BAB II

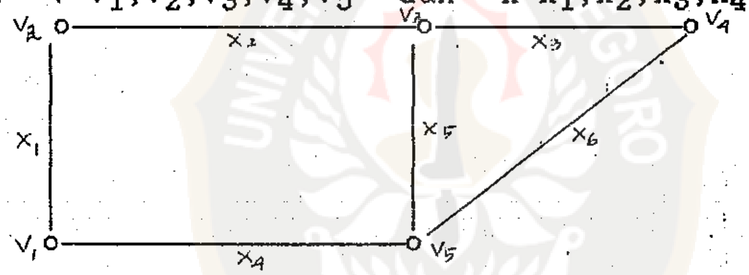
PENGERTIAN DASAR TENTANG GRAPH

2.1. BEBERAPA DEFINISI DASAR DALAM GRAPH

Definisi 1 :

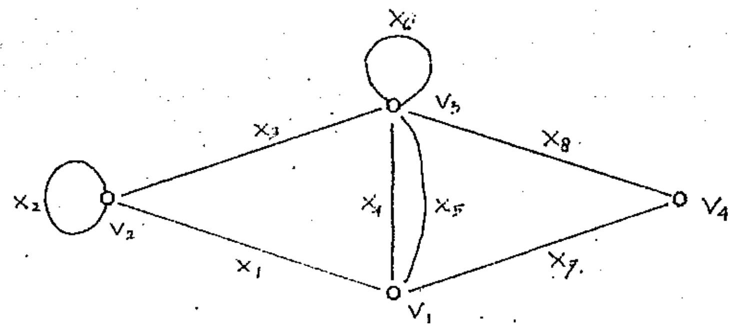
Suatu graph $G=(V,X)$ adalah suatu himpunan tidak kosong yang hingga dan terdiri dari titik-titik $V=V(G)$ dan garis-garis $X=X(G)$.

Gambar berikut ini adalah suatu graph $G=(V,X)$ dengan $V=v_1,v_2,v_3,v_4,v_5$ dan $X=x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6$



Gambar 2.1

Gambar dibawah ini merupakan suatu graph yang lebih umum, disebut Multigraph karena mengandung garis berganda (paralel) yaitu 2 buah garis yang mempunyai titik ujung yang sama (x_4,x_5) dan Loop yaitu garis yang kedua titik ujungnya berimpit (x_2).



Gambar 2.2

Suatu (p,q)-graph adalah graph yang mempunyai p titik dan q garis. Dan (1,0)-graph adalah merupakan trivial.

Definisi 2 :

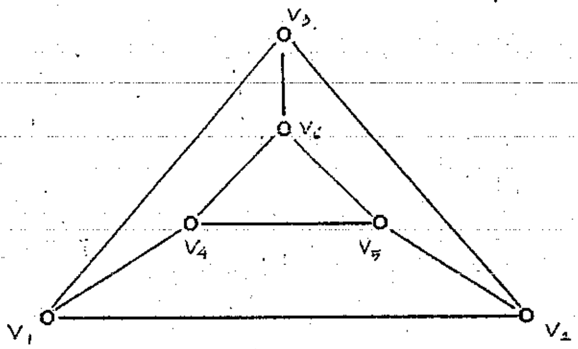
Suatu graph G=(V,X) yang tidak mengandung garis sejajar atau loop disebut graph sederhana (simple graph).

Dua buah garis yang tidak paralel disebut bersisian (adjacent) kalau keduanya mempunyai satu titik persekutuan; misalnya garis x_3 dan x_4 pada gambar 2.2.

Sedangkan dua buah titik sembarang v_i dan v_j disebut bersisian kalau ada garis yang langsung menghubungkan kedua titik tersebut; misalnya titik v_1 bersisian dengan titik v_4. Bila sebuah titik v_i adalah titik ujung dari beberapa garis x_j maka dikatakan v_i insiden dengan x_j atau x_j insiden dengan v_i; misalnya dalam gambar 2.2 garis x_3, x_4, x_5, x_6, x_8 insiden dengan titik v_3.

Banyaknya garis yang insiden pada titik v_i disebut derajat titik v_i, dilambangkan dengan d_i. Dapat diperiksa dengan mudah bahwa graph pada gambar 2.2 memiliki satu titik berderajat 2, dua titik berderajat 4 dan satu titik berderajat 6. Apabila dijumlahkan diperoleh $d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)+d(v_4) = 16$ = 2.(banyaknya garis dari graph G).

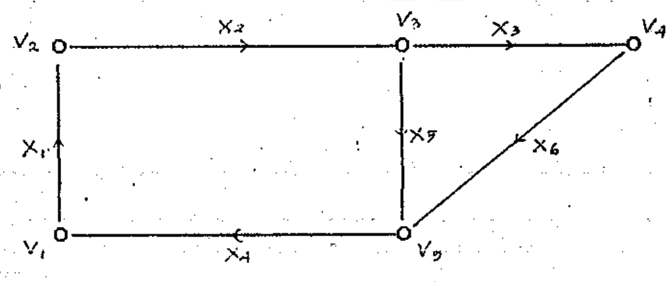
Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk suatu (p,q)-graph,



Gambar 2.3

Dalam keadaan tertentu suatu graph dapat dipandang sebagai graph berarah (directed graph); apabila himpunan pasangan anggota titik-titik merupakan pasangan terurut yang disebut arc (v_i, v_j), dengan v_i disebut titik pangkal dan v_j disebut titik ujung, dan apabila merupakan pasangan tidak terurut disebut graph tidak berarah (Undirected graph).

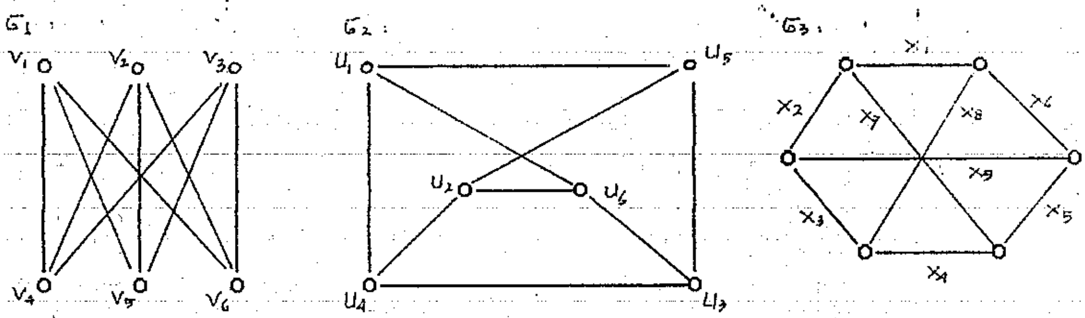
Dalam bentuk geometrinya, setiap garis diberi tanda panah sesuai dengan arah yang dikehendaki. Dalam gambar 2.4 ditunjukkan suatu graph berarah bagi graph pada gambar 2.1.



Gambar 2.4

Suatu graph G dilabeli bila p titik / q garis dibedakan antara satu dan yang lainnya dengan urutan/nama-nama. Misal $v_1, v_2, \ldots v_p$ atau $x_1, x_2, \ldots x_q$

Contoh :



Gambar 2.5

graph G_1, G_2 dan G_3 diatas dilabeli.

Definisi 3 :

Dua graph $G=(V,X)$ dan $G`=(V`,X`)$ disebut Isomorfis jika ada korespondensi 1-1 antara V dan V`, dan antara X dan X`, sehingga hubungan insiden terpelihara, dilambangkan dengan $G \cong G`$.

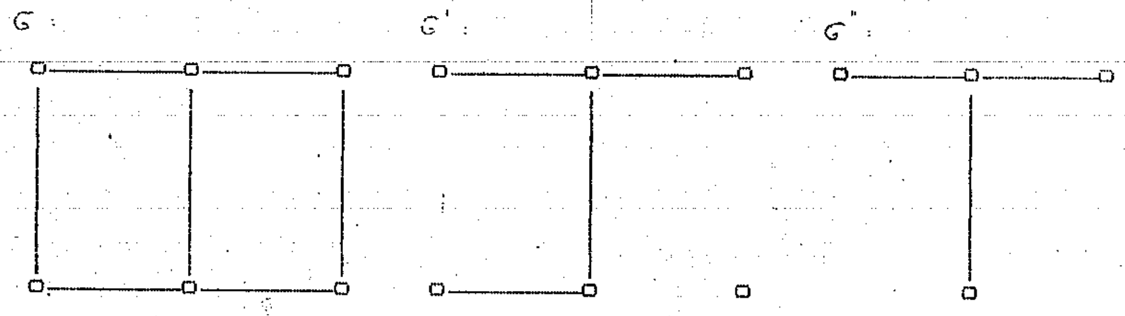
Contoh pada gambar 2.5 G_1 dan G_2 adalah isomorfis.

Definisi 4 :

Graph $G`=(V`,X`)$ disebut subgraph dari graph G jika semua titik dan garis dari G`, juga terletak di G dan setiap garis dari G` mempunyai titik ujung yang sama dengan di G; keadaan ini dilambangkan dengan $G` \subseteq G$.

Apabila $S \subset V(G)$ maka Induced Subgraph $\langle S\rangle$ adalah suatu graph dengan himpunan titiknya S dan yang merupakan maximal subgraph dari G. Jadi 2 titik dalam $\langle S\rangle$ bersisian jika dan hanya jika titik-titik itu bersisian dalam G.

Contoh :



Gambar 2.6

G' adalah subgraph dari G

G" adalah induced subgraph <S>

2.2. KETERHUBUNGAN PADA GRAPH

Definisi 5 :

Suatu walk didalam G adalah deretan terdiri atas titik-titik dan garis secara bergantian yang hingga, diawali dan diakhiri dengan titik, berbentuk $v_1, x_1, v_2, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n$. Dimana setiap garis insiden dengan titik v_i dan v_{i+1}.

Apabila titik awal dan titik akhir sama dalam deretan itu maka deretan disebut tertutup. Jika tidak demikian maka deretan disebut terbuka.

Definisi 6 :

Apabila semua garis pada suatu walk berlainan maka walk itu disebut trail. Pada suatu trail titik-titik boleh dilalui lebih dari satu kali.

Definisi 7 :

Apabila pada suatu walk semua titik berlainan maka walk tersebut dinamakan suatu path.

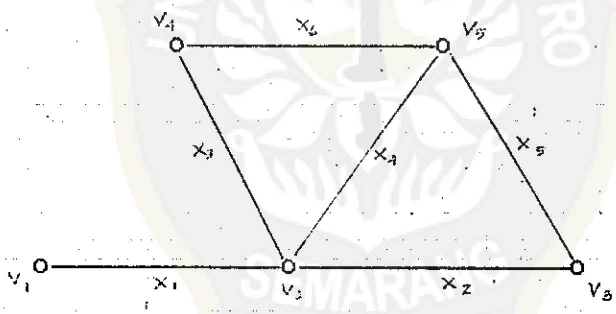
Jadi path pasti suatu trail tetapi tidak sebaliknya.

Definisi 8 :

Apabila suatu path itu tertutup maka disebut cycle.

Cycle yang mempunyai n titik dinotasikan dengan c_n, cycle dengan panjang tiga disebut segitiga (triangle).

Contoh :



Gambar 2.7

Deretan titik dan garis ($v_1, x_1, v_2, x_2, v_3, x_2, v_2, x_4, v_5$) adalah suatu walk tetapi bukan merupakan trail karena garis x_2 digunakan dua kali. Deretan tersebut dapat disingkat menyajikannya dengan v_1, v_2, v_3, v_2, v_5.

Deretan garis (x_1, x_4, x_6, x_3, x_2) adalah suatu trail.

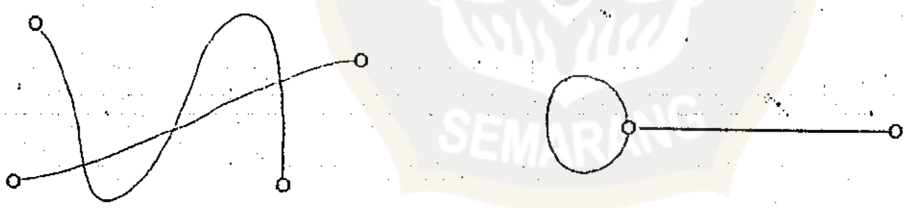
Deretan titik (v_1, v_2, v_4, v_5, v_3) adalah suatu path yang menghubungkan titik v_1 dan v_3, panjangnya = 4.

Deretan titik (v_2, v_4, v_5, v_3, v_2) merupakan suatu cycle yang panjangnya = 4 dan deretan titik (v_2, v_5, v_3, v_2) adalah segitiga.

Definisi 9 :

Suatu graph disebut terhubung (connected), jika untuk setiap dua titik pada graph tersebut dihubungkan dengan suatu path. Dalam hal lain disebut graph tak terhubung (disconnected graph).

Kiranya jelas, bahwa graph tak terhubung paling sedikit mempunyai dua subgraph terhubung; masing-masing subgraph ini disebut komponen dari graph tak terhubung itu; misalnya graph pada gambar 2.8 mempunyai 3 komponen.



Gambar 2.8

2.3. JENIS-JENIS GRAPH

Graph dapat diklasifikasikan dalam beberapa jenis, tergantung bagaimana cara memandang kekhasan strukturnya. Berikut ini disajikan deskripsi sejumlah graph khusus yang sering dijumpai dalam teori aplikasi graph.

Definisi 10 :

Graph kosong adalah graph yang tidak mempunyai garis.

Graph kosong dengan p titik dilambangkan dengan N_p.

Misalnya N_4 dan N_5 disajikan pada gambar 2.9

N_4 N_5

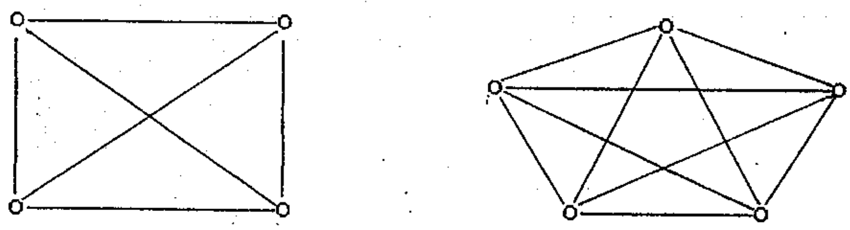
Gambar 2.9

Definisi 11 :

Graph lengkap adalah suatu graph dimana setiap titik bersisian dengan setiap titik lainnya.

Graph lengkap dengan p titik dilambangkan dengan K_p.

Misalnya K_4 dan K_5 disajikan pada gambar 2.10. Kedua graph tersebut masing-masing mempunyai enam dan sepuluh garis. Pada umumnya dapat dilihat dengan mudah dari contoh-contoh bahwa K_p mempunyai $\binom{p}{2}$ garis.



K_4 K_5

Gambar 2.10

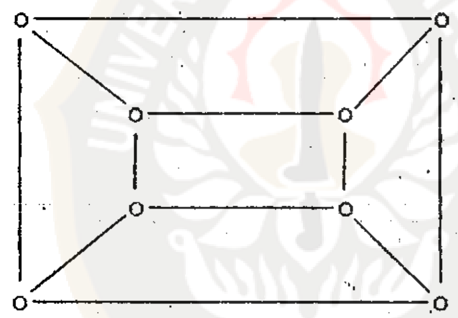
Definisi 12 :

Graph reguler adalah graph yang setiap titiknya berderajat sama.

Graph G disebut graph reguler berderajat r bila setiap titiknya berderajat r.

Misalnya graph pada gambar 2.11 merupakan graph reguler berderajat 3. Dengan jelas terlihat bahwa setiap graph kosong adalah graph reguler berderajat nol, dan graph lengkap adalah graph reguler berderajat p-1.

Contoh :

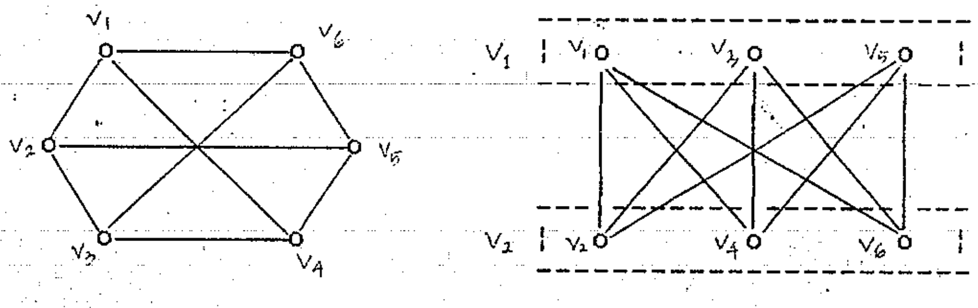


Gambar 2.11

Definisi 13 :

Suatu graph G=(V,X) disebut graph bipartisi bila himpunan titik-titik V disekat dalam 2 himpunan bagian V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap garis menghubungkan suatu titik dari V_1 dengan suatu titik dari V_2 . Graph ini dilambangkan dengan $G(V_1,V_2)$.

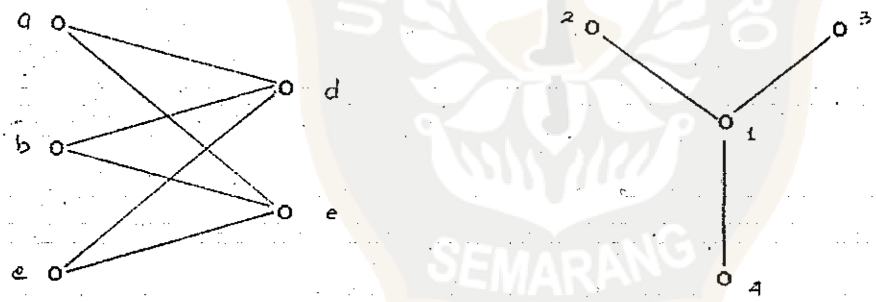
Misalnya graph pada gambar 2.12 adalah graph bipartisi dengan himpunan titik - titiknya $V_1=(v_1,v_3,v_5)$ dan $V_2=(v_2,v_4,v_6)$



Gambar 2.12

Jika ada garis yang menghubungkan setiap titik kesetiap titik lainnya, maka disebut sebagai graph bipartisi Lengkap, dilambangkan dengan $K_{m,n}$; sedangkan m dan n masing-masing ialah banyaknya titik dari V_1 dan V_2. Khususnya $K_{1,n}$ disebut bintang (star).

Contoh :



Gambar 2.13

Gambar 2.13 (a) ———> $k_{3,2}$ mempunyai 6 garis

Gambar 2.13 (b) ———> $k_{1,3}$ disebut star

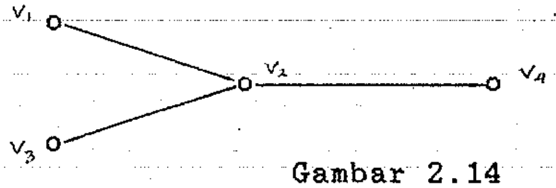
Definisi 14 :

Tree adalah suatu graph terhubung yang tidak mengandung cycle.

Beberapa sifat dari Tree :

1. Setiap titik dihubungkan dengan path tunggal
2. $p = q + 1$ dimana p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya garis.

Contoh :

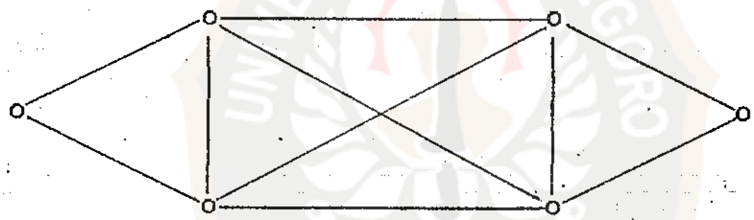


Gambar 2.14

Definisi 15 :

Suatu graph terhubung disebut graph euler (eulerian graph) jika ada walk tertutup yang melalui semua titik pada setiap garis yang berbeda.

Contoh :

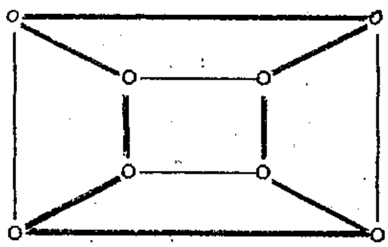


Gambar 2.15

Definisi 16 :

Graph terhubung disebut graph hamilton kalau ada cycle yang memuat semua titik dari G.

Sebagai ilustrasi, misalnya graph pada gambar 2.16 merupakan graph hamilton. Cyclenya digambarkan dengan garis yang dicetak tebal.



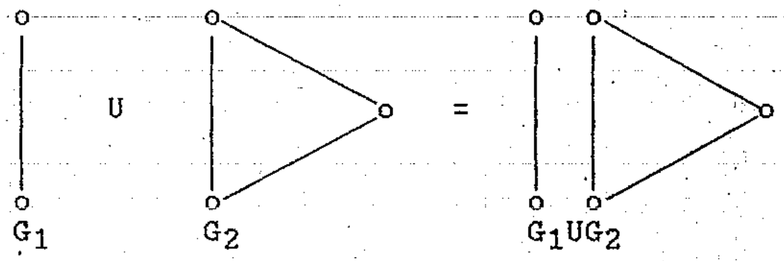
Gambar 2.16

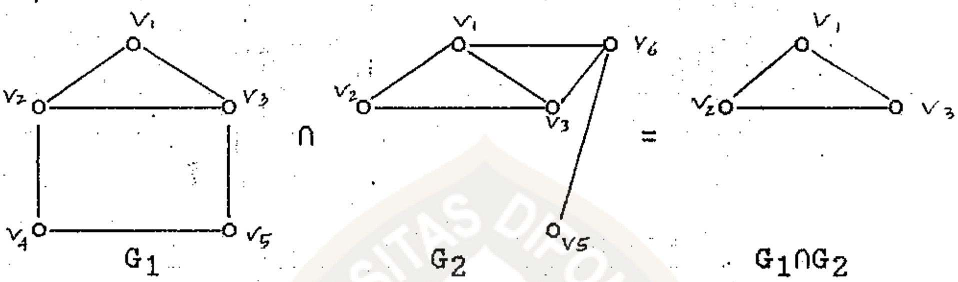
2.4. OPERASI-OPERASI PADA GRAPH

Pandang graph G_1 dan G_2 dimana $G_1=(V_1,X_1)$ dan $G_2=(V_2,X_2)$

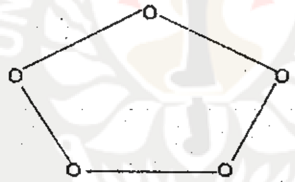
1. Union $G = G_1 \cup G_2$ dimana $V=V_1 \cup V_2$ dan $X=X_1 \cup X_2$
2. Irisan $G= G_1 \cap G_2$ dimana $V=V_1 \cap V_2$ dan $X=X_1 \cap X_2$
3. Jika v suatu titik sembarang pada graph G=(V,X), maka G-v adalah subgraph G yang diperoleh dengan menghapus v dan semua garis yang mencakup v sebagai suau titik ujungnya.
4. Jika x suatu garis sembarang pada graph G=(V,X), maka G-x adalah subgraph G yang diperoleh dengan menghapus garis x dari G. Penghapusan satu garis tidak berakibat penghapusan titik ujungnya.
5. Jika x suatu garis sembarang pada graph G=(V,X), maka G+x adalah supergraph terkecil G yang diperoleh dengan menghubungkan 2 titik yang tidak bersisian dalam G sehingga G mengandung garis dari 2 titik itu.

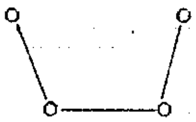
Sebagai contoh dari kelima operasi diatas adalah :

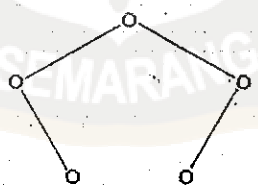
1. 

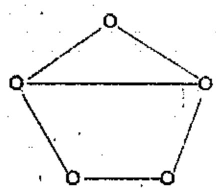
2. 

G :



3. 

4. 

5. 

G – v   G – x   G + x