BAB III

PEWARNAAN GRAPH

3.1. PEWARNAAN TITIK

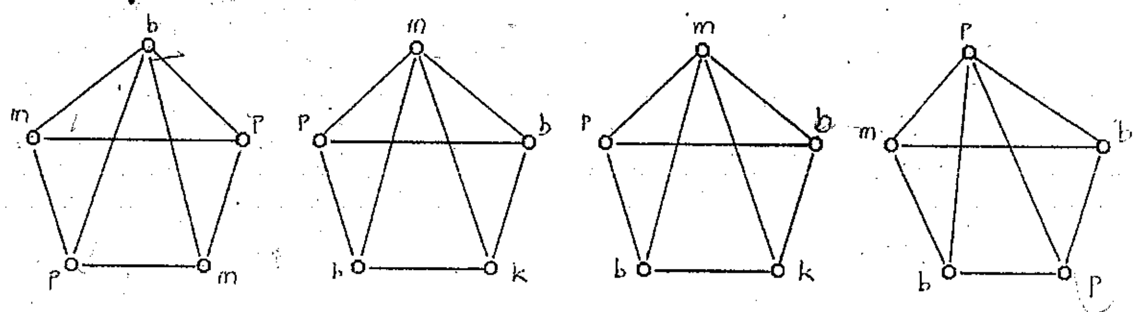
Definisi 17 :

Pewarnaan-λ suatu graph G adalah suatu pemberian λ warna pada semua titik dari graph tersebut sedemikian sehingga titik-titik yang bersisian mempunyai warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan-λ , maka G dikatakan berwarna-λ .

Definisi 18 :

Bilangan kromatik dari G yang dinotasikan dengan K(G) adalah jumlah minimum λ yang dibutuhkan dimana G nya berwarna-λ .

Gambar 3.1 menunjukkan tiga macam pewarnaan yang berbeda pada graph yang sama, masing-masing dengan pewarnaan-λ , dimana $\lambda = 3$, 4 dan 5, sedangkan gambar (d) bukan merupakan pewarnaan graph.



(a) (b) (c) (d)

Gambar 3.1

Keterangan :

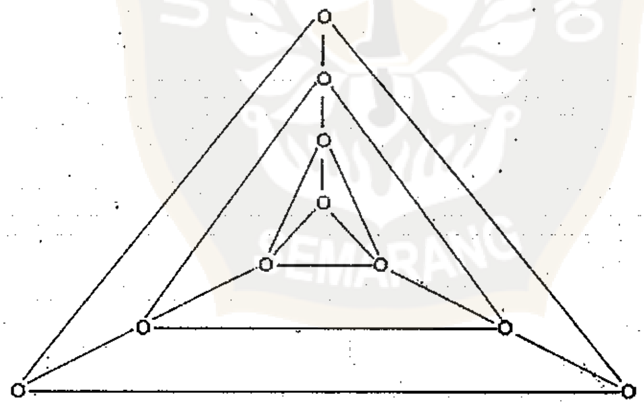
m = merah b = biru h = hijau

p = putih k = kuning

Dapat dilihat pada gambar 3.1 diatas bahwa bilangan kromatik K(G)=3, sejak G mengandung 3 titik yang saling bersisian (dengan membentuk suatu segitiga) dimana harus diberikan warna yang berbeda.

Suatu metode sederhana yang digunakan untuk memperoleh batas bawah K(G) adalah dengan mencari subgraph lengkap terbesar dalam G.

Contohnya, pada graph berikut mengandung graph lengkap K_4, sehingga $K(G) \geq 4$.



Gambar 3.2

Adapun batas atas dari bilangan kromatik K(G) dapat ditentukan berdasarkan derajat titiknya yang diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 3.1 :

Jika d adalah derajat maksimum dari suatu titik didalam graph G maka $K(G) \leq d+1$

Bukti :

Untuk membuktikannya akan ditunjukkan bahwa kita dapat melakukan suatu pewarnaan-(d+1) pada G. Misal diberikan (d+1) warna yang berbeda. Pilih sembarang titik v_0, dan warnai titik tersebut dengan suatu warna sembarang dari (d+1)warna. Kemudian pilih suatu titik yang belum berwarna, katakan v_1, warnai titik v_1 ini dengan suatu warna yang belum diberikan pada titik-titik yang bersisian terhadapnya. Hal ini selalu mungkin, karena derajat dari v_i atau $d_{vi} \leq d$, berarti paling banyak d warna yang sudah dipakai oleh titik-titik yang bersisian dengan v_0, jadi v_1 dapat diwarnai dengan warna ke (d+1). Ulangi proses ini dengan menentukan titik v_1 yang baru sampai semua titik telah diwarnai. Jadi dengan perkataan lain $K(G) \leq d+1$.

Catatan :

Dari cara pewarnaan tersebut, jelas bahwa bilangan kromatik untuk graph lengkap dan cycle yang panjangnya ganjil adalah d+1 atau $K(G)=d+1$.

3.2. POLINOMIAL KROMATIK

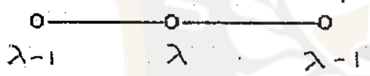
Definisi 19 :

$P(G, \lambda)$ adalah banyaknya cara pewarnaan titik-titik dari G dengan λ warna sedemikian sehingga tidak ada 2 titik bersisian diberi warna yang sama. Fungsi $P(G, \lambda)$ disebut polinomial kromatik dari G.

Contoh 1 :

Jika G adalah path P_3, maka untuk mewarnai titik - titik graph tersebut titik yang berada ditengah dapat diwarnai sembarang dari λ warna. Dan warna ini tidak dapat dipakai lagi untuk mewarnai titik lainnya agar memenuhi syarat pewarnaan. Sehingga titik-titik yang bersisian dengannya dapat diwarnai dengan salah satu warna dari $(\lambda -1)$ warna yang tersisa, maka : $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda -1)^2$.

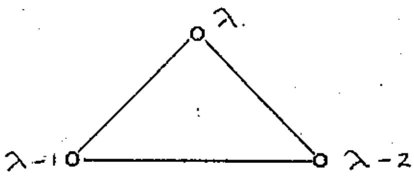
G :



Contoh 2 :

Jika G adalah suatu graph lengkap K_3, maka titik teratas bisa diwarnai sembarang dari λ warna, titik yang lainnya dapat diwarnai dengan $\lambda -1$ warna karena titik ini bersisian dengan titik teratas. Dan pada titik yang lainnya (sisa) dapat diberi sembarang warna dari $\lambda -2$ warna yang belum diberikan pada 2 titik lainnya. Maka :

$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda -1)(\lambda -2)$



Dari contoh diatas, kita dapat mengembangkannya yang lebih umum lagi yaitu jika G adalah graph lengkap K_n, maka :

$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)$

Untuk mudahnya diambil notasi $\lambda^{(n)}$ yang menyatakan bentuk faktorial dari $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)$.

Contoh 3 :

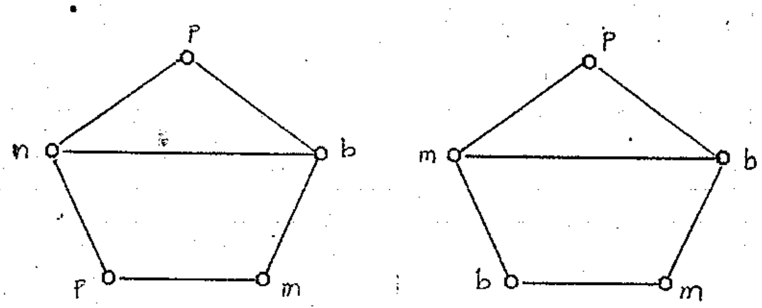
Ambil graph G sebagai graph kosong dengan p titik. p titik ini masing-masing dapat diwarnai dengan λ cara. Sehingga untuk graph ini berlaku :

$P(G, \lambda) = \lambda^p$

Pada pewarnaan suatu graph G dalam λ warna bisa terjadi 2 hal berikut :

1. Titik A dan B yang tidak bersisian mendapat warna yang sama.
2. Titik A dan B yang tidak bersisian mendapat warna yang berbeda.

Contoh :



Gambar 3.3

Keterangan :

m = merah b = biru p = putih

Teorema 3.2 :

G adalah suatu graph sederhana, misal A dan B dua titik yang tidak bersisian dalam graph G. G` adalah sebuah graph yang didapatkan dari G dengan menghubungkan sebuah garis antara A dan B. Sedangkan G" adalah sebuah graph yang didapatkan dengan menyatukan titik A dan B yang menjadi sebuah titik tunggal, maka :

$P(G, \lambda) = P(G`, \lambda) + P(G", \lambda)$

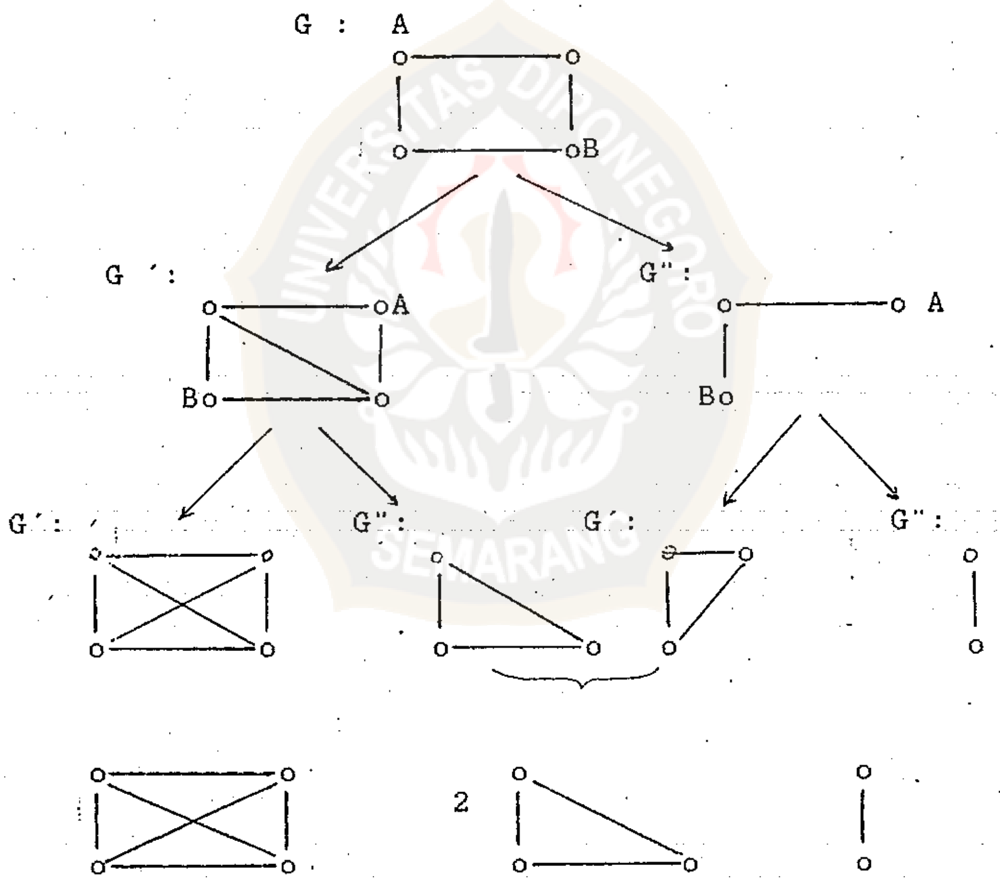
Bukti :

Jumlah cara pewarnaan dari G dapat dikelompokkan dalam 2 kelompok. Kelompok 1 adalah pewarnaan G dimana titik A dan B mempunyai warna yang sama dan kelompok 2 adalah pewarnaan G dimana titik A dan B mempunyai warna yang berbeda. Banyaknya pewarnaan-λ dari G dimana A dan B diberi warna yang berbeda tidak berubah, jika suatu garis menghubungkan titik A dan B, oleh karenanya sama dengan banyaknya pewarnaan-λ dari G`. Banyaknya pewarnaan-λ dari G dimana A dan B diberi warna yang sama tidak berubah, jika titik-titik A dan B disatukan, dan karenanya sama dengan banyaknya pewarnaan-λ dari G". Sehingga jumlah banyaknya pewarnaan-λ dari G adalah :

$P(G, \lambda) = P(G`, \lambda) + P(G", \lambda)$

Untuk mengganti penulisan $P(G,\lambda) = P(G',\lambda)+P(G'',\lambda)$, akan digambarkan dibawah ini dimana graph G diambil graph yang sederhana.

Dengan menggunakan teorema diatas secara berulang-ulang dengan menandai A dan B sebagai titik yang perlu diperhatikan pada tiap - tiap langkah, maka didapat :



Jadi $P(G,\lambda) = \lambda^{(4)} + 2\,\lambda^{(3)} + \lambda^{(2)}$

Dari hasil yang didapat, tampak bahwa polinomial kromatik dari suatu graph disederhanakan menjadi penjumlahan bilangan faktorial.

Dari teorema 3.2 maka sebagai akibatnya diperoleh teorema berikut :

Teorema 3.3 :

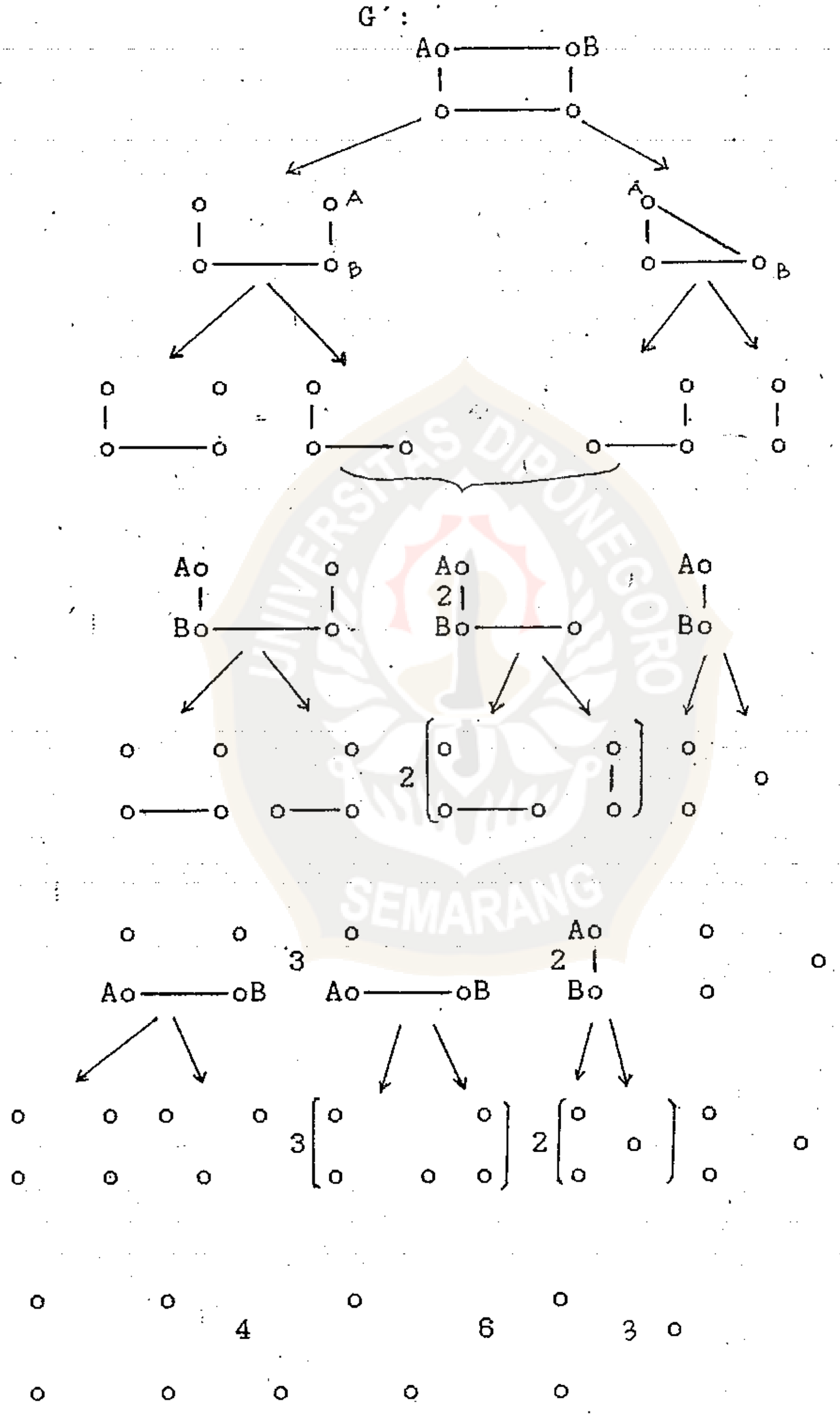
G adalah suatu graph sederhana, misal G` dan G" adalah graph yang diperoleh dari G` dengan menghapus dan menyatukan antara titik A dan B menjadi sebuah titik tunggal, maka :

$P(G`, \lambda) = P(G, \lambda) - P(G", \lambda)$

Bukti :

Pada teorema 3.2 proses yang dilakukan adalah proses penambahan garis dan berakhir dengan polinomial kromatik yang dinyatakan dalam bentuk faktorial pada graph - graph lengkap. Tetapi pada teorema ini proses yang dilakukan adalah proses penghapusan garis. Apabila A dan B adalah 2 titik yang bersisian dalam G`, maka G = G`- (A,B) dan G" diperoleh dari G dengan menyatukan (A,B) dalam sebuah titik tunggal. Proses penghapusan garis ini akan berakhir dalam bentuk polinomial graph kosong.

Sebagai contoh perhatikan graph dibawah ini :



Dari uraian gambar diatas didapatkan :

$P(G, \lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda$

3.3. PEWARNAAN GARIS

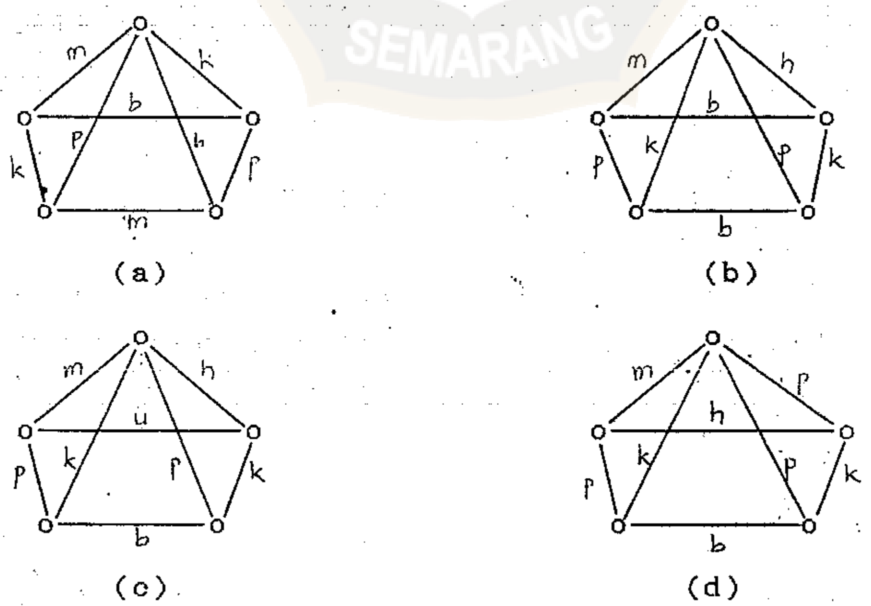
Definisi 20 :

Pewarnaan garis-λ dari suatu graph G adalah suatu pemberian λ warna pada tiap - tiap garis dari G sedemikian sehingga 2 garis / lebih yang bertemu pada suatu titik diberi warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan garis-λ, maka G dikatakan berwarna garis-λ.

Definisi 21 :

Index kromatik dari G dinotasikan K\`(G), adalah jumlah minimum λ yang dibutuhkan dimana G nya berwarna garis-λ.

Contoh :



(a) (b) (c) (d)

Gambar 3.5

Keterangan :

m = merah   b = biru   p = putih

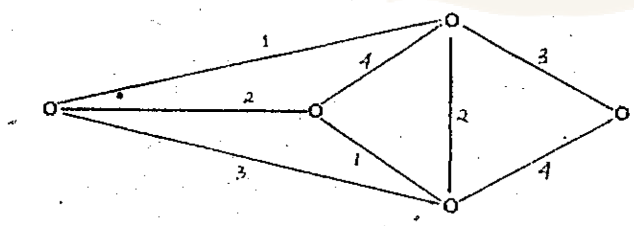
k = kuning   h = hijau   u = ungu

Pada gambar diatas (a),(b) dan (c) merupakan pewarnaan garis-4, pewarnaan garis-5 dan pewarnaan garis-6 dari suatu graph G dengan 8 garis. Sedangkan gambar (d) bukan merupakan pewarnaan garis, sebab ada 2 garis berwarna sama yang bertemu pada satu titik.

Selanjutnya , sejak G mengandung 4 garis yang bertemu pada satu (yaitu suatu titik yang berderajat 4), yang mana harus diberi warna yang berbeda-beda, maka K\`(G)=4.

Untuk menentukan batas bawah K\`(G) adalah dengan mencari derajat suatu titik yang terbesar dalam G, sehingga K\`(G)≥d.

Contoh :



Gambar 3.6

Jelas terlihat dari gambar diatas , jika derajat terbesar dalam G tersebut adalah 4, maka K\`(G)≥4.

Untuk menentukan batas atas dari index kromatik dapat ditentukan berdasarkan derajat titiknya yang diberikan oleh teorema Vizing berikut.

Teorema 3.4 (Teorema Vizing) :

Jika G adalah graph sederhana yang mempunyai titik dengan derajat terbesar adalah d, maka : $d \leq K'(G) \leq d+1$

Bukti :

Pandang pewarnaan garis suatu graph G yang mempunyai titik dengan derajat maksimum d. Agar memenuhi pewarnaan garis yang proper, garis-garis yang insiden pada satu titik yang berderajat d, haruslah mempunyai warna yang berbeda. Sehingga G merupakan pewarnaan garis-d, tetapi bukan pewarnaan (d-1) maka minimal warna yang dibutuhkan adalah d.

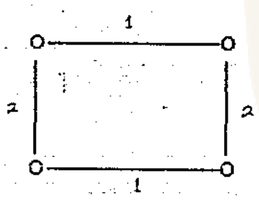
Selanjutnya untuk membuktikan bahwa $K'(G) \leq d+1$ akan dilakukan suatu pewarnaan garis dengan (d+1) warna pada G. Misal diberikan (d+1) warna yang berbeda pada suatu graph. Ambil sembarang garis, kemudian warnai garis tersebut dari salah satu warna (d+1). Selanjutnya pilih garis yang lain yang belum diwarnai, kemudian warnai garis ini dengan suatu warna yang belum diberikan kepada garis-garis yang bersisian terhadap garis pertama yang diambil. Ini terjadi, sebab telah diketahui bahwa derajat maksimumnya adalah d, yang berarti maksimum d warna sudah dipakai oleh garis-

garis yang bersisian dengan garis pertama yang diwarnai, sehingga garis lain ini dapat diwarnai yang ke (d+1) warna.

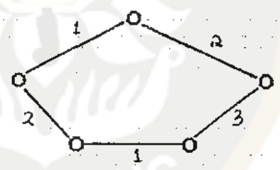
Dari teorema Vizing diatas, maka dapat dikatakan bahwa jika G adalah sembarang graph sederhana, maka index kromatik dari G adalah d atau d+1. Ini memberikan suatu cara pengklasifikasian beberapa graph sederhana dalam 2 kelompok, yaitu : K\`(G)=d atau K\`(G)=d+1.

Dari pengelompokkan ini jelas bahwa cycle yang panjangnya ganjil K\`(G)=d+1 dan untuk cycle yang panjangnya genap K\`(G)=d.

Contoh :



$K`(C_4)=2$



$K`(C_5)=3$

Teorema 3.5 :

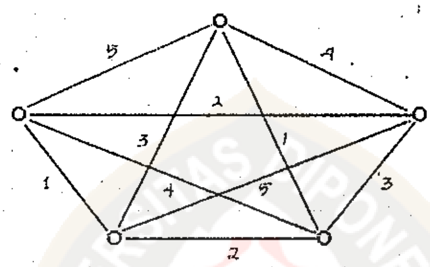
Index kromatik dari suatu graph lengkap yang mempunyai n titik,

$K`(K_n)=n$ jika n adalah ganjil dan

$K`(K_n)=n-1$ jika n adalah genap

Bukti :

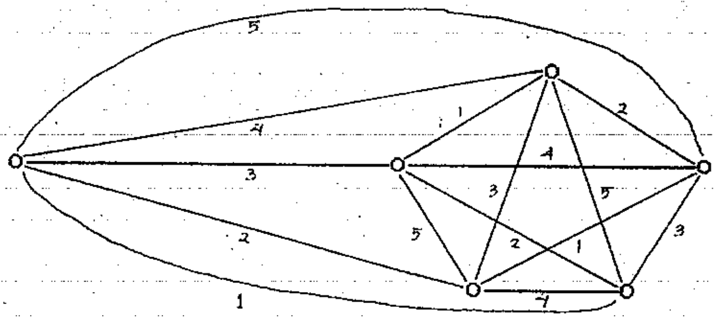
Jika n ganjil, pewarnaan garis pada semua garis dari K_n diperoleh dengan menempatkan titik-titik dari K_n membentuk polygon yaitu n-gon. Selanjutnya warnailah garis-garis yang terletak pada tapal batas dengan warna yang berbeda-beda dan apabila masih ada garis-garis sisa yang belum diberi warna, berilah warna yang sama dengan warna dari garis-garis pada tapal batas yang sejajar dengannya (lihat gambar 3.7).



Gambar 3.7

Dari pengamatan akan didapat bahwa banyak garis dengan warna sama maksimal adalah ½(n-1), maka K_n tidak mungkin merupakan (n-1) pewarnaan garis sehingga K`(G)=n

Jika n genap (n≥4), maka K_n dapat dipandang sebagai jumlahan lengkap (n-1) graph dengan titik tunggal. Pemberian warna pada garis-garis dari K_{n-1} persis seperti cara diatas, maka pasti pada setiap titik dari K_{n-1}, itu terdapat tepat 1 warna yang kurang dari garis-garis yang insiden dengannya. Dan warna-warna yang kurang itu semuanya berlainan. Keadaan demikian dapat dimanfaatkan untuk memberikan warna-warna ini pada garis-garis sisa dari K_n yang belum diberi warna (lihat gambar 3.8).



Gambar 3.8

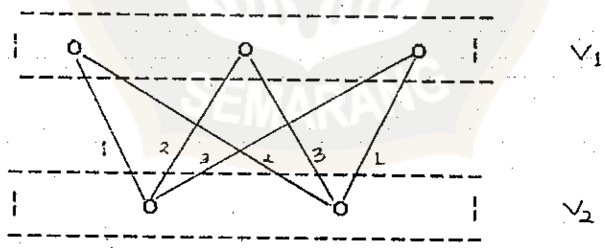
Akhirnya dari hal-hal diatas diperoleh bahwa index kromatik dari suatu graph lengkap dengan n titik adalah n-1 jika n adalah genap, sebaliknya adalah n jika n adalah ganjil.

Teorema 3.6 :

$K`(K_{m,n}) = d = \max(m,n)$

Bukti :

Misal $m \geq n$ dan $K_{m,n}$ (lihat gambar 3.9) dengan banyak titik n dalam V_2 dan m titik dalam V_1.



Gambar 3.9

Pewarnaan garis didapat dengan memberikan warna pada garis-garis yang insiden dengan n titik. Sesuai arah jarum jam yaitu (1,2,...,m); (2,3,...,m,1); (n,m,1,2,...,n-1). Jadi $K`(K_{m,n})=\max(m,n)$.