# BAB II

# TEORI PENUNJANG

## 2.1. Topologi Himpunan Titik.

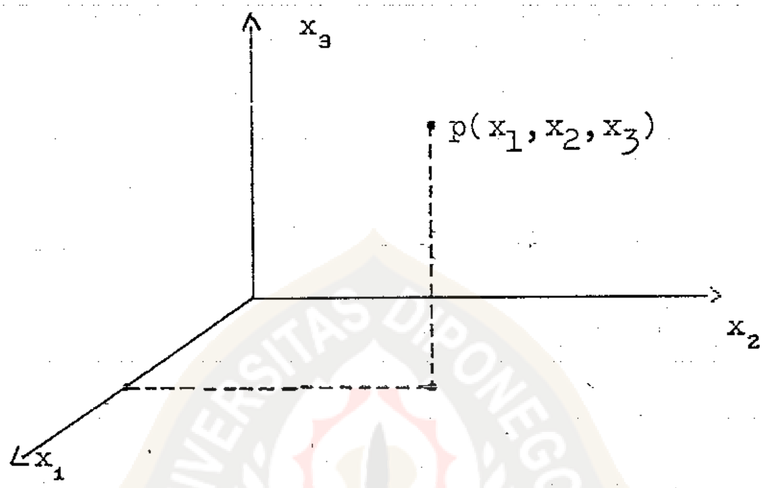
Himpunan dari semua bilangan real dinotasikan dengan R, secara geometri R merupakan suatu garis lurus dengan tiap bilangan real x adalah titik pada garis tersebut dengan koordinat x. Sumbu x demikian disebut ruang dimensi-1, bidang cartesius dinotasikan dengan $R^2$ merupakan himpunan dari semua pasangan (a,b), dan ruang cartesius dengan notasi $R^3$ merupakan himpunan dari semua pasangan (a,b,c) dimana koordinatnya merupakan bilangan real dalam R. $R^2$ disebut ruang dimensi-2 , dan $R^3$ disebut ruang dimensi-3.

**Definisi (2.1.1)**

Suatu ruang euclidean dimensi n ($R^n$) adalah himpunan semua n-tupel $x = (x_1,x_2,....,x_n)$ dari bilangan real sedemikian sehingga n-tupel adalah titik dalam $R^n$ .

Titik pada ruang/bidang dapat disajikan dengan satu simbol. Pada $R^2$ disajikan dalam bentuk koordinat dengan dua buah sumbu saling tegak lurus , sedang pada $R^3$ dengan aturan tangan kanan untuk mendapatkan koordinat dengan tiga sumbu saling tegak lurus . Jadi pada $R^2$ suatu titik p mempunyai koordinat $p=(x_1,x_2)$, sedang pada $R^3$ titik

Berkenaan dengan definisi (2.1.1), maka dalam pembicaraan selanjutnya akan dibatasi untuk n=1,2,3.




gambar 2.1.1

Dalam suatu $R^n$ dioperasikan operasi aljabar untuk suatu titik , jika $p=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ , $q=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ dan suatu $\beta \in R$ maka didefinisikan jumlahan dan perkalian skalar :

$$p + q = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots\ldots, x_n+y_n)$$
$$\beta.p = (\beta.x_1, \beta.x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \beta.x_n).$$

Definisi (2.1.2)

Himpunan dari semua vektor dalam $R^n$ dengan operasi jumlahan dan perkalian skalar disebut Ruang Vektor atas R jika memenuhi aksioma-aksioma :

a. Tertutup .

b. Asosiatif dan Komutatif terhadap jumlahan.

c. Untuk p,q suatu titik dan $\alpha,\beta$ suatu bilangan real, maka :

$$\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$$

$$(\alpha+\beta)p = \alpha p + \beta p$$

$$\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p.$$

d. Terdapat titik O dengan sifat , $p + O = p$.

e. Terdapat bilangan 0 dan 1 dengan sifat,

$$(0)p = 0 \text{ dan } (1)p = p \ .$$

Definisi (2.1.3)

Suatu bola terbuka dalam $R^n$ dengan pusat $p_o(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ dan radius $\varepsilon > 0$ , adalah himpunan :

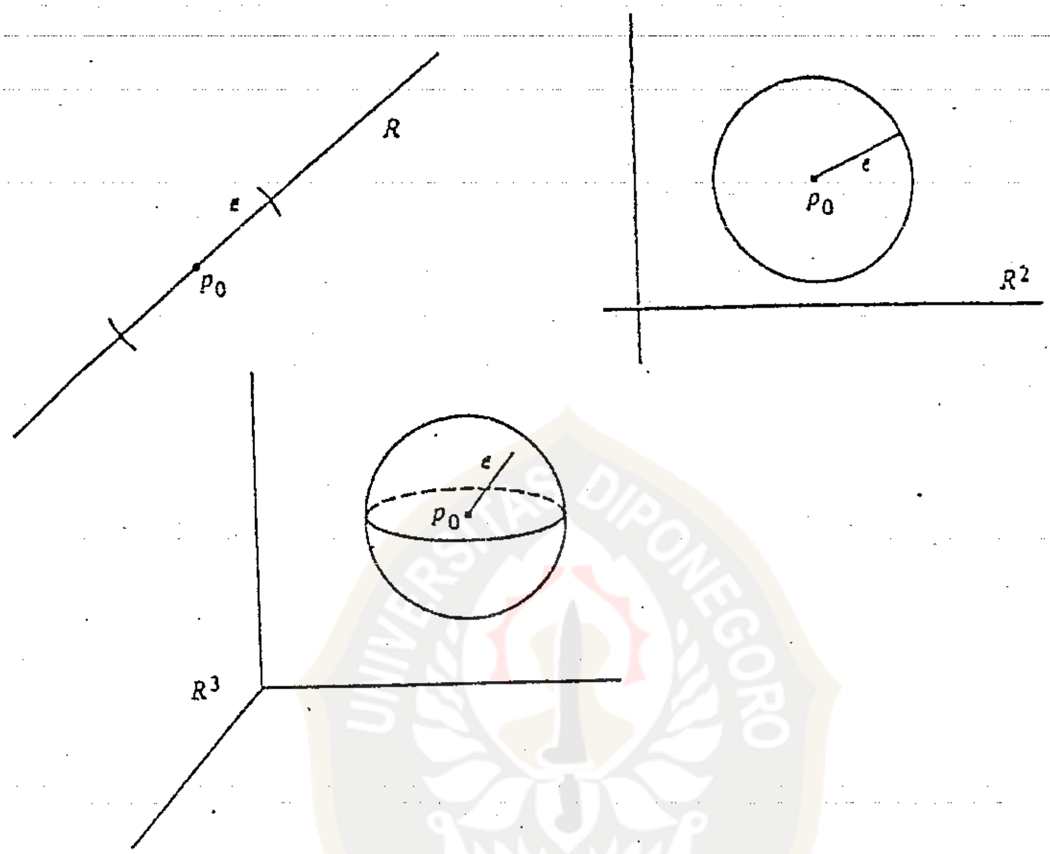
$$B_\varepsilon(p_o) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \mid (x_1 - x_1^o)^2 + \ldots + (x_n - x_n^o)^2 < \varepsilon^2\}$$

Dengan demikian , dalam R , $B_\varepsilon(p_o)$ adalah interval terbuka dengan pusat $p_o$ dan panjang $2\varepsilon$. Dalam $R^2$ , $B_\varepsilon(p_o)$ adalah interior dari suatu cakram dengan pusat $p_o$ dan radius $\varepsilon$. Selanjutnya dalam $R^3$ , $B_\varepsilon(p_o)$ merupakan interior dari suatu daerah yang dibatasi oleh suatu bola dengan pusat $p_o$ dan jari-jarinya $\varepsilon$ (gambar.2.1.2).

Himpunan $U \subset R^n$ adalah *terbuka* jika untuk setiap titik $p \in U$ terdapat suatu bola $B_\varepsilon(p) \subset U$ . Selanjutnya dikatakan bahwa suatu himpunan terbuka dalam $R^n$ yang memuat suatu titik $p \in R^n$ disebut *persekitaran* dari p.

Contoh (2.1.1)

Himpunan $\{(x_1, x_2) \in R^2 / \ a < x_1 < b, c < x_2 < d \}$, adalah himpunan terbuka.




gambar 2.1.2

Definisi (2.1.4)

Himpunan $A \subset R^n$ disebut terhubung jika A tidak dapat ditulis sebagai $A = A_1 \cup A_2$, dimana $A_1$ dan $A_2$ merupakan himpunan terbuka yang tidak kosong dalam A dan $A_1 \cap A_2 = \phi$.

Definisi (2.1.5)

Misalkan $A \subset R^n$ dan $p \in A$, union dari semua himpunan bagian terhubung dari A yang memuat p, disebut komponen terhubung dari A yang memuat p.

Dengan demikian, komponen terhubung merupakan himpunan terhubung.

**Definisi (2.1.6) .**

Suatu interval dari garis real R adalah suatu himpunan $a<x<b$, $a<x\le b$, $a\le x<b$, $a\le x\le b$ , $x\in R$. Dalam kasus $a=b, a=-\infty$ , $b=+\infty$ tidak termasuk, maka suatu interval tidak mungkin berupa sebuah titik, setengah garis, atau R itu sendiri.

**Theorema (2.1.1)**

$A\subset R$ terhubung jika dan hanya jika A interval.

Bukti :

Ambil $A\subset R$ interval, dan misalkan A tidak terhubung Karena A tidak terhubung, $A= U_1 \cup U_2$, dimana $U_1$ dan $U_2$ suatu himpunan terbuka yang tak kosong dan terputus dalam A. Ambil $a_1\in U_1$ dan $b_1\in U_2$ , andaikan $a_1<b_1$. Dengan membagi interval tertutup $[a_1,b_1]=I_1$ pada titik tengah $(a_1+b_1)/2$, didapatkan 2 interval yang salah satunya dinamakan $I_2$ dengan salah satu titik ujung di $U_1$ dan titik ujung yang lain di $U_2$. Proses dilanjutkan untuk interval $I_2$, sehingga didapatkan $I_3\subset I_2\subset I_1$. Jadi akan didapatkan keluarga interval tertutup $I_1\supset I_2\supset \ldots \supset I_n\supset \ldots$ yang mempunyai panjang mendekati nol. Kemudian ditulis $I_i=[c_i,d_i]$. Maka $c_1\le c_2\le \ldots \le c_n\le \ldots$ dan $d_1\ge d_2\ge \ldots \ge d_n\ge \ldots$ . Ambil $c=\sup\{c_i\}$ dan $d=\inf\{d_i\}$. Karena $d_i-c_i$ kecil sekali, maka $c=d$, untuk selanjutnya suatu persekitaran dari c memuat suatu $I_i$ untuk i relatif besar. Jadi c adalah titik limit dari $U_1$ dan $U_2$. Maka $U_1$ dan $U_2$ tertutup, $c \in U_1\cap U_2$ yang berarti kontradiksi dengan $U_1$ dan $U_2$ terputus.

Sebaliknya, asumsikan A terhubung. Jika A mempunyai elemen tunggal, A trivial interval. Misalkan A mempunyai paling sedikit 2 elemen dan ambil a=inf.A dan b=sup.A. Jelas $A \subset (a,b)$. Akan dibuktikan $(a,b) \subset A$, yang berarti A interval. Andaikan sebaliknya, berarti terdapat t ,$a<t<b$ sedemikian sehingga $t \notin A$. Himpunan $A \cap (-\infty,t) = V_1$, $A \cap (t,+\infty) = V_2$ adalah terbuka dalam $A = V_1 \cup V_2$. Karena A terhubung, maka salah satu dari himpunan misalnya $V_2$ adalah kosong, karena $b \in (t,+\infty)$ berarti bahwa $b \notin A$ dan b bukan titik limit dari A, kontradiksi dengan kenyataan bahwa b=sup. A. Dengan cara sama, jika $V_1=\emptyset$ , didapat kontradiksi dengan kenyataan bahwa a=inf.A .

## 2.2. Kontinuitas dalam $R^n$ .

**Definisi (2.2.1) .**

Suatu fungsi real $f: U \subset R \longrightarrow R$ dengan satu variabel real adalah kontinue pada $x_o \in U$, jika diberikan suatu $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $|x-x_o| < \delta$ , maka $|f(x)-f(x_o)| < \varepsilon$ .

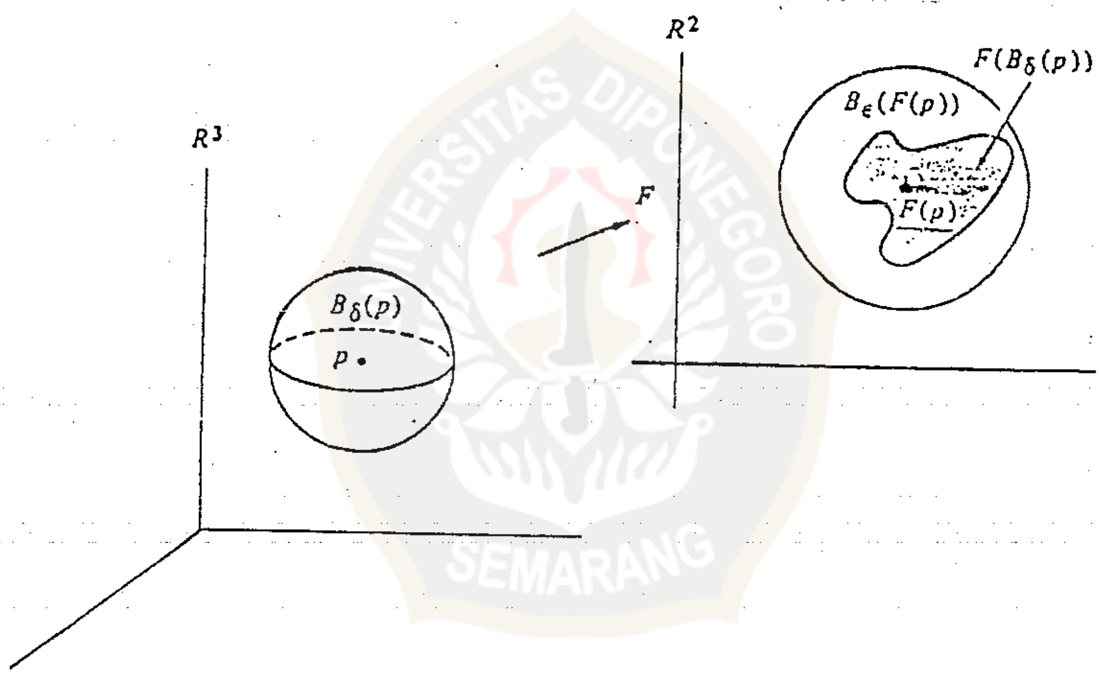
Demikian pula untuk fungsi real $f: U \subset R^2 \longrightarrow R$ dengan dua variabel real adalah kontinue pada $(x_o,y_o) \in U$ , jika diberikan $\varepsilon > 0$ , dapat ditemukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 < \delta^2$ , maka $|f(x,y)-f(x_o,y_o)| < \varepsilon$ .

Notasi untuk bola yang sesuai dengan definisi di atas merupakan hal khusus :

Pemetaan $F: U \subset R^n \longrightarrow R^m$ adalah kontinue pada $p \in U$, jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga :

$$F[B_\delta(p)] \subset B_\varepsilon[F(p)] \quad .$$

Selanjutnya, F dikatakan kontinue pada U jika F kontinue pada semua $p \in U$ . (gambar 2.2.1).




gambar 2.2.1

• Diberikan suatu pemetaan $F: U \subset R^n \longrightarrow R^m$ , maka dapat ditentukan m fungsi dari n variabel sebagai berikut. Misal $p=(x_1,\ldots\ldots,x_n) \in U$ .dan $f(p)=(y_1,\ldots\ldots,y_m)$, maka dapat dituliskan :

$$y_1=f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots\ldots\ldots,y_m=f(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Fungsi $f_i:U \longrightarrow R$ , $i=1,2,\ldots,m$ adalah komponen fungsi dari F.

Theorema (2.2.1) .

Pemetaan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ kontinue pada $p \in U$, jika dan hanya jika diberikan persekitaran $V$ dari $F(p)$ dalam $R^m$ dapat ditemukan suatu persekitaran $W$ dari $p$ dalam $R^n$ sedemikian sehingga $F(W) \subset V$.

Bukti :

($\longrightarrow$) Andaikan $F$ kontinue pada $p$. Karena $V$ himpunan terbuka yang memuat $F(p)$, maka $V$ juga memuat bola $B_\varepsilon[F(p)]$ untuk suatu $\varepsilon>0$. Dari definisi kontinue, terdapat suatu bola $B_\delta(p) = W$ sedemikian sehingga :

$$F(W) = F[B_\delta(p)] \subset B_\varepsilon[F(p)] \subset V.$$

($\longleftarrow$) Andaikan kondisi tercapai. Diberikan $\varepsilon>0$ dan himpunan $V = B_\varepsilon[F(p)]$, maka terdapat suatu persekitaran $W$ dari $p$ dalam $R^n$, sedemikian sehingga $F(W) \subset V$. Karena $W$ terbuka, maka terdapat bola $B_\delta(p) \subset W$.

Jadi $F[B_\delta(p)] \subset F(W) \subset V = B_\varepsilon[F(p)]$

Theorema (2.2.2) .

Misalkan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ dan $G : V \subset R^m \longrightarrow R^k$ suatu pemetaan kontinue dengan $U$ dan $V$ himpunan terbuka sedemikian sehingga $F(U) \subset V$. Maka $GoF : U \subset R^n \longrightarrow R^k$ adalah pemetaan kontinue.

Bukti :

Ambil $p \in U$ dan $V$ persekitaran dari $G \circ F(p)$ dalam $R^k$. Karena $G$ kontinue, maka terdapat persekitaran $Q$ dari $F(p)$ dalam $R^m$ dengan $G(Q) \subset V$. Dengan kekontinuitasan dari $F$, terdapat persekitaran $W$ dari $p$ dalam $R^n$ dengan $F(W) \subset Q$.

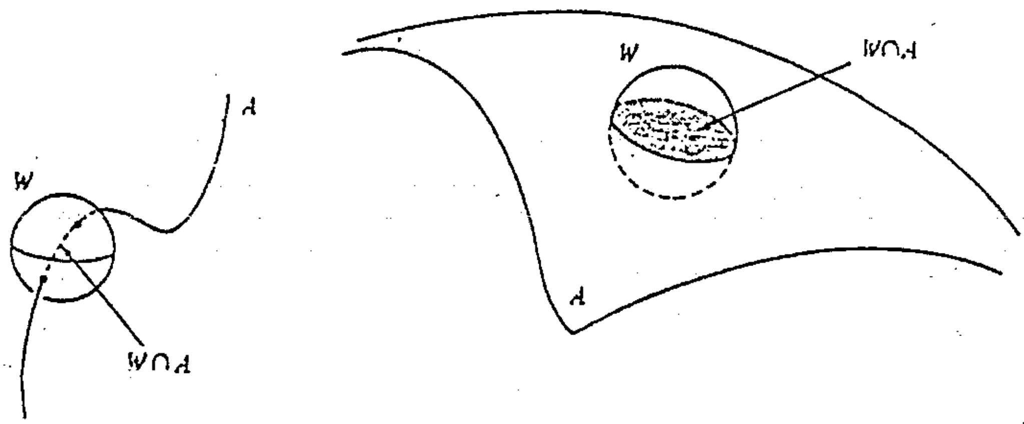
Jadi,

$$G \circ F(W) \subset G(Q) \subset V .$$

yang berarti $G \circ F$ kontinue.

Misalkan $F : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ suatu pemetaan dimana A merupakan himpunan sembarang dalam $R^n$. F dikatakan kontinue dalam A jika terdapat suatu himpunan terbuka $U \subset R^n$, $U \supset A$, dan pemetaan kontinue $F^* : U \longrightarrow R^m$ yang membatasi F pada $F^*(A)$. Dengan kata lain, F kontinue dalam A jika terbatas pada pemetaan kontinue yang terdefinisi dalam suatu himpunan terbuka yang memuat A.

Hal ini berarti bahwa jika $F : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ kontinue, dan diberikan suatu persekitaran V dari F(p) dalam $R^m$, $p \in A$, terdapat suatu persekitaran W dari p dalam $R^n$, sedemikian sehingga $F(W \cap A) \subset V$. Dalam keadaan ini, maka himpunan $W \cap A$ adalah persekitaran dari p dalam A. (gambar 2.2.2).




gambar 2.2.2

Definisi (2.2.2) .

Suatu pemetaan kontinue $F: A \subset R^n \longrightarrow R^n$ dikatakan homeomorphisma onto F(A) jika F injektif dan invers $F^{-1} = F(A) \subset R^n \longrightarrow R^n$ kontinue.

**Theorema (2.2.3) .**

Misalkan $F : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ kontinue dan A terhubung, maka F(A) terhubung.

Bukti :

Andaikan bahwa F(A) tidak terhubung, maka $F(A) = U_1 \cup U_2$ dimana $U_1$ dan $U_2$ himpunan terbuka tak kosong yang terputus. Karena F kontinue, $F^{-1}(U_1) \cup F^{-1}(U_2)$ juga himpunan terbuka tak kosong dan terputus. Karena $A = F^{-1}(U_1) \cup F^{-1}(U_2)$. Kontradiksi dengan keterhubungan dari A.

**Theorema (2.2.4) .**

Misalkan $F : A \subset R^n \longrightarrow R$ kontinue dan A terhubung, dan andaikan $F(q) \neq 0$ untuk semua $q \in A$, maka F tidak berubah tanda dalam A.

Bukti :

Dari theorema (2.2.3), maka F(A) terhubung, dan dengan theorema (2.1.1), maka F(A) interval. Dengan hipotesa bahwa F(A) tidak memuat nol, jadi titik dalam F(A) mempunyai tanda yang sama.

## 2.3. Diferensiabelitas (Differentiabelity) dalam $R^n$.

Misalkan $f : U \subset R \longrightarrow R$ . Derivatif $f^1(x_o)$ dari f pada $x_o \in U$, adalah :

$$f^1(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} \quad , \; x_o+h \in U .$$

Karena f mempunyai derivatif pada semua titik dari suatu persekitaran V dari $x_o$ , maka dapat dianggap bahwa derivatif dari $f^1 : V \longrightarrow R$ pada $x_o$, disebut derivatif kedua $f^{11}(x_o)$ dari f pada $x_o$. Selanjutnya, f dapat dideferensialkan pada $x_o$ jika f mempunyai derivatif kontinue untuk semua orde pada $x_o$. Dan f dapat dideferensialkan pada U jika dapat dideferensialkan pada semua titik dalam U.

Misalkan $F : U \subset R^2 \longrightarrow R$. Derivatif parsial dari f ke x pada $(x_o,y_o) \in U$ , dinotasikan dengan $(\partial f/\partial x)(x_o,y_o)$ adalah derivatif pada $x_o$ dari suatu fungsi dengan satu variabel $x \longrightarrow f(x,y_o)$. Demikian juga untuk derivatif parsial dari f ke y pada $(x_o,y_o)$, $(\partial f/\partial y)(x_o,y_o)$, yang didefinisikan sebagai derivatif pada $y_o$ dari $y \longrightarrow f(x_o,y)$ . Karena f mempunyai derivatif parsial pada semua titik dari persekitaran V dari $(x_o,y_o)$, maka dapat dianggap pula bahwa derivatif parsial kedua pada $(x_o,y_o)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}.\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}.\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}.\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}.\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y . \partial x}$$

Selanjutnya, F dapat dideferensialkan pada $(x_o,y_o)$ jika F mempunyai derivatif parsial untuk semua orde pada $(x_o,y_o)$. Dan F dapat dideferensialkan pada U jika F dapat dideferensialkan pada semua titik dari U.

Definisi dari derivatif parsial dan diferensiabilitas (differentiability) dapat diperluas menjadi fungsi $f:U\subset R^n \longrightarrow R$. Sebagai contoh, $(\partial f/\partial x_3)=(x_1^o,x_2^o,\ldots,x_n^o)$, merupakan derivatif parsial dari fungsi dengan variabel tunggal :

$$x_3 \longrightarrow (x_1^o,x_2^o,x_3,\ldots\ldots,x_n^o).$$

Selanjutnya, jika $x=x(u,v)$ , $y=y(u,v)$ , $z=z(u,v)$ funsi real yang dapat dideferensialkan dalam $U\subset R^2$, dan $f(x,y,z)$ fungsi real yang dapat dideferensialkan dalam $U\subset R^3$, maka komposisi fungsi $f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]$ juga fungsi yang dapat dideferensialkan dalam u, dan derivatif parsial terhadap u adalah :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+ \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}+ \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Misalkan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ . F dapat dideferensialkan pada $p\in U$ , jika komponen fungsinya juga dapat dideferensialkan pada p ,

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = [f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)]$$

Maka fungsi $f_i$ , $i=1,2,\ldots,m$ , mempunyai derivatif parsial kontinue untuk semua orde pada semua titik dalam U

**Definisi (2.3.1) .**

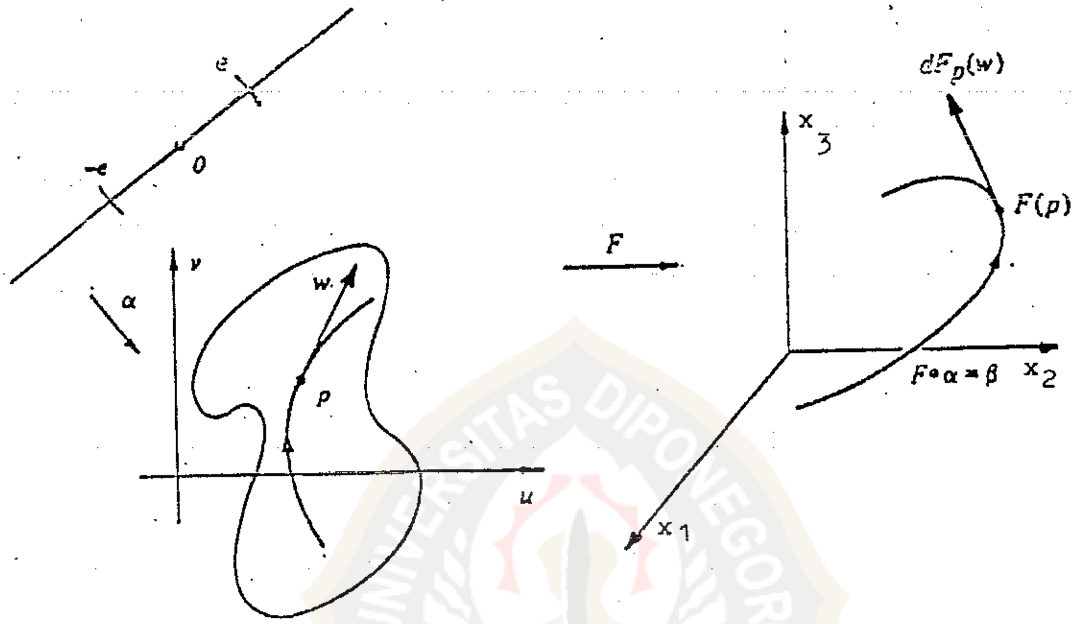
Suatu kurva terparameter (parametrized curve) yang dapat dideferensialkan adalah pemetaan yang dapat dideferensialkan $\alpha$: $I \longrightarrow R^3$ dari suatu interval terbuka $I = (a,b)$ dari garis real R into $R^3$.

Dari definisi diatas, maka pemetaan yang dapat dideferensialkan $\alpha$ mempunyai arti $\alpha$ suatu korespondensi yang memetakan tiap titik $t \in I$ into titik $\alpha(t)=[x(t),y(t),z(t)] \in R^3$, sedemikian sehingga fungsi $x(t),y(t),z(t)$ dapat dideferensialkan, dan t disebut parameter.

Derivatif pertama dari x pada t , dituliskan $x^1(t)$, demikian pula untuk y dan z, $y^1(t)$ dan $z^1(t)$. Vektor $[x^1(t),y^1(t),z^1(t)] = \alpha^1(t) \in R^3$, disebut *vektor singgung* dari kurva $\alpha$ pada t.

**Definisi (2.3.2) .**

Misalkan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan . Untuk setiap $p \in U$, diasosiasikan pemetaan linier $dF_p : R^n \longrightarrow R^m$ yang disebut *diferensial dari F pada p* dan terdefinisi sebagai berikut , Misalkan $w \in R^n$ dan $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow U$, suatu kurva yang dapat dideferensialkan sedemikian sehingga $\alpha(0) = p$ , $\alpha^1(0) = w$ . Kurva $\beta = F \circ \alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow R^m$ juga dapat dideferensialkan. Maka , $dF_p(w) = \beta^1(0)$ (gambar 2.3.1).




gambar 2.3.1

Definisi (2.3.3).

Misalkan $x : U \subset R^2 \longrightarrow R^3$ suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan dari suatu himpunan terbuka $U \subset R^2$ into $R^3$. Himpunan $x(U) \subset R^3$ disebut trace dari $x$. $x$ dikatakan regular jika diferensial $dx_q : R^2 \longrightarrow R^3$ injektif untuk semua $q \in U$. Titik $p \in U$ dimana $dx_q$ tidak injektif disebut titik singular dari $x$ .

**Theorema (2.3.1).**

Diferensial dari F pada p ($dF_p$) tidak tergantung pada pemilihan kurva yang menyinggung p dengan vektor singgung w, dan $dF_p$ merupakan pemetaan linier.

Bukti :

Misalkan $F : U \subset R^2 \longrightarrow R^3$, dan (u,v) koordinat dalam $R^2$

serta $(x,y,z)$ koordinat dalam $R^3$. Kemudian ambil $e_1=(1,0)$ dan $e_2=(0,1)$ sebagai basis kanonik dalam $R^2$, serta $f_1=(1,0,0), f_2=(0,1,0), f_3=(0,0,1)$ basis kanonik dalam $R^3$. Kemudian ditentukan :

$$\alpha(t) = [u(t),v(t)] \quad , \quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon) \; .$$

$$\alpha^1(0) = w = u^1(0).e_1 + v^1(0).e_2 \; .$$

$$F(u,v) = [x(u,v),y(u,v),z(u,v)] \quad , \quad \text{dan}$$

$$\beta(t)=F\circ\alpha(t)=\{x[u(t),v(t)],y[u(t),v(t)],z[u(t),v(t)]\}.$$

Kemudian derivatif dihitung pada $t=0$, didapatkan :

$$\beta^1(0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right) .f_1$$

$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right) .f_2$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right) .f_3 \; .$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t}. \end{bmatrix} = dF_p(w).$$

Hal ini memperlihatkan bahwa $dF_p$ dapat dinyatakan dalam basis kanonik dari $R^2$ dan $R^3$ dengan suatu matrik yang hanya bergantung pada derivatif parsial pada p dari komponen fungsi x,y,z dari F . Jadi $dF_p$ pemetaan linier, dan $dF_p$ tidak bergantung pada pemilihan dari $\alpha$ .

Matrik dari $dF_p: R^n \longrightarrow R^m$ dalam basis kanonik dari

$R^2$ dan $R^3$ , yang berarti matrik $(\partial f_i/\partial x_j)$, $i=1,2,\ldots,m$ ; $j=1,2,\ldots\ldots,n$ , disebut **Matrik Jacoby** dari $F$ pada $p$. Jika $m=n$ , maka berarti matrik bujur sangkar, dan determinannya disebut **Determinan Jacoby**, dan dinotasikan dengan ,

$$\operatorname{Det}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(f_1, \ldots\ldots\ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_m)} .$$

Definisi (2.3.4)

Diberikan suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ yang didefinisikan dalam suatu himpunan terbuka U dari $R^n$ . $p \in U$ dikatakan titik kritis dari F jika diferensial $dF_p : R^n \longrightarrow R^m$ tidak surjèktif (onto). Bayangan $F(p) \in R^m$ dari titik kritits disebut nilai kritis dari F. Titik dari $R^m$ yang bukan nilai kritis disebut nilai regular dari F.

Untuk suatu $f : U \subset R \longrightarrow R$ , maka titik $x_o \in U$ adalah titik kritis jika $f'(x_o) = 0$, yang berarti diferensial $df_{x_o}$ membawa semua vektor dalam R ke vektor nol. (gambar 2.3.2).

Jika $f : U \subset R^3 \longrightarrow R$ , suatu fungsi yang dapat dideferensialkan, kemudian dengan mengaplikasikan $df_p$ terhadap vektor (1,0,0) maka didapatkan dengan menghitung vektor singgung pada $f(p)$ dari kurva dengan y dan z konstan :

$$df_p(1,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_o,z_o) = f_x.$$

dengan cara sama,

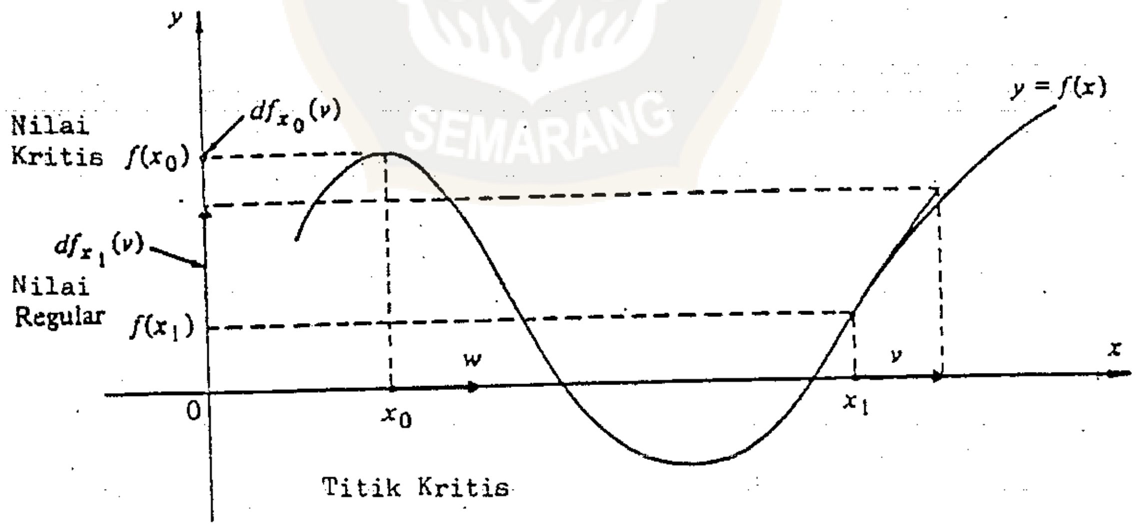
$$df_p(0,1,0) = f_y \quad ; \quad df_p(0,0,1) = f_z.$$

Selanjutnya, matrik dari $df_p$ dalam basis (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) adalah :

$$df_p = (f_x, f_y, f_z) .$$

Dalam kasus ini, $df_p$ tidak surjektif berarti ekivalen dengan menyatakan bahwa $f_x=f_y=f_z=0$ pada p.. maka $a \in f(U)$ adalah nilai regular dari $f: U \subset R^3 \longrightarrow R$ jika dan hanya jika $f_x, f_y, f_z$ tidak semuanya nol pada suatu titik dalam bayangan invers

$$f^{-1}(a) = \{ (x,y,z) \in U \ : f(x,y,z)=a \}$$




gambar 2.3.2

Theorema Fungsi Invers (2.3.2) .

Misalkan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^n$ suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan dan misalkan pula pada titik $p \in U$ diferensial $dF_p : R^n \longrightarrow R^n$ bijektif, maka terdapatlah suatu persekitaran V dari p dalam U dan persekitaran W dari F(p) dalam $R^n$ sedemikian sehingga $F : V \longrightarrow W$ mempunyai invers yang dapat dideferensialkan $F^{-1}: W \longrightarrow V$.

Bukti :

Karena F bijektif, maka F punya invers dan jika diambil suatu persekitaran V dalam $U \subset R^n$ dan W dalam $R^n$ , maka V akan bertambah (berkurang) sebanding bertambah (berkurang) nya W . Kemudian diambil titik c dalam domain dari $F^{-1}$ akan dibuktikan bahwa $F^{-1}$ kontinue . .

Karena W terbuka, maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga,

$$W_\delta(c) \subset W_\varepsilon(c)$$

dan karena $F^{-1}$ bijektif, maka

$$F^{-1}[W_\delta(c)] \subset F^{-1}[W_\varepsilon(c)]$$

Selanjutnya V terbuka, maka

$$F^{-1}[W_\varepsilon(c)] \subset V_\varepsilon[F^{-1}(c)] = V.$$

Berarti :

$$F^{-1}[W_\delta(c)] \subset F^{-1}[W_\varepsilon(c)] \subset V_\varepsilon[F^{-1}(c)] = V .$$

Maka $F^{-1}: W \longrightarrow V$ kontinue , dan karena c termuat dalam domain dari $F^{-1}$ sedangkan $F^{-1}$ bijektif, maka dapat dideferensialkan.

Suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan $F : V \subset R^n \longrightarrow W \subset R^n$ dengan V dan W terbuka disebut *difeomorphisma* jika F mempunyai invers yang juga dapat dideferensialkan

## 2.4. Field Vektor dan Bidang Singgung.

**Definisi (2.4.1) .**

Diambil p suatu titik pada permukaan S dalam $R^3$. Suatu vektor dalam $R^3$ adalah vektor singgung dari S pada p jika menyinggung suatu kurva pada S di p. Suatu *field vektor singgung* pada permukaan S atau suatu daerah R dari S, adalah suatu fungsi yang menetapkan untuk tiap titik p dari S atau R suatu vektor singgung dari S atau R.

**Lemma (2.4.1) .**

Semua vektor singgung dari permukaan S pada titik p membentuk suatu bidang yang disebut *bidang singgung* dari S pada p, dan dinotasikan dengan $T_p(S)$.

Bukti :

Misalkan $x : U \subset R^2 \longrightarrow S$, suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan, regular, dan homeomorphisma, kemudian diambil $(u,v) \in U$ dan $p = x(u_o,v_o)$. Jika fungsi koordinat dari suatu kurva C pada S menyinggung p dengan

$$u_o=u(t_o),\ v_o=v(t_o) \quad , \quad t_o \in I$$

mempunyai vektor singgung :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_o = x_v(u_o,v_o).u^1(t_o)+ x_u(u_o,v_o).v^1(t_o).$$

dimana $u^1$ dan $v^1$ derivatif parsial. Maka $x_u(u_o,v_o)$ dan $x_v(u_o,v_o)$ menjangkau bidang. Maka semua vektor singgung dari S pada p adalah bidang tersebut.

Definisi (2.4.2) .

Garis yang tegak lurus bidang singgung $T_p(S)$ dari permukaan S pada titik p adalah *vektor normal* terhadap S pada p. *Field vektor normal* dari S atau daerah R dari S adalah fungsi yang menetapkan untuk tiap titik p dari S atau R suatu vektor normal dari S pada p.

Vektor normal unit ($e_3$) dari S pada p, didefinisikan sebagai :

$$e_3(p) = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}$$