BAB III

SIFAT-SIFAT DAN INVERS TRANSFORMASI - Z

3.1. Sifat-sifat Transfortasi - Z

Di dalam bab ini akan diuraikan beberapa sifat penting dari tranformasi - Z yang dapat digunakan untuk menentukan X (z) dari $\{x_k\}$.

Beberapa sifat transformasi - Z

3.1.1. Kelinearan

Transformasi - Z adalah suatu operasi linear

$$Z\,[a\,\{x_k\} + b\,\{y_k\}\,] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ax_k + by_k\}\, z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ax_k z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} by_k z^{-k}$$

$$= a\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} + b\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k z^{-k}$$

$$= a\,X\,(z) + b\,Y\,(z)$$

Contoh

1. $U_k = \cos kw_o \quad, k \geq 0$

   ambil barisan a^k, $k \geq 0$

   dengan menggunakan 2.2.3, maka transformasi - Z

   nya adalah $X\,(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ dimana $|az^{-1}| < 1$, $a < |z|$

   Berdasarkan transformasi di atas

   untuk e^{ikw_0} , $k \geq 0$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikw_0} z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{iw_0} z^{-1})^k$$

$$= \frac{1}{1-e^{ikw_0} z^{-1}}, \text{ dimana } |e^{iw_0} z^{-1}| < 1$$

$$1 < |z|$$

Sehingga untuk e^{ikw_0}, $k \geq 0$

diperoleh $X(z) = \dfrac{1}{1-e^{iw_0} z^{-1}}$, di mana $|e^{-iw_0} z^{-1}| < 1$

Jadi dengan menjumlahkan barisan-barisan di atas, di peroleh

$$U(Z) = \frac{\frac{1}{2}}{1-e^{iw_0} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-e^{-iw_0} z^{-1}}, \quad 1 < |z|$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1-e^{-iw_0} z^{-1}) + \frac{1}{2}(1-e^{-iw_0} z^{-1})}{(1/e^{-iw_0} z^{-1})(1-e^{iw_0} z^{-1})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-iw_0} z^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{iw_0} z^{-1}}{1-e^{iw_0} z^{-1} - e^{iw_0} z^{-1} + e^{iw_0} z^{-1} e^{-iw_0} z^{-1}}$$

$$= \frac{1-(\frac{1}{2} e^{-iw_0} z^{-1} + \frac{1}{2} e^{ikw_0} z^{-1})}{1 - 2\cos w_0 z^{-1} + z^{-2}}$$

$$= \frac{1 - \cos w_0 \, z^{-1}}{1 - 2 \cos w_0 \, z^{-1} + z^{-2}}$$

2. $x_k = 2^k + 3^k$, $k \geq 0$

dengan menggunakan 2.2.3, maka transfortasi - Z nya adalah

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (2^k + 3^k) \, z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^{-k}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} + \frac{1}{1 - \frac{3}{z}}$$

untuk barisan yang pertama $| z | > 2$

untuk barisan yang ke dua $| z | > 3$

3.1.2. Pergeseran

Pada bab II telah didifinisikan bahwa barisan-barisan $\{x_k\}$ mempunyai transformasi -Z X(z).

Dalam pergeseran ini akan dicari transformasi -Z dari barisan $\{x_{k \pm k0}\}$ di mana tanda plus menunjukkan pergeseran maju sebanyak k_0 langkah, sedangkan tanda minus menunjukkan mundur sebanyak k_0 langkah

dari difinisi

$$Z [\{X_{k \pm k0}\}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{k \pm k0} \, z^{-k}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \, z^{-m \pm k_0}, \text{ dimana } m=k \pm k_0$$

$$= z^{\pm k_0} \sum_{m=-} x_m z^{-m}$$

$$= z^{\pm k_0} X(z)$$

Penerapan dari sifat ini adalah dalam penentuan suatu keluaran sistem apabila u sebagai masukannya.

Contoh :

Misalkan sistem dilukiskan oleh :

$$y_k + \tfrac{1}{2} y_{k-1} = u_k + u_{k-1}$$

Sedangkan transfortasi -Z nya suku demi suku adalah sebagai berikut :

$$Y(z) + \tfrac{1}{2} z^{-1} Y(z) = U(z) + z^{-1} U(z)$$

$$Y(z) [1 + \tfrac{1}{2} z^{-1}] = U(z) [1 + z^{-1}]$$

sehingga

$$Y(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \tfrac{1}{2} z^{-1}} U(z)$$

Untuk mendapatkan $Y(z)$, harus diketahui $U(z)$ lebih dahulu misalkan $u_k = (\tfrac{1}{2})^k$, $k \geq 0$

maka $U(z)$ $$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^k z^{-k}$$

$$= \frac{1}{1 - \tfrac{1}{2} z^{-1}}$$

sehingga

$$Y(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \tfrac{1}{2} z^{-1}} \quad \frac{1}{1 - \tfrac{1}{2} z^{-1}}$$

$$= \frac{1 + z^{-1}}{(1 + \frac{1}{2} z^{-1})\ (1 - \frac{1}{2} z^{-1})}$$

$$1 + z^{-1} = \frac{A}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$= A(1 - \tfrac{1}{2} z^{-1}) + B(1 + \tfrac{1}{2} z^{-1})$$

$$= A - \tfrac{1}{2} z^{-1} A + B + \tfrac{1}{2} z^{-1} B.$$

$$= (A + B) + (- \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B)\ z^{-1}$$

$$A + B = 1$$

$$-A + B = 2$$

$$\overline{\quad 2B = 3 \quad} +$$

$$B = \frac{3}{2}$$

$$A + B = 1$$

$$A + \frac{3}{2} = 1$$

$$A = 1 - \frac{3}{2}$$

$$= - \frac{1}{2}$$

sehingga dapat ditulis

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

3.1.3. **Transformasi satu pihak.**

Transformasi -Z satu sisi atau satu pihak (unilateral) di difinisikan sbb:

$$X_u(z) = Z_u\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

$$= X_0 + X_1 z^{-1} + X_2 z^{-2} + \ldots.$$

Penerapan transformasi -Z pada suatu barisan tergeser dengan mengambil k_0 tak negatif.

Pertama ditinjau pada barisan mundur x_{k-k0}

$$Z_u\{x_{k-k_0}\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-k_0} z^{-k}$$

$$= \sum_{m=-k_0}^{\infty} x_m z^{-(m+k_0)}, \text{ dimana } m = k-k_0$$

$$= z^{-k_0} \sum_{m=-k_0}^{\infty} x_m z^{-m}$$

$$= z^{-k_0} \{x_{k_0} z^{k_0} + x_{-k_0+1} z^{-k_0+1} + \ldots + x_{-1} z + x_0 + x_1 z^{-1} + \ldots\}$$

$$= x_{-k_0} + x_{k_0+1} z^{-1} + \ldots + x_{-1} z^{-k_0+1} + z^{-k_0}\{x_0 + x_1 z^{-1} + z_2 z^{-1} + \ldots\}$$

$$= x_{-k_0} + x_{-k_0+1} z^{-1} + \ldots + x_{-1} z^{-k_0+1} + x^{-k_0} X_u(z)$$

Contoh:

Untuk $y_k + \frac{1}{2} y_{k-1} = u_k + u_{k-1}$

dengan syarat awal $y_{-1} = 2$, $y_0 = 0$ dan $u_k = (\frac{1}{2})^k, k \geq 0$

transformasi -Z dari $u_k = (\frac{1}{2})^k$ adalah

$$U(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

transformasi - Z dari $y_k + \frac{1}{2} y_{k-1} = u_k + u_{k-1}$

adalah :

$$Z_u\{y_k + \tfrac{1}{2} y_{k-1}\} = Z_u\{u_k + u_{k-1}\}$$

$$Y_u(z) + \tfrac{1}{2} y_{-1} + \tfrac{1}{2} z^{-1} Y_u(z) = U_u(z) + u_{-1} + z^{-1} U_u(z)$$

$$Y_u(z)(1 + \tfrac{1}{2} z^{-1}) + \tfrac{1}{2} .2 = U_u(z)(1 + z^{-1})$$

$$Y_u(z)(1 + \tfrac{1}{2} z^{-1}) + 1 = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$Y_u(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})(1 + \frac{1}{2} z^{-1})} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$\frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})(1 + \frac{1}{2} z^{-1})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2} z^{-1})}$$

$$1 + z^{-1} = A(1 + \tfrac{1}{2} z^{-1}) + B(1 - \tfrac{1}{2} z^{-1})$$

$$= A + \tfrac{1}{2} A z^{-1} + B - \tfrac{1}{2} B z^{-1}$$

$$1 = A + B \implies 1 = A + B$$

$$1 = \tfrac{1}{2} A - 1/2\ B \implies \frac{2 = A - B}{3 = 2A} +$$

$$A = \frac{3}{2}$$

$$1 = A + B$$

$$1 = \frac{3}{2} + B$$

$$B = 1 - \frac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{Jadi } Y_u(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

Kedua ditinjau pada barisan maju, dengan mengambil

$k_0 \geq 0$ maka diperoleh

$$Z_u\{x_{k+k_0}\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-k_0} z^{-k}$$

$$= \sum_{m=k_0}^{\infty} x_m z^{-(m-k_0)}, \text{ di mana } m = k + k_0$$

$$= z^{k_0} \sum_{m=k_0}^{\infty} x_m z^{-m}$$

$$= z^{k_0} [x_{k_0} z^{-k_0} + x_{k_0+1} x^{-(k_0+1)} + \ldots]$$

$$= z^{k_0} [x_u (z) - (x_0 + x_1 z^{-1} + \ldots$$

$$+ x_{k_0-1} z^{-(k_0-1)}]$$

$$= Z^{k_0} x_u(z) - x_0 z^{k_0} - x_1 z^{k_0-1} + \ldots + k_0-1$$

Contoh:

$y_{k+1} + 1/2\ y_k = u_{k+1} + u_k$

dimana $u_k = (\frac{1}{2})^k$ dan $y_0 = 0$, $k \geq 0$ dengan mengguna - kan transformasi satu pihak diperoleh persamaan

$$Z\ Y_u(z) + \tfrac{1}{2}\ y_u(z) = z\ U_u(z) - z + U_u(z)$$

$$Y_u(z)[z + \tfrac{1}{2}] = U_u(z)[z+1] - z$$

$$Y_u(z) = \frac{(z + 1)\ Uu\ (z)}{z + \frac{1}{2}} - \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{z + 1}{z + \frac{1}{2}} U_u(z) - \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} \quad U_u(z) - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$= \frac{1 + z^{-1}}{(1 + \frac{1}{2} z^{-1})(1 - \frac{1}{2} z^{-1})} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$= \frac{- \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} - \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

3.1.4. Konvolusi

Misalkan barisan u_k, $k \geq 0$ transformasi - Z nya U(z) dan barisan h_k, $k \geq 0$ transformasi - Z nya H(z). maka konvolusi dari u dan h adalah barisan y_k, $k \geq 0$, dimana $\{y_k\} = \{u_k\} . \{h_k\}$

dengan $y_k = \sum_{m=0}^{k} u_m h_{k-m}$

transformasi -Z dari y_k adalah Y(z) maka

$$Y(z) = U(z)\ H(z)$$

untuk memperlihatkan bahwa persamaan ini memang berlaku maka pandang hasil kali U(z) H(z).

$$U(z)H(z) = (u_0 + u_1 z^{-1} + u_2\ z^{-2} + \ldots)(h_0 + h_1\ z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots)$$

$$= u_0 k_0 + (u_0 h_1 + u_1 h_0) z^{-1} + (u_0 k_2 + u_1 h_1 + u_2 h_0) z^{-2} + \ldots\ldots$$

$$= y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \ldots$$
$$= Y(z)$$

Dengan menyamakan koefisian-koefisien dari z, maka diperoleh :

$$y_0 = u_0 k_0$$
$$y_1 = u_0 h_1 + u_1 k_0$$
$$y_2 = u_0 h_2 + u_1 h_1 + u_2 h_0$$
$$\vdots$$
$$y_k = u_0 h_k + u_1 h_{k-1} + \ldots + u_{k-1} h_1 + u_k h_0$$
$$= \sum_{m=0}^{k} u_m h_{k-m}$$

untuk k positif dan negatif, maka diperoleh

$$y_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m h_{k-m}$$

Transformasi - Z nya adalah

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [u_m h_{k-m} z^{-k}$$

dengan menukar urutan jumlahan diperoleh

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [u_m z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{k-m} z^{-(k-m)}]$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [u_m z^{-m} H(z)]$$
$$= H(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m z^{-m}$$
$$= H(z)\ U(z)$$

$$U \longrightarrow \boxed{H_1(z)} \longrightarrow \boxed{H_2(z)} \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow \boxed{H_m(z)} \longrightarrow y$$

Gambar 3.1

Jika sebuah sistem diuraikan menjadi m buah Sub sistem $H_1(z)$, $H_2(z)$, ..., $H_m(z)$, maka keluarnya adalah

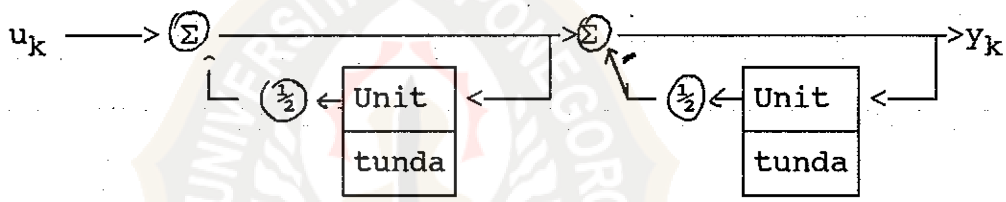
$$Y(z) = U(z)\ H_1(z)\ H_2(z)\ \ldots\ H_m(z)$$

dan sistem keseluruhannya adalah

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = H_1(z)\ H_2(z) \ldots H_m(z)$$

Contoh :

Suatu sistem terdiri dari dua sub sistem di mana tanggapan impuls dari masing-masing sub sistem adalah $h_1(k) = (1/2)^k$, $k \geq 0$ dan $h_2(k) = (-1/2)^k$, $k \geq 0$



Gambar 3.2

ambil $u_k = 1$, $k \geq 0$

maka keluarannya adalah

$$y_k = (u.\ h_1.\ h_2)(k)$$

Transformasinya -Z nya adalah

$$Y(z) = Z\ \{u(k)\}.\ Z\ \{h_1(k)\}.\ Z\ \{h_2(k)\}.$$

$$= U(z).\ H_1(z).\ H_2(z).$$

berdasarkan transformasi - Z pada bab II

untuk $u_k = 1, k \geq 0 \Longrightarrow U(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-2}}$

$$h_1(k) = (\tfrac{1}{2})^k,\ k \geq 0 \Longrightarrow H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$h_2(k) = (-\tfrac{1}{2})^k,\ k \geq 0 \Longrightarrow H_2(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

sehingga didapat

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{1 - z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

3.1.5. Perkalian dengan k.

Untuk mencari transformasi dari $\{k\ x_k\}$, maka diguna - kan definisi transfortasi - Z, sehingga diperoleh

$$Z\ \{k\ x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\ x_k\ z^{-k}$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\ x_k\ z^{-k-1}$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ (k\ z^{-k-1})$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ [- \frac{d}{dz} z^{-k}]$$

$$= -z \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ z^{-k}$$

$$= -z \frac{d}{dz} X(z)$$

Perkalian dengan k di atas dapat diperluas dengan sembarang pangkat positif dari k.

untuk $k^2\ x_k$

$$Z\ \{k^2\ x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2\ x_k\ x^{-k}$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2\ x_k\ z^{-k-1}$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\ z_k\ (k\ z^{-k-1})$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ [-\frac{d}{dz}\ z^{-k}]$$

$$= -z \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ k\ z^{-k}$$

$$= -z^2 \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ (k\ z^{-k-1})$$

$$= -z^2 \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ [-\frac{d}{dz}\ z^{-k}]$$

$$= z^2 (\frac{d}{dz})^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ z^{-k}$$

$$= z^2 (\frac{d}{dz})^2\ \Sigma\ X(z)$$

$$= (-z \frac{d}{dz})^2\ X(z)$$

Untuk $\{k^3\ z_k\}$

$$Z\ \{k^3\ x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^3\ x_k\ z^{-k}$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^3\ z^{-k-1}$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2\ x_k\ (kz^{-k-1})$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 x_k \left[- \frac{d}{dz} z^{-k}\right]$$

$$= -z \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 x_k z^{-k}$$

$$= -z^2 \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k x_k (k z^{-k-1})$$

$$= -z^2 \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k x_k \left[- \frac{d}{dz} z^{-k}\right]$$

$$= z^2 \left(\frac{d}{dz}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k x_k z^{-k}$$

$$= z^3 \left(\frac{d}{dz}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k k z^{-k-1}$$

$$= z^3 \left(\frac{d}{dz}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \left[- \frac{d}{dz} z^{-k}\right]$$

$$= -z^3 \left(\frac{d}{dz}\right)^3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$$

$$= -z^3 \left(\frac{d}{dz}\right)^3 X(z)$$

$$= \left(-z \frac{d}{dz}\right)^3 X(z)$$

dan seterusnya

sehingga untuk $\{k^n z_k\}$

$$Z \{k^n z_k\} = \left[-z \frac{d}{dz}\right]^n X(z)$$

Sifat perkalian dengan k dapat diperluas sbb:

1. Dari tabel

$$a^k,\ k \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

maka diperoleh bahwa

$$ka^k,\ k \geq 0 \Longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} (1 - az^{-1})^{-1}$$

$$= (-z)(-1)(1 - az^{-1})^{-2}(-a)(-1)z^{-2}$$

$$= \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

2. $(k + 1)a^k,\ k \geq 0 \Longleftrightarrow k\ a^k + a^k,\ k \geq 0$

$$= \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^{-2}} + \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$= \frac{az^{-1} + 1 - az^{-1}}{(1 - az^{-1})}$$

$$= \frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$$

3. $k(k + 1)a^k,\ k \geq 0 \Longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} (1 - az^{-1})^{-2}$

$$= (-z)(-2)(1 - az^{-1})^{-3}(-a)(-1)z^{-2}$$

$$= \frac{2\ az^{-1}}{(1 - az^{-1})^3}$$

4. Untuk $-a^k,\ k < 0$, maka transformasi -Z nya adalah

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{0} -a^k z^{-k}$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

3.1.6. Pembagian oleh k + a

X(z) adalah transformasi - Z dari $\{x_k\}$ sedangkan transformasi - Z dari $\dfrac{x_k}{k + a}$ adalah sbb, dimana a sembarang bilangan riil

$$Z\left\{\frac{x_k}{k + a}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{k + a}\, z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, z^a \left(-\int_0^z \hat{z}^{-k - a - 1} d\hat{z}\right)$$

$$= -z^a \int_0^z z^{-a-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, \hat{z}^{-k}\, d\hat{z}$$

$$= -z^a \int_0 \hat{z}^{-a-1}\, X(z)\, d\hat{z}$$

Contoh

Misal barisan $\{x_k\} = \dfrac{1}{k}$, $k \geq 1$

ambil $v_k = 1$, $k \geq 1$

maka transformasinya adalah

$$V(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \; z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1.z^{-1} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \; , \; 1 < |z|$$

Maka diperoleh:

$$X(z) = -z^0 \int_0^z \hat{z}^{-1} \; V(\hat{z}) \; dz$$

$$= -\int_0^z \hat{z}^{-1} \; \frac{\hat{z}^{-1}}{(1 - \hat{z}^{-1})} \; d\hat{z}$$

$$= -\int_0^z \frac{\hat{z}^{-2}}{1 - z^{-1}} \; d\hat{z}$$

$$= - \quad \ln \; (1 - z^{-1}), \; 1 < |z|.$$

Pernyataan $\hat{z}$ di atas adalah merupakan variabel riil

3.1.7. **Nilai awal**

Jika $\{x_k\}$ suatu barisan yang diketahui dan $x_k=0$ untuk $k < k_0$, maka X_{k_0} dapat dihitung langsung dari transformasi X(z).

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \; z^{-k}$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} x_k \; z^{-k}$$

$$= x_{k_0} z^{-k_0} + x_{k_0+1} \; z^{-(k_0 + 1)} + \ldots$$

kemudian dikalikan dengan z^{k_0}, maka diperoleh

$$z^{k_0} \; X(z) = x_{k_0} + x_{k_0+1} \; z^{-1} + x_{k_0+2} \; z^{-2} + \ldots$$

karena suku-suku yang mengandung z^{-1}, z^{-2}, z^{-3} dan seterusnya menuju nol bila $z \longrightarrow \infty$, maka diperoleh

$$z^{k_0} X(z)|_{z=\infty} = x_{k_0}$$

nilai awal ini hanya berlaku bagi X(z) yang konvergen mutlak untuk nilai z yang sangat besar.

Contoh :

1. $X(z) = \dfrac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad |3| < |z|$

   nilai awalnya adalah

   $$x_0 = X(z)|_{z=\infty}$$

   $$= \frac{1}{1 - 3z^{-1}}|_{z=\infty}$$

   $$= 1$$

2. $X(z) = \dfrac{2\,az^{-1}}{(1 - az^{-1})^3}, \quad |a| < |z|.$

   nilai awalnya adalah

   $$x_0 = X(z)|_{z=\infty}$$

   $$= \frac{2\,az^{-1}}{(1 - az^{-1})}|_{z=\infty} = 0$$

3.1.8. Nilai akhir

Pada nilai akhir ini dianggap bahwa x_k bersisi satu kekanan, dengan mengambil transformasi dari $\{ x_k - x_{k-1} \}$, maka diperoleh

$$Z\,[\{x_k - x_{k-1}\}] = X(z) - z^{-1}X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_k - x_{k-1})\, z^{-k}$$

$$(1 - z^{-1})\, X(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{N} (x_k\ x_{k-1}) z^{-k}$$

Dengan mengambil limit dari kedua belah ruas, dan bila $z \longrightarrow 1$ maka diperoleh

$$\lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z) = \lim_{z \to 1} \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{N} (x_k - x_{k-1}) z^{-k}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \lim_{z \to 1} \sum_{k=-\infty}^{N} (x_k - x_{k-1})\, z^{-k}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{N} (x_k - x_{k-1})$$

$$= \lim_{N \to \infty} x_N$$

Jadi nilai x_k bila $k \longrightarrow \infty$ diberikan oleh limit dari $(1 - z^{-1})\, X(z)$ bila $z \longrightarrow 1$

Contoh :

$$X(z) = \frac{(1 - a)\, z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})}$$

maka $\lim_{N \to \infty} x_N = \text{limit}_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$

$$= \text{limit}_{z \to 1} \frac{(1 - a)^{-1}}{(1 - az^{-1})}$$

$$= 1$$

3.2. INVERS DARI TRANSFORMASI - Z

Invers dari transformasi - Z yaitu menemukan kembali barisan $\{x_k\}$ dari transformasi - Z nya X(z) misalkan

$$X(Z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}$$

di mana X(z) merupakan suatu fungsi rasional

3.2.1. Pembagian langsung

Untuk menghasilkan suatu deret dalam z yaitu dengan membagikan pembilang dari (3.2.1) dengan penyebut. jika X(z) konvergen untuk $|z| < R_2$, maka dibagi dengan pangkat terendah dari z yaitu b_n, maka diperoleh

$$X(z) = \frac{a_m}{b_n} + \left(\frac{a_{m-1}}{b_n} + \frac{a_m b_n{-1}}{b^2{}_n}\right) z + \ldots$$

Jika X(z) konvergen untuk $R_1 < |z|$, maka pembagiannya dimulai dari pangkat tertinggi z, yaitu dengan b_0, maka akan diperoleh:

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{m-n} + \left(\frac{a_1}{b_0} + \frac{a_0 b_1}{b_0{}^2}\right) z^{m-n-1} + \ldots$$

Contoh :

1. Misalkan $X(z) = \dfrac{a}{z - a}$ untuk $|z|<a$, dimana a jari-jari konvergensi.

Karena $|z|<a$, maka diperoleh

$$\begin{array}{r|l} & -1-(z/a)-(z^2/a^2)-\ldots \\ \hline -a+z & a \\ & \underline{a-z} \\ & \quad z \\ & \quad \underline{z-(z^2/a)} \\ & \qquad z^2/a \ldots\ldots \end{array}$$

Dengan demikian

$$X(z) = -1 - \frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2} - \ldots\ldots$$

maka akan diperoleh:

$$\{x_k\} = \{\ \ldots.,\ -\frac{1}{a^3},\ -\frac{1}{a^2},\ -\frac{1}{a},\ \underset{\uparrow k=0}{-1}\ \}$$

2. Misalkan $X(z) = \dfrac{a}{a-z}$, $|z|>|a|$

pembagiannya adalah

$$\begin{array}{r|l} & (a/z)+(a^2/z^2)+(a^3/z^3)+\ldots \\ \hline z-a & a \\ & \underline{a-a^2/z} \\ & \quad a^2/z \\ & \quad \underline{a^2/z-a^2/z^2} \\ & \qquad a^2/z^2 \end{array}$$ dan seterusnya

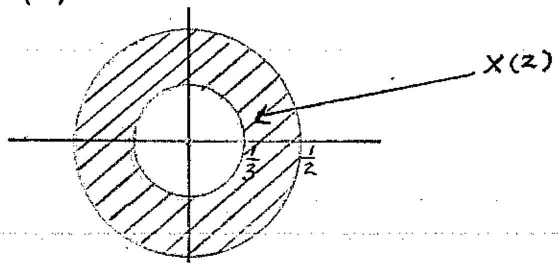
$$\text{Jadi } X(z) = \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \ldots.$$

maka diperoleh

$$\{x_k\} = \{\ \underset{\uparrow k=0}{0}\ ,\ a,\ a^2,\ \ldots\}$$

3. Misalkan $X(z) = \dfrac{5z}{6z^2-z-1}, \quad \dfrac{1}{3} < |z| < \dfrac{1}{2}$

maka X(z) berada dalam suatu daerah cincin



Gambar 3.2.1

Karena X(z) konvergen dalam suatu daerah cincin, maka uraian deret dari X(z) terdiri atas pangkat-pangkat positif dan negatif dari z.

X(z) diuraikan dalam pangkat positif dari z

$$
\begin{array}{r|l}
 & -5z + 5z^2 - 35z^3 + \ldots. \\
\hline
-1 - z + 6z^2 & 5z \\
 & \underline{5z + 5z^2 - 30z^3} \; - \\
 & \quad -5z^2 + 30z^3 \\
 & \quad \underline{-5z^2 - 5z^3 + 30z^4} \; - \\
 & \qquad 35z^3 - 30z^4 \\
 & \qquad \underline{35z^3 + 35z^4 - 210z^5} \; - \\
 & \qquad\quad -65z^4 + 210z^5 \\
 & \qquad\qquad \text{dst.}
\end{array}
$$

$X(z) = -5z + 5z^2 - 35z^3 + \ldots.$

Deret ini konvergen mutlak untuk $|z| < 1/3$

Nilai-nilai dari deret di atas tidak berada dalam daerah konvergensiyang disebutkan, maka deret ini tidak digunakan untuk menyatakan X(z). Jika X(z) diuraikan dalam pangkat-pangkat negatif dari z, maka diperoleh:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{5}{36} z^{-2} + \frac{35}{216} z^{-3} + \ldots \\
\hline
6z^2 - z - 1 & 5z \\
 & 5z - \frac{5}{6} - \frac{5}{6} z^{-1} \\
 & \overline{\qquad \frac{5}{6} + \frac{5}{6} z^{-1}} \; - \\
 & \qquad \frac{5}{6} - \frac{5}{36} z^{-1} - \frac{5}{36} z^{-2} \\
 & \qquad \overline{\qquad \frac{35}{36} z^{-1} + \frac{5}{36} z^{-2}} \\
 & \qquad\qquad \frac{35}{36} z^{-1} - \frac{35}{216} z^{-2} - \frac{35}{216} z^{-3} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dst}
\end{array}
$$

$$X(z) = \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{5}{36} z^{-2} + \frac{35}{216} z^{-3} + \ldots$$

Deret ini konvergen mutlak untuk $|z| > \frac{1}{2}$ Deret ini juga tidak dapat digunakan untuk menyatakan X(z), karena tidak konvergen dalam daerah konvergensi yang disebutkan.

Untuk memperoleh uraian yang benar, X(z) dinyatakan dalam suatu jumlah dari dua fungsi $X_1(z)$ dan $X_2(z)$.

$$X(z) = \frac{5z}{6z^{-2}-z-1} = \frac{5z}{(3z+1)(2z-1)}$$

$$= \frac{A}{3z+1} + \frac{B}{2z-1}$$

$$5z = A(2z-1) + B(3z+1)$$

$$= 2Az - A + 3Bz + B$$

$$5 = 2A + 3B$$

$$0 = -A + B \Longrightarrow A = B$$

$$5 = 2B + 3B$$

$$5 = 5B \qquad\qquad B = 1$$

Jadi $X(z) = \dfrac{5z}{6z^2 - z - 1} = \dfrac{1}{3z+1} + \dfrac{1}{2z-1} = X_1(z) + X_2(z)$

Dengan menguraikan $X_1(z)$ dalam pangkat-pangkat nega - tip dari z, maka diperoleh:

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{9} z^{-2} + \frac{1}{27} z^{-3} + \ldots \\ \hline
3z+1 & 1 \\
 & 1 + \frac{1}{3} z^{-1} \\ \hline
 & - \frac{1}{3} z^{-1} \\
 & - \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{9} z^{-2} \\ \hline
 & \qquad \frac{1}{9} z^{-2} + \frac{1}{27} z^{-3}
\end{array}$$

dst.

$$X(z) = \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{9} z^{-2} + \frac{1}{27} z^{-3} + \ldots - \frac{(-1)^k}{(3z)^k} + \ldots, |z| > \frac{1}{3}$$

Dengan menguraikan $X_2(z)$ dalam pangkat-pangkat posi - tif dari z, maka diperoleh:

$$\begin{array}{r|l} & -1 -2z -4z^2 -8z^3 - \ldots \\ \hline -1 + 2z & 1 \\ & \underline{1 - 2z} \; - \\ & \quad 2z \\ & \quad \underline{2z - 4z^2} \\ & \qquad 4z^2 \\ & \qquad \underline{4z^2 - 8z^3} \\ & \qquad\quad 8z^3 \\ & \qquad\qquad \text{dst.} \end{array}$$

$$X_2(z) = -1 -2z -4z^2 -8z^3 - \ldots - (2z)^k - \ldots, |z| < \frac{1}{2},$$

Jadi jumlah $X_1(z) + X_2(z) = X(z)$ konvergen untuk

$\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$, dan barisan $\{x_k\}$ adalah :

$$x_k = \begin{cases} -(-\frac{1}{3})^k & ,k > 0 \\ -(\frac{1}{2})^k & ,k \leq 0 \end{cases}$$

3.2.2. Pecahan-pecahan Per Bagian.

Transformasi invers dari suku-suku Pecahan Per Bagi - an X(z) yang akan digunakan pada uraian selanjutnya.

1. Suku pecahan per bagian $\dfrac{z}{2-a}$ transformasi inversnya a^k , $k \geq 0$.

$\dfrac{z}{z-a}$ diuraikan dalam pangkat-pangkat negatip dari z

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \ldots \\
\hline
z-a & z \\
 & \underline{z - a} \; - \\
 & \quad a \\
 & \quad \underline{a - a^2z^{-1}} \; - \\
 & \qquad a^2z^{-1} \\
 & \qquad \underline{a^2z^{-1} - a^3z^{-2}} \; - \\
 & \qquad\qquad a^3z^{-2} \qquad \text{dst.}
\end{array}
$$

$$\frac{z}{z-a} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \ldots$$

$$\frac{z}{z-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}$$

Sedang definisi transformasi -Z dari x_k adalah

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$$

Jadi barisannya adalah a^k, $k \geq 0$

2. Pada sifat perkalian dengan k telah diketahui bahwa :

$$ka^k \Longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1+az^{-1})^2}$$

$$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$\frac{z^2}{(z-a)^2} = \frac{(z^2-az)+az}{(z-a)^2}$$

$$= \frac{z^2-az}{(z-a)^2} + \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$= \frac{z(z-a)}{(z-a)^2} + \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$= \frac{z}{(z-a)} + \frac{az}{(z-a)^2}$$

Untuk $\frac{z}{z-a}$ transformasi inversnya a^k, $k \geq 0$

$\frac{az}{(z-a)^2}$ transformasi inversnya ka^k

Jadi transformasi invers dari $\frac{z^2}{(z-a)^2}$ adalah $a^k + ka^k = (k+1)a^k$, $k \geq 0$

Untuk selanjutnya transformasi invers dapat dilihat pada tabel

Dalam (3.2.1) dianggap bahwa derajat pembilangnya lebih kecil dari pada derajat penyebutnya, yakni $m \leq n$.

Dalam pecahan-pecahan pembagian ini akan membicarakan derajat pembilang lebih besar dari pada derajat penyebut.

$X(z)$ merupakan jumlah dari polinom yang berderajat $m - n$ ditambah suatu perbandingan polinom-polinom yang derajat pembilangnya lebih kecil satu dari pada derajat penyebutnya.

Yakni :

$$X(z) = q_0\ z^{m-n} + q_1\ z^{m-n-1} + \dots\dots\dots + q_{m-n} + \frac{a_0\ z^{n-1} + a_1\ z^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1}}{b_0\ z^n + b_1\ z^{n-1} + \dots\dots\dots + b_n}$$

Contoh :

$$X(z) = \frac{z^5 + 3{,}5\ z^4 - 4{,}5\ z^3 - 29{,}5\ z^2 - 44{,}5\ z - 33{,}5}{z^3 + 1{,}5\ z^2 - 8{,}5\ z - 15}$$

Dengan pembagian langsung, yang dimulai dari pangkat tertinggi dari z diperoleh :

$$X(z) = z^2 + 2z + 1 + \frac{z^2 - 6z - 18{,}5}{z^3 + 1{,}5\ z^2 - 8{,}5\ z - 15}$$

Untuk $m < n$, akar-akar dari penyebut ditentukan dari

$$b_0\ z^n + b_1\ z^{n-1} + b_2\ z^{n-2} + \dots\dots + b_n = 0$$

nilai-nilainya disebut kutub-kutub (poles) dari X(z), misalkan dinyatakan dengan $p_1, p_2, \dots\dots, p_n$

maka (3. 2. 1.) dapat ditulis dalam bentuk

$$X(z) = \frac{a_0\ z^m + a_1\ z^{m-1} + a_2\ z^{m-2} + \dots + a_m}{(z - p_1)\ (z - p_2)\ \dots\ (z - p_n)}$$

Pertama : untuk kutub-kutub X(z) yang tak sama, yakni tidak ada yang rangkap, maka uraiannya adalah

$$X(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n z}{z - p_n}$$

dimana

$$c_0 = X(z)\ \Big|_{z=0} = X(0) = \frac{a_m}{b_n}$$

dan $$c_i = \frac{z - p_i}{z} X(z) \Big|_{z=p_i} \text{ untuk } i = 1,2,3, \ldots, n.$$

Contoh :

1. Misalkan $$X(z) = \frac{z^2 + 3z}{z^3 - 19z + 30}$$

maka $$X(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z - 2)\ (z - 3)\ (z + 5)}$$

$$= c_0 + \frac{c_1 z}{z - 2} + \frac{c_2 z}{z - 3} + \frac{c_3 z}{z + 5}$$

sehingga $c_0 = X(0) = 0$

$$c_1 = \frac{z^2 + 3z}{z\ (z - 3)\ (z + 5)} \Big|_{z=2} = \frac{10}{-14} = -\frac{5}{7}$$

$$c_2 = \frac{z^2 + 3z}{z\ (z - 2)\ (z + 5)} \Big|_{z=3} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$c_3 = \frac{z^2 + 3z}{z\ (z - 2)\ (z - 3)} \Big|_{z=-5} = \frac{10}{-280} = -\frac{1}{28}$$

$$X(z) = \frac{-5/7\ z}{z - 2} + \frac{3/4\ z}{z - 3} - \frac{1/28\ z}{z + 5}$$

Berdasarkan transformasi invers maka diperoleh :

$$x_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{28}\ (-5)^k & , k \geq 0 \\ -\dfrac{5}{7}\ (2)^k + \dfrac{3}{4}\ (3)^k & , k < 0 \end{cases}$$

2. Misalkan $X(z) = \dfrac{z^2 - 6z - 18,5}{z^3 + 1,57\ z^2 - 8,5\ z - 15}$

$$X(z) = \frac{z^2 - 6z - 18,5}{(z + 2)\ (z + 2,5)\ (z - 3)}$$

$$= c_0 + \frac{c_1 z}{z + 2} + \frac{c_2 z}{z + 2,5} + \frac{c_3 z}{z - 3}$$

dimana

$$c_0 = X(0) = \frac{-18,5}{15} = 1,233$$

$$c_1 = \frac{z^2 - 6z - 18,5}{z\ (z + 2,5)\ (z - 3)}\Big|_{z=-2} = -0,5$$

$$c_2 = \frac{z^2 - 6z - 18,5}{z\ (z + 2)\ (z - 3)}\Big|_{z=-2,5} = -0,4$$

$$c_3 = \frac{z^2 - 6z - 18,5}{z\ (z + 2)\ (z + 2,5)}\Big|_{z=3} = -0,333$$

$$X(z) = 1,233 - \frac{0,5\ z}{z + 2} - \frac{0,4\ z}{z + 2,5} - \frac{0,333\ z}{z - 3}$$

Berdasarkan transformasi invers maka diperoleh

$$x_k = \begin{cases} 1,233 & , k = 0 \\ -0,5(-2)^k - 0,4(-2,5)^k & , k > 0 \\ 0,333(3)^k & , k < 0 \end{cases}$$

Kedua : Untuk X(z) yang memiliki kutup-kutup atau akar-akar rangkap. Andaikan X(z) memiliki sebuah kutup dengan kerangkapan r di $(z - p_i)$ maka uraian pecahan perbagian dari X(z) harus mengandung r buah suku berbentuk :

$$c_{i1} \frac{z}{z - p_i} + c_{i2} \left(\frac{z}{z - p_i}\right)^2 + \ldots + c_{ir} \left(\frac{z}{z - p_i}\right)^r$$

Koefisien-koefisien $c_{ij} = 1, \ldots,$ dapat dihitung melalui 3 cara yaitu :

1. Menulis kembali ruas kanan dari uraian pecahan perbagian dengan penyebut yang sama, kemudian koefisien-koefisien yang tak diketahui dicari dengan menyamakan koefisien-koefisien dari pangkat z yang sama
2. Menghitung c_{ir} dari

   $$c_{ir} = \left(\frac{z - p_i}{z}\right)^r X(z) \Big|_{z = p_i}$$

   Kemudian menyamakan X(z) dengan sejumlah nilai z, untuk memperoleh koefisien-koefisien yang sisa.
3. Menghitung c_{ir} seperti pada no. 2 kemudian untuk mempero leh koefisien yang sisa secara berurutan sebagai berikut:

$$c_{ir} = \left(\frac{z - p_i}{z}\right)^r X(z) \Big|_{z = p_i}$$

$$c_{ir-1} = \left(\frac{z - p_i}{z}\right)^{r-1} \left[X(z) - \frac{c_{ir}\, z}{z - p_i}\right] \Big|_{z = p_i}$$

$$c_{ir-2} = \left(\frac{z - p_i}{z}\right)^{r-2} \left[X(z) - \frac{c_{ir}\, z^2}{z - p_i} - \frac{c_{ir-1}\, z}{z - p_i}\right] \Big|_{z = p_i}$$

$$c_{i1} = \left(\frac{z - p_i}{z}\right) \left[X(z) - \frac{c_{ir}\, z^{-1}}{(z - p_i)^{-1}} \ldots - \frac{c_{i2}\, z}{z - p_i}\right] \Big|_{z = p_i}$$

Contoh :

$$H(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})\ (1 - \tfrac{1}{2}\ z^{-1})^3}$$

maka inversnya adalah :

$$H(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})\ (1 - \tfrac{1}{2}\ z^{-1})^3} = \frac{z^4}{(z - 1)\ (z - \tfrac{1}{2})^3}$$

$$= c_0 + \frac{c_1 z}{z - 1} + \frac{c_2 z}{z - \tfrac{1}{2}} + \frac{c_3 z^2}{(z - \tfrac{1}{2})^2} + \frac{c_4 z^3}{(z - \tfrac{1}{2})^3}$$

dimana

$$c_o = H(0) = 0$$

$$c_1 = \frac{z - 1}{z} H(z) \Big|_{z=1} = \frac{z^3}{(z - \tfrac{1}{2})^3} \Big|_{z=1} = 8$$

$$c_4 = \left(\frac{z - \tfrac{1}{2}}{z}\right)^3 H(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{z}{(z - 1)} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -1$$

Dengan menggunakan cara 1, maka c_2 dan c_3 dapat ditentukan.

$$H(z) = \frac{8z}{z - 1} + \frac{c_2 z}{z - \tfrac{1}{2}} + \frac{c_3 z^2}{(z - \tfrac{1}{2})^2} - \frac{z^3}{(z - \tfrac{1}{2})^3}$$

$$= \frac{8z(z-\tfrac{1}{2})^3 + c_2 z(z-1)(z-\tfrac{1}{2}) + c_3 z^2(z-1)(z-\tfrac{1}{2}) - z^3(z-1)}{(z-1)(z-\tfrac{1}{2})^3}$$

$$= \frac{8z(z^3 - \frac{3}{2} z^2 + \frac{3}{4} z - \frac{1}{8}) + c_2 z(z^3 - 2z^2 + \frac{5}{4} z - \frac{1}{4}) + c_3 z^2(z^2 - \frac{3}{2} z + \tfrac{1}{2}) - z^3(z-1)}{(z - 1)(z - \tfrac{1}{2})^3}$$

$$= \frac{\begin{array}{l} 8z^4 - 12z^3 + 6z^2 - z + c_2 z^4 - 2c_2 z^3 + \frac{5}{4} c_2 z^2 \\ - \frac{1}{4} c_2 z + c_3 z^4 - \frac{3}{2} c_3 z^3 + \frac{1}{2} c_3 z^2 - z^4 + z^3 \end{array}}{(z - 1)(z - \frac{1}{2})^3}$$

$$\frac{z^4}{(z-1)(z-\frac{1}{2})^3} = \frac{\begin{array}{l} (8 + c_2 + c_3 - 1)z^4 + (-12 - 2c_2 - \frac{3}{2} c_3 + 1)z^3 \\ + (6+\frac{5}{4} c_2+\frac{1}{2}c_3)z^2 + (-1 - \frac{1}{2} c_2)z \end{array}}{(z - 1)(z - \frac{1}{2})^3}$$

$$8 + c_2 + c_3 - 1 = 1$$

$$c_2 + c_3 = -6$$

$$-12 - 2c_2 - \frac{3}{2} c_3 + 1 = 0$$

$$- 2c_2 - \frac{3}{2} c_3 = 11$$

$$6 + \frac{5}{4} c_2 + \frac{1}{2} c_3 = 0$$

$$\frac{5}{4} c_2 + \frac{1}{2} c_3 = -6$$

$$-1 - \frac{1}{4} c_2 = 0$$

$$- \frac{1}{4} c_2 = 1$$

$$c_2 = -4$$

$$c_2 + c_3 = -6$$

$$-4 + c_3 = -6$$

$$c_3 = -2$$

$$\text{Maka } H(z) = \frac{8z}{z-1} - \frac{4z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{2z^2}{(z-\frac{1}{2})^2} - \frac{z^3}{(z-\frac{1}{2})^3}$$

Berdasarkan transformasi invers

$$h_k = 8 - 4(\tfrac{1}{2})^k - 2(k+1)(\tfrac{1}{2})^k - \tfrac{1}{2}\,(k+1)(k+2)(\tfrac{1}{2})^k \qquad , \ k \geq 0$$

$$h_k = 8 - (4 + 2k + 2 + \frac{3k}{2} + 1)(\tfrac{1}{2})^k \qquad , \ k \geq 0$$

Jadi

$$h_k = 8 - (\frac{k^2}{2} + \frac{7k}{2} + 7)(\tfrac{1}{2})^k \qquad , \ k \geq 0$$

$$h_k = 0 \qquad , \ k < 0$$

Menggunakan cara ke 2

Maka c_2 dan c_3 dapat ditentukan dengan mengambil $z = 2$ dan $z = -1$

$$H(z) = \frac{8z}{z-1} + \frac{c_2 z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_3 z^2}{(z-\frac{1}{2})^2} - \frac{z^3}{(z-\frac{1}{2})^3}$$

untuk $z = 2$

$$H(2) = \frac{16}{1(\frac{27}{8})} = \frac{16}{1} + \frac{2c_2}{3/2} + \frac{4c_3}{9/4} - \frac{8}{27/8}$$

$$\frac{128}{27} = 16 + \frac{4}{3}c_2 + \frac{16}{9}c_3 - \frac{64}{27}$$

$$\frac{4}{3}c_2 + \frac{16}{9}c_3 = \frac{128}{27} + \frac{64}{27} - 16$$

$$36\,c_2 + 48\,c_3 = -240$$

$$9\,c_2 + 12\,c_3 = -60$$

Untuk z = -1

$$H(-1) = \frac{1}{-2(-27/8)} = \frac{8}{2} + \frac{c_2}{3/2} + \frac{c_3}{9/4} - \frac{1}{27/8}$$

$$\frac{4}{27} = 4 + \frac{2}{3} c_2 + \frac{4}{9} c_3 - \frac{8}{27}$$

$$\frac{2}{3} c_2 + \frac{4}{9} c_3 = + \frac{4}{27} + \frac{8}{27} - 4$$

$$3 c_2 + 2 c_3 = - 16$$

$$c_3 = - 8 - \frac{3}{2} c_2$$

$$9 c_2 + 12 (-8 - \frac{3}{2} c_2) = - 60$$

$$9 c_2 - 96 - 18 c_2 = - 60$$

$$- 9 c_2 = 36$$

$$c_2 = - 4$$

$$3 c_2 + 2 c_3 = - 16$$

$$3. -4 + 2 c_3 = - 16$$

$$2 c_3 = - 16 + 12$$

$$2 c_3 = - 4$$

$$c_3 = - 2$$

Maka $H(z) = \dfrac{8z}{z - 1} - \dfrac{4z}{z - \frac{1}{2}} - \dfrac{2z^2}{(z - \frac{1}{2})^2} - \dfrac{z^3}{(z - \frac{1}{2})^3}$

Berdasarkan transformasi invers

$$h_k = 8 - 4 (\tfrac{1}{2})^k - 2 (k+1) (\tfrac{1}{2})^k - \tfrac{1}{2} (k+1) (\tfrac{1}{2})^k \qquad k \geq 0$$

$$= 8 - (4 + 2k + 2 + \frac{k^2}{2} + \frac{3k}{2} + 1)\ (\tfrac{1}{2})^k \qquad k \geq 0$$

Jadi

$$h_k = 8 - (\frac{k^2}{2} - \frac{7k}{2} + 7)\ (\tfrac{1}{2})^k \qquad k \geq 0$$

$$h_k = 0 \qquad k < 0$$

Menggunakan cara yang ke 3

c_0, c_1 dan c_4 sudah dicari di depan, sedang c_2 dan c_3 akan dicari sebagai berikut :

$$c_3 = (\frac{z - \frac{1}{2}}{z})^2\ [H(z) + \frac{z^3}{(z - \frac{1}{2})^3} + \text{suku-suku lain}]$$

Untuk menghilangkan suku-suku lain dihitung di $z = \frac{1}{2}$ maka diperoleh :

$$c_3 = (\frac{z-\frac{1}{2}}{z})^2\ [H(z) + \frac{z^3}{(z-\frac{1}{2})^3}]\ \Big|_{z = \frac{1}{2}} + (\frac{z-\frac{1}{2}}{z})^2\ [\text{suku-suku lain}]\ \Big|_{z - \frac{1}{2}}$$

$$= (\frac{z-\frac{1}{2}}{z})^2\ [\frac{z^4 + z^4 - z^3}{(z-1)(z-\frac{1}{2})^3}]\ \Big|_{z = \frac{1}{2}} + 0$$

$$= (\frac{z-\frac{1}{2}}{z})^2\ [\frac{2(z-\frac{1}{2})\ z^3}{(z-1)\ (z-\frac{1}{2})^3}]\ \Big|_{z = \frac{1}{2}}$$

$$c_3 = \frac{2z}{z - 1}\ \Big|_{z = \frac{1}{2}} = -2$$

$$c_2 = \frac{z-\frac{1}{2}}{z}\ [\ H(z) + \frac{z^3}{(z-\frac{1}{2})^3} + \frac{2z^2}{(z-\frac{1}{2})^2} + \text{suku-suku lain}]$$

Menghitung sekali lagi di $z = \frac{1}{2}$ agar menghilangkan sebanyak mungkin suku lain, maka :

$$c_2 = \frac{z-\frac{1}{2}}{z} \left[\frac{z^4 + z^3(z-1) + 2z^2(z^2 - 3/2z + \frac{1}{2})}{(z-1)(z-\frac{1}{2})^3}\right]\Big|_{z = \frac{1}{2}} + 0$$

$$c_2 = \frac{z-\frac{1}{2}}{z} \left[\frac{4(z-\frac{1}{2})^2 \; z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})^3}\right] \Big|_{z = \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4z}{z-1} \Big|_{z = \frac{1}{2}} = -\,4$$

Jadi

$$H(z) = \frac{8z}{z-1} - \frac{4z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{2z^2}{(z-\frac{1}{2})^2} - \frac{z^3}{(z-\frac{1}{2})^3}$$

Berdasarkan transformasi invers

$$h\ (z) = 8 - 4(\tfrac{1}{2})^k - 2(k+1)(\tfrac{1}{2})^k - \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2)(\tfrac{1}{2})^k \qquad , \ k \geq 0$$

$$= 8 - (4 + 2k + 2 + \frac{k^2}{2} + \frac{3k}{2} + 1)(\tfrac{1}{2})^k \qquad , \ k \geq 0$$

Jadi

$$h\ (z) = 8 - (\frac{k^2}{2} + \frac{7k}{2} + 7)\ (\tfrac{1}{2})^k \qquad , \ k \geq 0$$

$$h\ (z) = 0 \qquad , \ k < 0$$