BAB II

TEORI PENDUKUNG

2.1. Barisan dan deret tak hingga

2.1.1. Barisan

Barisan adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan range fungsi dengan domain bilangan asli.

Barisan ada dua macam yaitu barisan berhingga dan barisan tak berhingga.

Barisan berhingga adalah merupakan kumpulan bilangan-bilangan y_1, y_2, ..., y_n, di mana n berhingga, sedang barisan tak berhingga adalah merupakan kumpulan bilangan-bilangan y_1, y_2, ..., y_n, ... dimana n tak berhngga. Nilai-nilai y_n ditentukan oleh bilangan n.

Biasanya suatu barisan diberi simbol $\{y_n\}$ atau y_n saja, atau huruf kecil lainnya.

Contoh suatu barisan:

1. $\{ n \}$: 1, 2, 3, 4, ..., n
2. $\{ \frac{1}{2^n} \}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}$
3. $\{ 3 \}$: 3, 3, 3, 3, ...

Sifat-sifat suatu barisan.

Misalkan : $\{ a_n \}$: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n$

$\{ b_n \}$: $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots, b_n$

1. Penjumlahan.

$$\{a_n + b_n\} : (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n) + (b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots, b_n)$$

$$: a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots\ldots\ldots a_n + b_n$$

2. Perkalian.

$$\{a_n + b_n\} : (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n) + (b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots, b_n)$$

$$: a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots\ldots\ldots a_nb_n$$

3. Pembagian.

$$\{\frac{a_n}{b_n}\} : \frac{(a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n)}{(b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n)}$$

$$: \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots\ldots\ldots, \frac{a_n}{b_n}$$

Cara penulisan suatu barisan

1. Dengan menuliskan suatu aturan untuk menentukan nilai ke k dari barisan.

Contoh :

$$f : \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots\ldots\ldots \}$$

atau dapat ditulis :

$$f_k : \begin{cases} (\frac{1}{2})^k & , k \geq 0 \\ 0 & , k > 0 \end{cases}$$

2. Dengan mendaftar nilai-nilai barisan secara eksplisit.

Contoh :

f = ..., 0, 0, 1, 5, 3, 2, 5, 0, 0, ...

Tanda panah menunjukkan suku untuk k = 0.

Apabila tanda panah diabaikan, maka suku pertama adalah suku untuk k = 0 dan semua nilai barisan adalah nol untuk k < 0.

2.1.2. Deret tak hingga.

Definisi 2.1.1

Apabila $\{u_n\}$ suatu barisan dan $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$

maka barisan S_n disebut suatu deret tak hingga dengan simbol $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n$ dimana bilangan-bilangan $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots\ldots, u_n$ adalah suku-suku dari deret tak hingga.

Definisi 2.1.2

deret $\sum_{k=1}^{\infty} U_k = u1 + u2 + u3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

dikatakan konvergen mutlak jika

$\sum_{k=1}^{\infty} | U_k | = | u1 | + | u2 | + | u3 | + \ldots\ldots\ldots$,

konvergen.

Theorema 2.1.1

Jika deret Σu_k konvergen, maka $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

Bukti

Jika $\Sigma\ u_k$ konvergen, maka didapatkan $\lim_{n \to \infty} S_n = S$

dan $\lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S$

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

Jadi $\lim_{n \to \infty} U_n = 0$

2.2. Transformasi -Z

Jika suatu barisan berhingga, maka fungsi X (z) dari variabel komplex z di definisikan sebagai berikut:

$$X(z) = x_l\ z^{-l} + x_{l+1} z^{-(l+1)} + x_{l+2} z^{-(l+2)} + \ldots\ldots + x_m z^{-m}$$

$$= \sum_{k=l}^{m} x_k z^{-k} \quad \text{dimana} \quad -\infty < l,\ m < \infty$$

Fungsi X(z) disebut transformasi -Z

Contoh

2.2.1. Andaikan barisan x adalah barisan berhingga

$$\{ x_k \} = \{ 8, 3, \underset{\uparrow k=0}{-2}, 0, 4, -6 \}$$

Dengan menggunakan definisi di atas, maka transformasi -Z nya adalah :

$$X(z) = \sum_{k=-2}^{3} x_k\ z^{-k}$$

$$= 8\ z^2 + 3z - 2 + 4z^{-2} - 6z^{-3}$$

2.2.2 $\delta_k \iff 1$

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & , k=0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k z^{-k}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{-2} z^2 + \delta_{-1} z^1 + \delta_0 z^0 + \delta_1 z^{-1} + \delta_2 z^{-2} + \ldots\ldots$$

Untuk selanjutnya transformasi - Z nya lihat tabel

2.3. Konvergensi dari transformasi -Z

Daerah konvergensi dari X(z) adalah himpunan dari bilangan komplek z yang mana $\Sigma\, |x_k\, z^{-k}|$ ada, yakni himpunan z yang mana X(z) memiliki nilai berhingga.

Contoh

untuk $x_k = \begin{cases} -b^k & , k<0 \\ 0 & , k \geq 0 \end{cases}$

$$X(z) = Z(-b^k \quad , k<0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} -b^k\, z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} (-b\, z^{-1})^k$$

misalkan k = -m

maka : $X(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (-b\, z^{-1})^{-m}$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} (b\, z^{-1})^{-m}$$

$$X(z) = \frac{-1/b\, z^{-1}}{1-(1/b\, z^{-1})} \times \frac{bz^{-1}}{bz^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

Jadi $X(z) = \dfrac{1}{1 - bz^{-1}}$ ada, maka X(z) konvergen

Untuk mengetahui X(z) konvergen mutlak, maka harus memenuhi

$$\left|\frac{1}{bz^{-1}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{z}{b}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| < |b|$$

jadi X(z) konvergen mutlak.

Transformasi -Z dari barisan x dimana

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, z^{-k}$$

adalah penting untuk mengetahui daerah konvergensi mutlak dari X(x) dalam bidang -z komplek, yaitu untuk menentukan nilai-nilai komplek dari z dimana $\Sigma \, |x_k \; z^{-k}|$ memiliki nilai sederhana. Jika z dinyatakan dalam bentuk kutup (polar) sebagai $z = r \, e^{i\theta}$, maka diperoleh

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k \, z^{-k}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k \, (re^{i\theta})^{-k}|$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} |x_k \, r^{-k} \, e^{-ik\theta}|$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} |x_k \, r^{-k} \, e^{-ik\theta}|$$

Pada ruas kanan $|e^{-ik\theta}| = 1$ dan suku pertama dimisalkan $k = -m$ sehingga menjadi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k z^{-k}| = \sum_{m=1}^{\infty} |x_{-m} r^m| + \sum_{k=0}^{\infty} |x_k r^{-k}|$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} |x_{-m}| r^m + \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| r^{-k} \quad (*)$$

Agar $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k z^{-k}|$ tak berhingga menjadi berhingga, maka tiap-tiap suku di ruas kanan harus berhingga. Ambil bilangan positip M, R_1, dan R_2 dimana R_1 dan R_2 dipilih sedemikian rupa sehingga,

$$|x_k| \le M R_2^{k} \text{ untuk } k < 0$$

dan $|x_k| \le M R_1^{k}$ untuk $k \ge 0$

Kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (*), maka diperoleh:

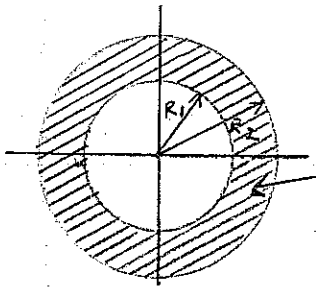
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k z^{-k}| \le \sum_{m=1}^{\infty} M R_2^{-m} r^m + \sum_{k=0}^{\infty} M R_1^{k} r^{-k}$$

$$\le M \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} R_2^{-m} r^m + \sum_{k=0}^{\infty} R_1^{k} r^{-k} \right\}$$

$\sum_{m=1}^{\infty} R_2^{-m} rm$ dan $\sum_{k=0}^{\infty} R_1^{k} r^{-k}$ adalah berhingga jika hanya jika $\frac{r}{R_2} < 1$ dan $\frac{R_1}{r} < 1$.

X(z) konvergen mutlak untuk semua z dalam daerah cincin $R_1 < |z| < R_2$

Gambar daerah konvergen cincin X(z):



Daerah konvergen mutlak bagi

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, z^{-k}$$

Gambar 2.1.

Daerah konvergensi bagi beberapa jenis barisan

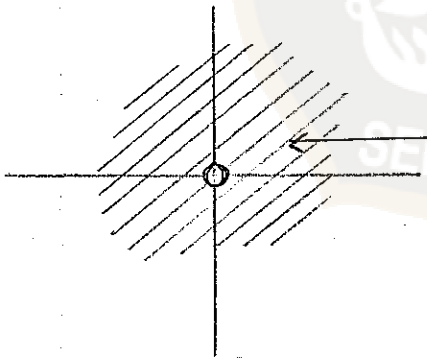
1. **Barisan-barisan berhingga**

$$\{x_k\}_{k=a}^{b} = x_a, x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots\ldots, x_b$$

Transformasi Z nya adalah:

$$X(z) = x_a z^{-a} + x_{a+1} z^{-(a+1)} + x_{a+2} z^{-(a+2)} + \ldots\ldots + x_b z^{-b}$$

adalah sebuah polinom dalam z yang konvergen untuk semua z kecuali z=0 jika b>0 dan $z=\infty$ jika a<0



Daerah konvergensi mutlak bagi :

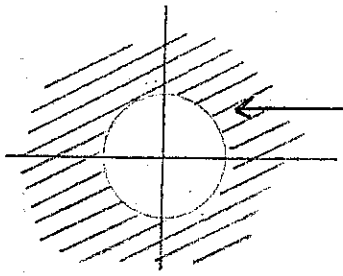
$$X(z) = \sum_{k=a}^{b} x_k \, z^{-k}$$

Gambar 2.2.

2. **Barisan-barisan semi tak berhingga**

Barisan $\{x_k\}_{k=a}^{\infty}$ dengan transformasi -Z $X(z) = \sum_{k=a}^{\infty} x_k \, z^{-k}$ di mana X(z) konvergen mutlak untuk semua z

sedemikian sehingga $R_1 < |z|$ kecuali untuk titik $z = \infty$ jika $a<0$



Daerah konvergensi mutlak bagi: $X(z) = \sum_{k=a}^{\infty} x_k x^{-k}$

Gambar 2.3.

Contoh:

$$x_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

maka transformasi - Z nya adalah:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \, z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k z^{-k}$$

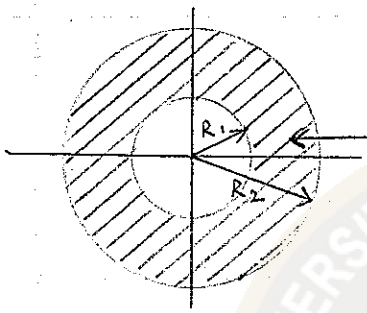
$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{5} z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z + \frac{1}{5}}$$

Sehingga $R_1 = \frac{1}{5}$, maka $X(z)$ konvergen mutlak untuk semua $|z| > \frac{1}{5}$

3. **Barisan-barisan tak berhingga**

Untuk menyelidiki barisan $\{x_k\}$ yang tak nol bagi semua k, X(z) mengandung pangkat-pangkat positif dan negatif dari z, maka daerah konvergennya tidak nol untuk semua k. X(z) mengandung $R_1 < |z| < R_2$ yang negatif atau positif keduanya.



Daerah konvergensi bagi

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$$

Gambar 2.4.

Contoh

$$x_k = \begin{cases} 2^k & , k < 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^k & , k \geq 0 \end{cases}$$

maka

$$x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^k \, z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k z^{-k}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} z^m + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k z^{-k}, \text{ untuk } k = -m$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^m + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^k$$

$$X(z) = \frac{\frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3z}}$$

sehingga untuk jumlah yang pertama konvergen mutlak untuk $|z| < 2$. Untuk jumlah yang kedua konvergen mutlak untuk $|z| > \frac{1}{3}$

Jadi X(z) konvergen mutlak untuk $\frac{1}{3} < |z| < 2$.

2.4. Sistem waktu diskret.

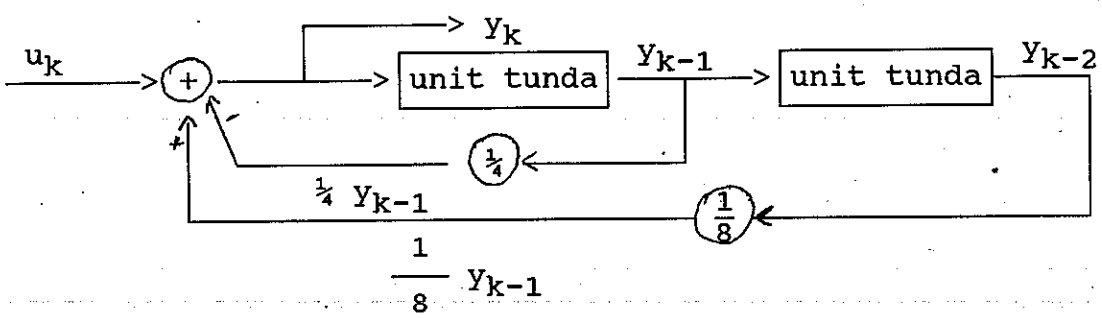
Suatu sistem adalah model maematika yang menghubungkan masukan atau gaya luar dengan keluaran atau tanggapan sisem.

Sebuah sistim waktu diskret, secar abstraks, adalah suatu hubungan antara barisan masukan dan barisan keluaran. Masukan dan keluaran menyatakan hubungan sebab akibat.

Elemen-elemen pokok dalam suatu sistem waktu diskret adalah :

- penjumlahan (adders) yang menjumlahkan dua bilangan
- pengali (multipliers) yang mengalikan dua bilangan, dan
- unit tunda (unit delay) yang menyimpan masukan maupun keluaran dari sistem.

Contoh:



Gambar 2.5.

maka keluarannya adalah

$$y_k = u_k - \tfrac{1}{4}\, y_{k-1} + \frac{1}{8}\, y_{k-2}$$

dimana y_k adalah nilai keluaran kini

u_k adalah nilai masukan kini

y_{k-1} adalah nilai keluaran yang lalu

y_{k-2} adalah nilai keluaran yang tertunda dua kali.

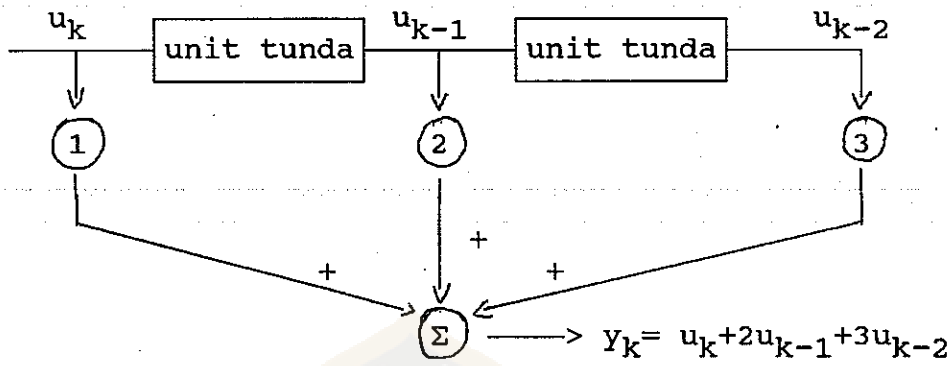
2.4.1. Persamaan beda linear.

Sistem-sistem waktu diskret linear mentransfor masikan barisan masukan { u_k } ke dalam barisan keluaran { y_k } menurut suatu rumus pengulangan atau persamaan beda.

Contoh

$y_k = u_k + 2\ u_{k-1} + 3\ u_{k-2}$

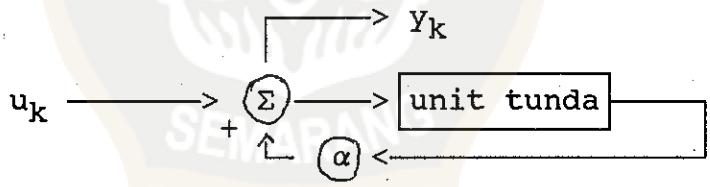
Skematis dari sistem waktu diskret di atas



Gambar 2.6.

Sebaliknya apabila diketahui skemanya, maka dapat dicari model persamaan bedanya.

misalnya



Gambar 2.7.

persamaan bedanya adalah

$y_k = u_k + \alpha\ y_{k-1}$, $k = 0,1,2,3, \ldots\ldots$

2.4.2. Pecahan umum dari persamaan beda tak homogen

Pemecahan umum dari sebuah persamaan tak homogen diperoleh dengan penjumlahan pecahan homogen leng-

kap $y^{(h)}$ dengan sebuah pemecahan khusus $y^{(p)}$ dari persamaan beda tak homogen.

Tinjau persamaan beda berorde n

$$y_k + b_1 y_{k-1} + b_2 y_{k-2} + \ldots\ldots\ldots + b_n y_{k-n} = u_k$$

Untuk memudahkan menyatakan persamaan-persamaan beda seperti di atas digunakan notasi operator.

Didefinisikan sebuah operator geser S sebagai berikut :

$$S^{\pm n} [y_k] = y_{k\pm n}$$

Lambang $S^{\pm n}$ menyatakan operator geser, yang menunjukkan bahwa bila operator ini bekerja pada barisan y_k maka operator akan mengalihkan y_k ke suatu barisan baru $y_{k\pm n}$ yang merupakan versi geser dari barisan semula.

Jadi (2.4.1.) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$(1 + b_1 S^{-1} + b_2 S^{-2} + \ldots\ldots + b_n S^{-n}) [y_k] = u_k$$

Secara lebih singkat ditulis:

$$L [y_k] = u_k$$

di mana, L adalah operator beda linier.

$$L = 1 + b_1 S^{-1} + b_2 S^{-2} + \ldots\ldots\ldots + b_n S^{-n}$$

Kemudian dicari sebuah operator beda linier L_A, yang disebut operator pemusnah, sedemikian rupa sehingga $L_A [y_k] = 0$

2.5. Variabel-variabel keadaan bagi sistem waktu diskret

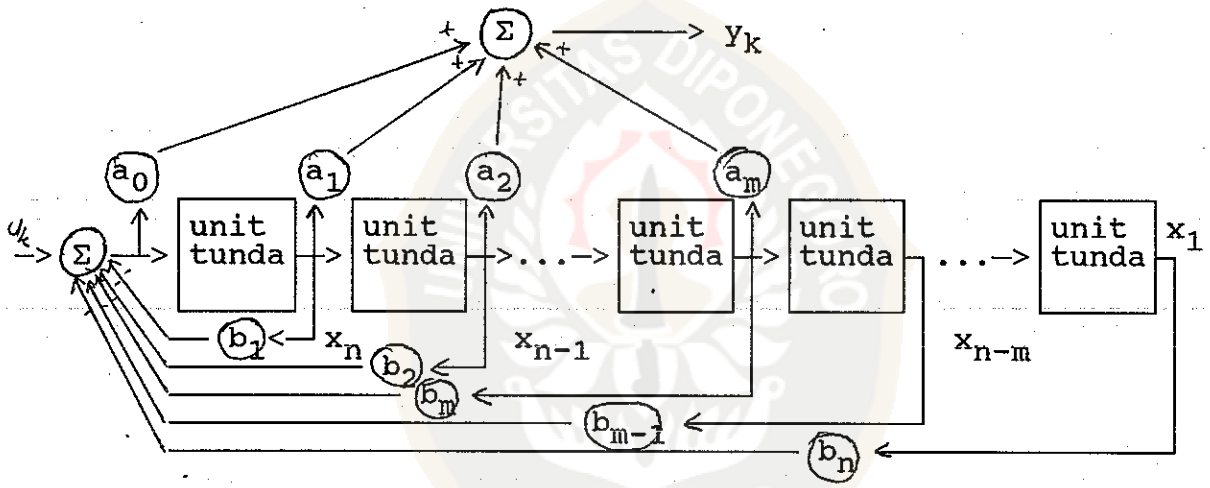
Keadaan dari sebuah sistem dinyatakan dengan him-

punan variabel $x_1(k)$, $x_2(k)$, ... $x_n(k)$. Dengan adanya variabel keadaan ini akan diketahui masukan dan keluaran yang akan datang dari sistem.

Pandang sebuah rangkaian waktu diskret berorde n dengan persamaan beda:

$$y_k + b_1 y_{k-1} + \ldots\ldots + b_n y_{k-n} = a_o u_k + a_1 u_{k-1} + \ldots\ldots + a_m u_{k-m}$$

di mana m dan n sebarang



Gambar 2.8.

Dari gambar tersebut diperoleh persamaan:

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_3(k)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(k+1) = x_n(k)$$

$$x_n(k+1) = u_k - b_1x_n(k) - b_2x_{n-1}(k) - \ldots - b_nx_1(k).$$

kemudian ditulis dalam bentuk matrik

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \cdots\cdots & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad (2.5.1)$$

keluarannya adalah

$$y(k) = a_1x_n(k) + a_2x_{n-1}(k) + \ldots\ldots + a_mx_{n-m-1}(k)$$
$$+ a_o\,[u(k) - b_1x_n(k) - b_2x_{n-1}(k) \ldots\ldots$$
$$- b_nx_1(k)] \qquad (2.5.2)$$

dalam bentuk matrik

$$y(k) = [-a_ob_n, -a_ob_{n-1}, \ldots, a_m-a_ob_m,$$

$$\ldots, a_2-a_ob_2, a_1-a_ob_1\ ] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + a_o\,u(k)$$

Matrik keadaannya adalah

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

Maka persamaan (2.5.1.) dan (2.5.2.) dapat ditulis sebagai : $x(k+1) = Ax(k) + B\,u(k)$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Dimana matrik-matriknya adalah

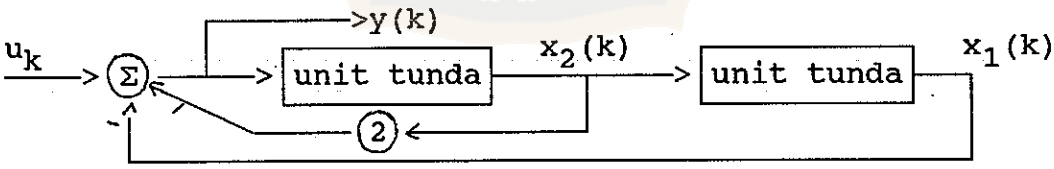
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & & \cdots & & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \quad , \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [\; -a_o b_n,\; -a_o b_{n-1},\; \ldots\ldots,\; a_m - a_o b_m,\; \ldots\ldots,\; a_1 - a_o b_1 \,]$$

$$D = [a_o]$$

Contoh: Persamaan

$$y(k) + 2y(k-1) + y(k-2) = u(k)$$



Gambar 2.9.

Variabel keadaannya adalah

$x_1(k) = y\ (k-2)$

$x_2(k) = y\ (k-1)$

dari tiap-tiap variabel keadaan dapat dibentuk persamaan

$x_1(k+1) = x_2\ (k)$

$x_2(k+1) = y\ (k) = u(k) - 2x_2(k) - x_1(k)$

dalam bentuk matrik

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

keluarannya adalah

$$y(k) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + [1]u(k)$$

jadi matrik variabel keadaannya adalah

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \quad -2], \quad D = [1]$$