=1,2,\ldots,n$ dari R-module M merupakan sub module.

Bukti :

Misalkan $N = \{ n \mid n \in (N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \ldots \cap N_n) \}$
dengan N_i, $i = 1,2,\ldots,n$ adalah submodule dari R-module M.
Dibuktikan dulu bahwa N merupakan sub grup dari R-module M
Syarat cukup bahwa N merupakan sub grup dari M adalah :

Untuk setiap n_j, $n_k \in N$ maka $n_j - n_k \in N$.

Diambil sembarang $n_j, n_k \in N$, pastilah n_j merupakan elemen dari $(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n)$ sehingga $n_j \in N_i$, untuk setiap $i = 1,2,\ldots n$. Demikian pula untuk $n_k \in N$, maka $n_k \in N_i$
Karena N_i merupakan sub module, maka $n_j - n_k \in N_i$.
Dan N_i sembarang sub module, sehingga :

$$n_j - n_k \in (N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n) = N$$

Dengan demikian terbukti untuk setiap $n_j, n_k \in N$ maka $n_j - n_k \in N$, sehingga $(N,+)$ merupakan sub grup dari R- module M.

Sekarang diambil sembarang $r \in R$, dan $x \in N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$
maka pastilah $x \in N_i$, untuk suatu $i = 1,2,\ldots,n$.
Padahal N_i sendiri merupakan sub module dari R-module M maka $rx \in N_i$, untuk suatu $i=1,2,\ldots,n$. Ini berarti

$rx \in (N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n) = N$. Jadi untuk sembarang $r \in R$ dan $x \in N$ maka $rx \in N$.

Dengan demikian lengkaplah bukti bahwa N merupakan sub module dari R-module M.

Contoh 2.3.5

Kembali pandang contoh 2.2.4.(1). Telah dibuktikan bahwa $W_3 = 3Z$ merupakan module atas ring bilangan bulat Z.

Pandang $W_6 = \{0, \pm 6, \pm 12, \pm 18, \ldots\} = \{k6 \mid k \in Z\}$

$W_{15} = \{0, \pm 15, \pm 30, \pm 45, \ldots\} = \{k.15 \mid k \in Z\}$

Mudah dibuktikan bahwa W_6, W_{15} merupakan sub module dari Z-module W_3.

Misalkan $N = W_6 \cap W_{15}$

$= \{0, \pm 30, \pm 60, \pm 90, \ldots\}$

$= \{k.30 \mid k \in Z\}$

Dibuktikan bahwa N merupakan sub grup dari Z-module W_3 terhadap penjumlahan. Diambil sembarang $x, y \in N$ maka $x - y \in N$, misalkan $30, (-90) \in N$ maka

$$30 - (-90) = 120 \in N.$$

terbukti N merupakan subgrup dari W_3.

Selanjutnya diambil sembarang $x \in N$ dan $a \in Z$ maka $a.x \in N$, misalkan diambil $60 \in N$ dan $(-4) \in Z$ maka

$$(-4).60 = -240 \in N$$

Terbuktilah bahwa $N = W_6 \cap W_{15}$ merupakan sub module dari Z-module W_3, dengan W_6, W_{15} suatu sub module dari Z-module W_3.