BAB III

KORELASI BERGANDA

3.1. Kasus Sederhana Untuk 3 Variabel

3.1.1. Korelasi berganda

Pembahasan korelasi pada bab ini keadaan yang lebih luas daripada karelasi yang dibahas pada sub bab 2.4, dimana dalam hal ini akan dibicarakan korelasi dari 3 variabel.

Kwadrat koefisien korelasi berganda yang dinyatakan dengan $R^2_{3.12}$ adalah suatu nilai untuk mengukur besarnya pengaruh daripada X_1, X_2 terhadap variansi variabel X_3.

jika diberikan matrik

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} \end{pmatrix}$$ dimana T_{ij} merupakan

elemen matrik T dengan sifat variabel T maka $\frac{T' T}{n}$ merupakan matrik korelasi dengan ukuran 3 x 3, diagonal utamanya bernilai satu, sedangkan matrik korelasinya diberi notasi R.

Misal diambil matrik T berukuran 5 x 3 yang telah ditransformasikan menjadi variabel dengan bentuk T, yaitu :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{24}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-6}{\sqrt{24}} \\ -\frac{3}{2} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-4}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{8}{\sqrt{24}} \end{bmatrix}$$ selanjutnya

$$T'T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{24}} & \frac{-6}{\sqrt{24}} & \frac{-4}{\sqrt{24}} & 0 & \frac{8}{\sqrt{24}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{24}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-6}{\sqrt{24}} \\ -\frac{3}{2} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-4}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{8}{\sqrt{24}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5,00 & 2,47 & 4,29 \\ 2,47 & 5,00 & 0 \\ 4,29 & 0 & 5,00 \end{bmatrix}$$

sehingga,

$$R = \frac{T'T}{5} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5,00 & 2,47 & 4,29 \\ 2,47 & 5,00 & 0 \\ 4,29 & 0 & 5,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,49 & 0,86 \\ 0,49 & 1,00 & 0 \\ 0,86 & 0 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Matrik T diatas dapat diartikan n titik pada ruang dimensi tiga, S_3.

Masalah korelasi berganda untuk mendapatkan bidang pada ruang S_3:

$$\hat{\underset{\sim}{T}}_3 = b_1 \underset{\sim}{T}_1 + b_2 \underset{\sim}{T}_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

sedemikian sehingga deviasi ($\underset{\sim}{T}_3 - \hat{\underset{\sim}{T}}_3$) kecil. Oleh karena itu yang menjadi pokok permasalahannya adalah meminimalkan jumlah kuadrat deviasi-deviasi tersebut.

Bidang yang dinyatakan pada persamaan (3.1) merupakan bidang regresi dimana setiap jarak pengukuran dihitung dari titik pada bidang sampai koordinat X_3, Persamaan (3.1) juga merupakan satu dari tiga kemungkinan persamaan yang dapat diberikan. Dimana dalam hal ini kita tidak membicarakan 2 bidang lainnya, dengan pertimbangan yang sangat mirip (tinggal menukarkan kolom-kolomnya).

Sedangkan dalam pemakaian, kita memakai cara alamiah untuk memiliki satu variabel (X_3) yang bergantung pada 2 variabel lainnya.

Misalnya X_3 adalah tingkat kedudukan responden, X_1 tingkat kedudukan ayahnya dan X_2 tingkat pendidikannya, kemudian dicari bagaimana ketergantungan X_3 terhadap X_1 dan X_2.

Jika diberikan matrik T berukuran n x 3, dan secara kolom elemennya telah ditransformasikan ke bentuk variabel T, maka T_{12} didefinisikan sebagai matrik yang diperoleh dengan mengabaikan kolom ketiga.

Contoh :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{24}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-6}{\sqrt{24}} \\ -\frac{3}{2} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-4}{\sqrt{24}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{8}{\sqrt{24}} \end{bmatrix} \quad \text{maka} \quad T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{2} & \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Jika diberikan matrik T berukuran n x 3, dan secara kolom elemennya telah ditransformasikan ke bentuk variabel T, maka R_{12} didefinisikan sebagai partisi dari matrik korelasi R dan dinyatakan dengan,

$$R_{12} = \frac{T'_{12} \; T_{12}}{n}$$

Contoh : dari contoh diatas didapatkan ,

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,00 & 2,47 \\ 2,47 & 5,00 \end{bmatrix}$$

$$\text{sehingga } R_{12} = \frac{T'_{12} \; T_{12}}{n} = \frac{\begin{bmatrix} 5,00 & 2,47 \\ 2,47 & 5,00 \end{bmatrix}}{5} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,49 \\ 0,49 & 1,00 \end{bmatrix}$$

dari definisi-definisi diatas persamaan (3.1) dapat ditulis :

$$\hat{\underset{\sim}{T}}_3 = T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2)$$

dimana $\hat{\underset{\sim}{T}}_3$ adalah vektor berukuran n x 1 dan $\underset{\sim}{b}_3$ adalah vektor 2 x 1, sehingga jumlah deviasinya :

$$f = (\underset{\sim}{T}_3 - \hat{\underset{\sim}{T}}_3)'\ (\underset{\sim}{T}_3 - \hat{\underset{\sim}{T}}_3) = (\underset{\sim}{T}_3 - T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3)'(\underset{\sim}{T}_3 - T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3)$$

$$= \underset{\sim}{T}_3'\ \underset{\sim}{T}_3 - \underset{\sim}{b}_3'\ T_{12}'\ \underset{\sim}{T}_3 - \underset{\sim}{T}_3'\ T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3 + \underset{\sim}{b}_3'\ T_{12}'\ T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3$$

$$= \underset{\sim}{T}_3'\ \underset{\sim}{T}_3 + \underset{\sim}{b}_3'\ T_{12}'\ T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3 - 2\ \underset{\sim}{b}_3'\ T_{12}'\ \underset{\sim}{T}_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

karena perkalian vektor akan menghasilkan skalar maka pada persamaan (3.3) diperoleh :

$$\underset{\sim}{T}_3'\ (T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3) = (T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3)'\underset{\sim}{T}_3 = \underset{\sim}{b}_3'\ T_{12}'\ \underset{\sim}{T}_3'$$

Harga ekstrim didapat dengan mengambil derivatif parsial persamaan (3.3) ke $\underset{\sim}{b}_3'$ kemudian disamakan dengan nol.

$$\frac{\alpha f}{\alpha\ \underset{\sim}{b}_3'} = 2\ T_{12}'\ T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3 - 2\ T_{12}'\ \underset{\sim}{T}_3 = 0 \quad \text{sehingga}$$

$$T_{12}'\ T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3 = T_{12}'\ \underset{\sim}{T}_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4)$$

kemudian persamaan (3.4) dibagi dengan n.

$$\frac{T_{12}'\ T_{12}\ \underset{\sim}{b}_3}{n} = \frac{T_{12}\ \underset{\sim}{T}_3'}{n}$$

$$R_{12}\ \underset{\sim}{b}_3 = \underset{\sim}{r}_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.5)$$

dengan $\underset{\sim}{r}_3 = \dfrac{T_{12}' \underset{\sim}{T}_3}{n}$, (vektor korelasi antara 2 variabel prediktor.

X_1 dan X_2 dengan variabel respon X_3.

Selanjutnya koefisien / bobot regresi $\underset{\sim}{b}_3$ dinyatakan dengan : $\underset{\sim}{b}_3 = R_{12}^{-1} \underset{\sim}{r}_3$ ..... (3.6)

dengan asumsi $|R_{12}| \neq 0$

Jika persamaan (3.3) dibagi n akan didapatkan $S^2_{3.12}$, dengan mensubstitusikan persamaan (3.6) ke bentuk ini, dihasilkan :

$$S^2_{3.12} = \frac{\underset{\sim}{T}_3' \underset{\sim}{T}_3}{n} + \underset{\sim}{r}_3' R_{12}^{-1} \frac{T_{12}' T_{12}}{n} R_{12}^{-1} \underset{\sim}{r}_3 - 2 \underset{\sim}{r}_3' R_{12}^{-1} \frac{T_{12}' \underset{\sim}{T}_3}{n}$$

$$= 1 - \underset{\sim}{r}_3' R_{12}^{-1} \underset{\sim}{r}_3 \quad \text{..... (3.7)}$$

$S^2_{3.12}$ = variasi bagian dari variabel X_3, dimana variabel X_1 dan X_2 tidak mempengaruhi variabel X_3.

Selanjutnya persamaan (3.7) dapat dituliskan sebagai ,

$$1 = S^2_{3.12} + \underset{\sim}{r}_3' R_{12}^{-1} \underset{\sim}{r}_3 \quad \text{..... (3.8)}$$

Suku pertama ruas kanan pada persamaan (3.8) menyatakan variansi residu dari bidang regresi dan suhu kedua adalah variansi variabel X_3 yang dipengaruhi (dijelaskan) regresi.

Karena variansi variabel X_3 yang dijelaskan regresi sama

dengan kuadrat koefisien koleksi berganda maka:

$$R_{3.12} = \left(\underset{\sim}{r}_3' \; R_{12}^{-1} \; \underset{\sim}{r}_3 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.9)$$

atau dapat dinyatakan dengan

$$R_{3.12} = \left(\underset{\sim}{b}_3' \; \underset{\sim}{r}_3 \right)^{\frac{1}{2}}$$

contoh : diberikan matrik korelasi : $R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}53 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}17 \\ 0{,}53 & 0{,}17 & 1 \end{pmatrix}$

selanjutnya ditentukan X_3 bergantung pada X_1 dan X_2, sehingga :

$$\underset{\sim}{b}_3 = R_{12}^{-1} \; \underset{\sim}{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0{,}53 \\ 0{,}17 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0{,}51} \begin{pmatrix} 1 & -0{,}7 \\ -0{,}7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}53 \\ 0{,}17 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0{,}51} \begin{pmatrix} 0{,}4111 \\ -0{,}201 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}81 \\ -0{,}39 \end{pmatrix}$$

Jadi kuadrat koefisin korelasi berganda atau sering disebut koefisien determinasi berganda :

$$R_{3.12}^2 = \underset{\sim}{b}_3' \underset{\sim}{r}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}81 & -0{,}39 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}53 \\ 0{,}17 \end{pmatrix} = 0{,}36$$

3.1.2. Korelasi Parsial

Korelasi parsial dinotasikan $r_{12.3}$ yaitu koefisien korelasi antara variabel X_1 dengan variabel X_2 setelah pengaruh variabel X_3 terhadap variabel X_1 dan X_2 dihilangkan.

Atau jika diberikan vektor ($\underset{\sim}{T}_1 - r_{13} \underset{\sim}{T}_3$) yang merupakan deviasi X_1 dari garis regresi X_1 atas X_3. dan ($\underset{\sim}{T}_2 - r_{23} \underset{\sim}{T}_3$) merupakan deviasi variabel X_1 dari garis regresi X_2 atas X_3 yang mana deviasi-deviasi ini keduanya tidak berkorelasi dengan variabel X_3 , sehingga dapat dikatakan sebagai korelasi antara variabel X_1 dan X_2 dimana variabel-variabel tersebut tidak bergantung pada variabel X_3.

Pengertian korelasi parsial menimbulkan beberapa masalah yang menarik, diantaranya korelasi khayal, yaitu korelasi yang ada menurut perhitungan statistika, tetapi berdasarkan pemikiran/logika sebab-akibat tidak ada.

Contoh, korelasi antara curah hujan dan jumlah panen gandum, korelasi ini dipengaruhi oleh varian suhu, karena hujan yang tinggi menyertai suhu yang rendah sehingga akan menurunkan panen gandum.

Contoh lain; Korelasi antara banyaknya pesawat telephone dan banyaknya korban mati kecelakaan lalu lintas, keduanya naik setiap tahun, hal ini disebabkan karena

modernisasi hidup menyebabkan alat-alat baru (telepon, kendaraan bermotor).

Selanjutnya kita akan beralih ke bentuk pendekatannya, seperti yang telah diuraikan diatas, korelasi parsial didefinisikan sebagai korelasi antara ($\underset{\sim}{T}_1 - r_{13}\,\underset{\sim}{T}_3$) dan ($\underset{\sim}{T}_2 - r_{23}\,\underset{\sim}{T}_3$)

Untuk mendapatkan korelasinya, langkah pertama dicari kovariansi antara deviasi-deviasi variabel tersebut, yaitu :

$$\frac{(\underset{\sim}{T}_1 - r_{13}\,\underset{\sim}{T}_3)'(\underset{\sim}{T}_2 - r_{23}\,\underset{\sim}{T}_3)}{n} = \frac{\underset{\sim}{T}_1'\underset{\sim}{T}_2}{n} - \frac{r_{13}\,\underset{\sim}{T}_3'\underset{\sim}{T}_2}{n} - \frac{r_{23}\,\underset{\sim}{T}_1'\underset{\sim}{T}_3}{n} + r_{13}r_{23}\,\frac{\underset{\sim}{T}_3'\underset{\sim}{T}_3}{n}$$

$$= r_{12} - r_{13}\,r_{23} - r_{23}\,r_{13} + r_{13}\,r_{23}$$

$$= r_{12} - 2\,r_{13}\,r_{23} + r_{13}\,r_{23}$$

$$= r_{12} - r_{13}\,r_{23} \quad \ldots\ldots\ldots (3.10)$$

Langkah selanjutnya sesuai dengan penjelasan pada bagian akhir dari 2.2 maka kovariansinya dibagi dengan akar kuadrat dari perkalian variansi- variansinya .

Variansi variabel X_1 (variansi residu) :

$$\frac{(\underset{\sim}{T}_1 - r_{13}\,\underset{\sim}{T}_3)'(\underset{\sim}{T}_1 - r_{13}\,\underset{\sim}{T}_3)}{n} = \frac{\underset{\sim}{T}_1'\underset{\sim}{T}_1}{n} - \frac{2\,r_{13}\,\underset{\sim}{T}_1'\underset{\sim}{T}_3}{n} + \frac{r_{13}^2\,\underset{\sim}{T}_3'\underset{\sim}{T}_3}{n}$$

$$= 1 - 2\,r_{13}^2 + r_{13}^2 \,.\, 1$$

$$= 1 - r_{13}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.11)$$

Dengan cara yang sama didapatkan variansi variabel X_2

(variansi residu),

$$\frac{(\underset{\sim}{T}_2 - r_{23}\,\underset{\sim}{T}_3)'(\underset{\sim}{T}_2 - r_{23}\,\underset{\sim}{T}_3)}{n} = 1 - r^2_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.12)$$

sehingga koefisien korelasi parsial didapatkan, yaitu :

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}\,r_{23}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{13}\right)\left(1 - r^2_3\right)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.13)$$

3.2. Kasus Yang Lebih Umum

Kasus umum merupakan keadaan yang lebih umum dari 3 variabel. Untuk memudahkan, kita akan menggunakan notasi matrik T berukuran n x m yang merupakian pengamatan dari prediktor-prediktor (peramal) dan variabel Y adalah variabel yang ke m + 1, sehingga persamaan regresinya ditulis:

$$\hat{\underset{\sim}{Y}} = T\,\underset{\sim}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.14)$$

Semua variabel telah ditransformasikan ke bentuk variabel T, dan diasumsikan,

$$R = \frac{T'T}{n} \quad \text{sedangkan} \quad \frac{T'\,\underset{\sim}{Y}}{n} = r$$

Seperti p[ada persamaan (3.3) kita adakan fungsi :

$$f = (\underset{\sim}{Y} - \hat{\underset{\sim}{Y}})'(\underset{\sim}{Y} - \hat{\underset{\sim}{Y}}) = (\underset{\sim}{Y} - T\,\underset{\sim}{b})'(Y - T\,\underset{\sim}{b})$$

$$= \underset{\sim}{Y}'\,\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{b}'\,T'\,\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{Y}'\,T\,\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{b}'T'T\,\underset{\sim}{b}$$

$$= \underset{\sim}{Y}'\,\underset{\sim}{Y} - 2\,\underset{\sim}{b}'\,T'\,\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{b}'\,T'\,T\,\underset{\sim}{b}$$

kemudian dicari harga ekstrim untuk f, yaitu f diderivatifkan parsial ke $\underset{\sim}{b}'$, sehingga :

$$\frac{\alpha f}{\alpha \underset{\sim}{b}'} = 2\ T'\ T\ \underset{\sim}{b} - 2\ T'\ T\ \underset{\sim}{Y} = 0$$

$$T'\ T\ \underset{\sim}{b} = T'\ \underset{\sim}{Y}$$

kedua ruas dibagi dengan n, didapatkan :

$$\frac{T'\ T\ \underset{\sim}{b}}{n} = \frac{T'\ \underset{\sim}{Y}}{n}$$

$$R\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{r}$$

$$\underset{\sim}{b} = R^{-1}\ \underset{\sim}{r}\ ,\ \text{dimana}\ |R| \neq 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.15)$$

Mengingat persamaan (2.10), variansi variabel Y dapat dipisahkan menjadi 2 bagian :

yaitu variansi residu dari regresi Hyperplane dinotasikan $S^2_{y.123...m}$ dan variansi Y yang dapat dijelaskan oleh regresi Hyperplane, dinotasikan $R^2_{y.123...m} = \underset{\sim}{r}'\ R\ \underset{\sim}{r}$, sehingga semua kasus umum secara analog berasal dari kasus 3 variabel

Dalam Model vektor $\hat{\underset{\sim}{Y}}$ merupakan proyeksi Y pada hyperplane νm ditetapkan T, sedangkan proyeksinya mempunyai panjang sama dengan koefisien korelasi berganda, yang mana juga sama dengan cosinus sudut antara Y dan $\hat{\underset{\sim}{Y}}$ Bobot regresi b juga digambarkan oleh arah posisi Y menurut "Resultante hyperparallelogram".

Pada persamaan (3.15) diisyaratkan $|R| \neq 0$, bagaimana jika $|R| = 0$ jawabannya adalah m vektor $\underset{\sim}{T}$ pola hyperplane pasti mempunyai dimensi lebih rendah daripada m , karena R mempunyai rank lebih kecil daripada m,

oleh karena itu kita dapat mengabaikan variabel X yang bergantung linier dengan variabel X lainnya.

Dalam model vektorpun keadaan korelasi parsial juga sesuai dengan kasus 3 variabel. Coba bayangkan hyperplane dalam ruang tegak lurus dengan vektor $\underset{\sim}{Y}$, dengan proyeksi vektor $\underset{\sim}{T}$ pada bidang ini. Bidang tersebut adalah νm dan vektor $\underset{\sim}{T}_i$; mempunyai proyeksi padanya dengan panjang $\sqrt{1-r^2_{y.xi}}$, sedangkan cosinus sudut antara proyeksi-proyeksi itu sama dengan korelasi parsial. Jadi rumus (3.13) tetap berlaku, untuk sembarang korelasi $r_{xixj.y}$.

Dengan begitu dapat juga dinyatakan tingkat korelasi parsial yang lebih tinggi. Demgan simbol $r_{xi\ xj.xk\ xl}$ atau secara singkat ditulis $r_{ij.kl}$, yaitu mengartikan korelasi antara deviasi X_i dari bidang regresi untuk regresi X_i pada X_k dan X_l disatu sisi dan deviasi X_j dari bidang regresi X_j pada X_k dan X_l di sisi yang lain.

Dalam perhitungannya, pertama-tama dicari/hitung $r_{ij.k}$, $r_{il.k}$ dan kemudian dihitung $r_{ij.kl}$ dari :

$$r_{ij.kl} = \frac{r_{ij.k} - r_{il.k}\ r_{jl.k}}{\sqrt{1 - r^2_{il.k}}\ \sqrt{1 - r^2_{jl.k}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.16)$$

dimana rumus (3.13) digunakan pada korelasio setelah Xk dikeluarkan.

Korelasi parsial $r_{ij.klm}$ dinamakan korelasi parsial tingkat kedua. Dan sebagainya dapat dihitung dengan menggunakan rumus (3.13) secara berulang-ulang dari korelasi parsial tingkat sebelumnya secara berurutan (dari tingkat kecil ke tingkat yang lebih besar secara berurutan).

3.3. Contoh Penggunaan Rumus

Untuk penjelasannya, diberikan 3 variabel sebagai berikut (Blau dan Duncan 1967),

X = tingkat pendidikan ayah

Y = tingkat pendidikan anak

Z = status kedudukan akhir anak

Korelasi antara variabel-variabel diberikan dalam tabel 3.1, urutan waktu dari variabel ditentukan, yaitu pendidikan ayah mendahului pendidikan anak dan status kedudukan akhir anak. Kita amati bagaimana regresi Z pada 2 variabel yang lebih awal/mula.

Tabel 3.1. Contoh Korelasi

	X	Y	Z
X	1	0,453	0,322
Y	0,453	1	0,596
Z	0,322	0,596	1

Bobot regresi $\underset{\sim}{b}_3$ dihitung dari persamaan (3.6), yaitu :

$$\underset{\sim}{b}_3 = R_{12}^{-1} \underset{\sim}{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0,453 \\ 0,453 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,322 \\ 0,596 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0,795} \begin{pmatrix} 1 & -0,453 \\ -0,453 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,322 \\ 0,596 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0,795} \begin{pmatrix} 0,052 \\ 0,450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,065 \\ 0,566 \end{pmatrix}$$

Korelasi berganda diperoleh dari :

$$R^2_{Z.xy} = \underset{\sim}{b}'_3 \underset{\sim}{r}_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0,065 & 0,566 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,322 \\ 0,596 \end{pmatrix} = 0,359$$

dan $R_{Z.xy} = \sqrt{R^2_{Z.xy}} = \sqrt{0,359} = 0,599$

Dengan begitu nampak bahwa $R_{Z.xy}$. sedikit lebih besar dibanding r_{ZY} , jadi peramalan Z dan Y tidak membuat lebih baik, jika dimuati X sebagai peramal kedua. Ini juga nampak benar untuk korelasi parsial $r_{ZY.x}$ yang

dihitung dari persamaan (3.13) sebagai berikut :

$$r_{ZY.x} = \frac{r_{YZ} - r_{YX}\, r_{ZX}}{\sqrt{2-r^2_{YX}}\ \sqrt{1-r^2_{XZ}}} = \frac{0,596 - (0,453)(0,322)}{\sqrt{1-0,453^2}\ \sqrt{1-0,322^2}}$$

$$= 0,533$$

Dari situ nampak $r_{ZY.x}$ sedikit lebih kecil daripada r_{YZ} , yang mana menunjukkan sangat kecilnya korelasi antara Y dan Z dapat diterangkan oleh ketergantungannya dengan variabel X.

Jadi persamaan regresinya adalah :

$\hat{Z} = 0,065\ X + 0,566\ Y$, dimana $\hat{Z}$ komponen dari Z yang bergantung pada X dan Y. Dengan variansinya =

$$r^2_{Z.YX} = 0,359$$

Oleh karena itu bisa juga dituliskan persamaan :

$$Z = 0,065\ X + 0,566\ Y + \hat{e} \ldots\ldots\ldots\ldots (3.17)$$

yang mana kompnen $\hat{e}$ yang ditambahkan merupakan komponen dari Z yang tidak bergantung pada X dan Y. Dari situ akan didapatkan variansi komponen :

$$V(e_z) = 1 - R^2_{Z.YX} = 1 - 0,359 = 0,641$$

Karena variabel X, Y dan Z dalam persamaan (3.17) telah ditransformasikan ke variabel T. Hal ini akan lebih baik dibuat anggapan (asumsi) yang sama untuk keempat variabel dan dituliskan :

$$Z = 0,065\ X + 0,566\ Y + 0,801\ e \ldots\ldots\ldots (3.18)$$

Komponen e (berbeda dengan $\hat{e}$) merupakan variabel exogin yang diasumsikan sebagai variabel T, penambahannya pada varians Z menimbulkan koefisien pada persamaan (3.18), yang mana sama dengan akar kuadrat dari varians tambahannya (residu), yaitu $\sqrt{0,641} = 0,801$

Hasilnya dapat dilukiskan seperti pada gambar 3.3.

Dalam hal ini variabel dilukiskan sebagai simpul jaringan tunggalnya mata panah menunjukkan bahwa Z bergantung pada X, Y dan e. Selanjutnya jumlah tanda panah menyatakan persamaan (3.18). Rangkapnya mata panah menunjukkan bahwa X dan Y berkorelasi (arah ketergantungan dimulai dari sisi kiri), nisal X peramal /mempengaruhi Z.

Gb. 3.3

Diagram lintasan dari korelasi berganda.