BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. Transformasi Fourier

$$f : D \longrightarrow C$$

$$X \longrightarrow f(x) \text{ , } x \text{ real}$$

Transformasi Fourier dari $f(x)$ ada, jika $f(x)$ memenuhi syarat adanya Transformasi Fourier.

Adapun syarat Transformasi Fourier jika :

1. $f(x)$ kontinu sepotong-sepotong untuk setiap interval berhingga.
2. $\int_{-\sim}^{\sim} |f(x)| dx$ konvergen, sehingga $f(x)$ fungsi absolut integrobel dalam$(-\sim, \sim)$.

Maka bentuk Integral Fourier didefinisikan :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sim}^{\sim} e^{-ix\varphi} \int_{-\sim}^{\sim} f(t) \, e^{i\varphi t} \, dt \, d\varphi$$

jika diambil

$$F(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\sim}^{\sim} f(t) \, e^{i\varphi t} \, dt \qquad (2\text{-}1\text{-}1)$$

Maka

$$f(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\sim}^{\sim} F(\varphi) \, e^{-i\varphi t} \, d\varphi \qquad (2\text{-}1\text{-}2)$$

dapat dikatakan bahwa fungsi $F(\varphi)$ adalah Fourier Transform dari $f(t)$, pasangan rumus tersebut disebut "<u>Fourier Invers</u>"

dapat juga ditulis sebagai $\mathcal{F}[f(t);\varphi]$ untuk Fourier Transform $f(t)$

Catatan :

Konstanta $(2\pi)^{-1/2}$ yang mendahului tanda Integral pada persamaan (2-1-1) dan (2-1-2) dapat diganti dengan konstanta sebarang yang perkaliannya sama dengan $(2\pi)^{-1}$, akan tetapi dalam tulisan ini pilihan diatas tetap digunakan.

2.2. Fungsi Genap dan Ganjil.

Fungsi $f(x)$ disebut ganjil jika $f(-x) = -f(x)$

Sebagai contoh :

$$X,\ X^3,\ \sin x,\ \text{dll.}$$

Fungsi $f(x)$ disebut genap jika $f(-x) = f(x)$

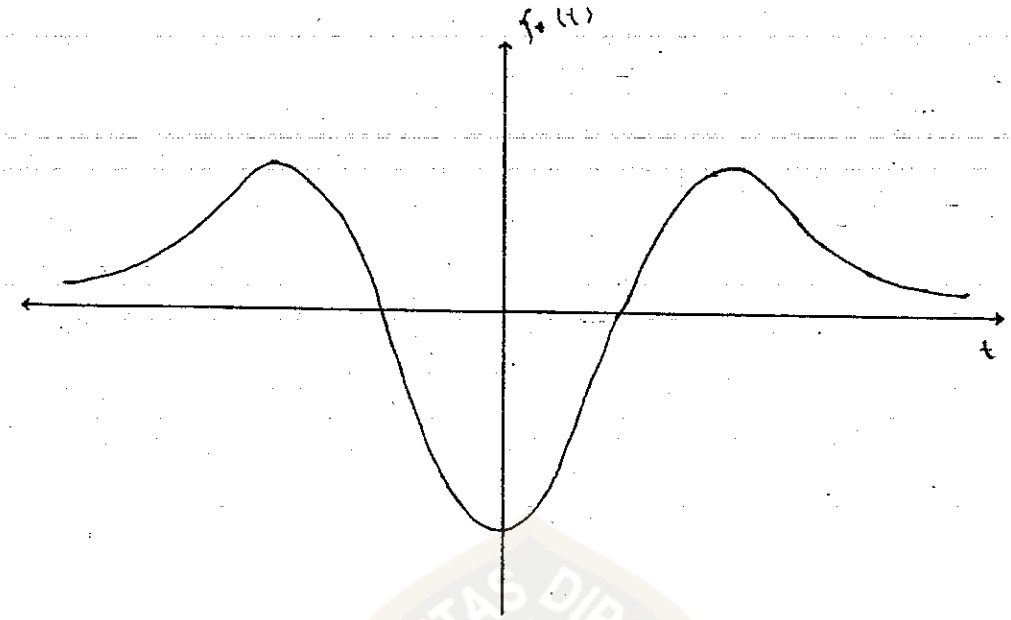
Sebagai contoh :

$$X^2,\ \cos x,\ \text{dll.}$$

2.3. Transformasi Fourier Cosine

Jika fungsi $f(t)$ didefinisikan untuk variabel t real positif maka fungsi $f_+(t)$ dapat dinyatakan dengan :

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ f(-t) & t \leq 0 \end{cases}$$



maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_+(t)\ e^{i\varphi t}\ dt = \int_{0}^{\infty} f(t)\ e^{i\varphi t}\ dt + \int_{-\infty}^{0} f(-t)\ e^{i\varphi t}\ dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t)\ \{e^{i\varphi t} + e^{-i\varphi t}\}dt$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} f(t)\ \cos(\varphi t)dt$$

Maka :

$$\mathcal{F}\ [f_+\ (t);\varphi] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\ \cos(\varphi t)dt$$

Dapat juga ditulis :

$$F_c\ (\varphi) = \mathcal{F}_c\ [f(t);\varphi] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\ \cos(\varphi t)dt \quad (2\text{-}3\text{-}1)$$

Jelas bahwa $F_c(-\varphi) = F_c(\varphi)$ karena $F_c(\varphi)$ adalah fungsi genap dari φ, sehingga dari persamaan (2-1-2) :

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} Fc(\varphi) \cdot \cos(\varphi t)dt, \qquad (t \geq 0) \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

dengan kata lain $Fc(\varphi)$ adalah transformasi cosine Fourier dari fungsi $f(t)$, sedangkan $f(t)$ adalah Fourier cosine invers dari $Fc(\varphi)$.

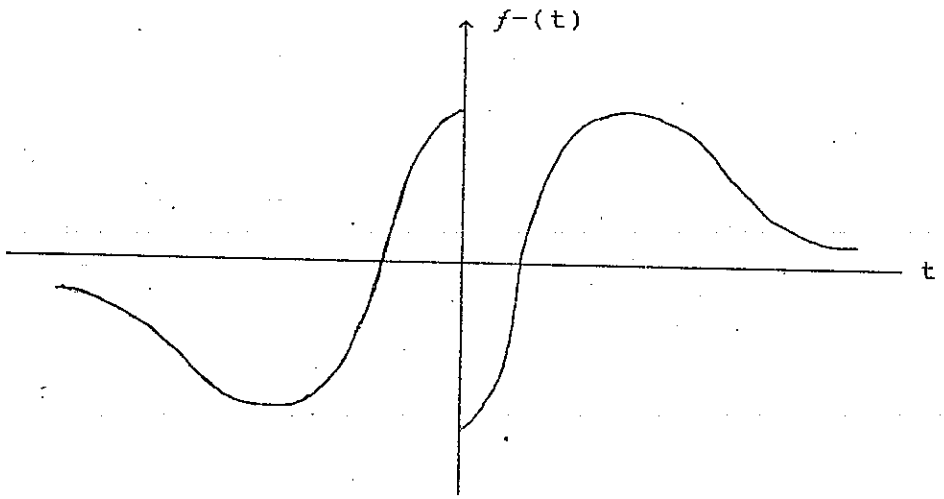
Dengan demikian dari persamaan (2-3-1) dan (-2-3-2) didapat :

$$\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c^{-1}$$

2.4. Transformasi Fourier Sine

Jika $f(t)$ didefinisikan pada Interval $(0,\infty)$ dan merupakan fungsi ganjil maka :

$$f-(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ -f(-t), & t < 0 \end{cases}$$



maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f-(t)\, e^{i\varphi t}\, dt = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{i\varphi t}\, dt - \int_{-\infty}^{0} f(-t)\, e^{i\varphi t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t)\, \{e^{i\varphi t} - e^{-i\varphi t}\} dt$$

$$= 2i \int_{0}^{\infty} f(t)\, \sin(\varphi t) dt$$

terlihat bahwa :

$$\mathcal{F}\,[f-(t);\varphi] = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, \sin(\varphi t)\, dt$$

dapat juga ditulis :

$$Fs(\varphi) = \mathcal{F}_s\,[f(t);\varphi] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, \sin(\varphi t)\, dt \quad (2\text{-}4\text{-}1)$$

$Fs(\varphi)$ adalah fungsi ganjil dari φ, maka dari persamaan dapat dinyatakan :

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} Fs(\varphi)\, \sin(\varphi t)\, d\varphi \qquad (t>0) \qquad (2\text{-}4\text{-}2)$$

dengan kata lain $Fs(\varphi)$ adalah Fourier sine transform dari fungsi $f(t)$, sedangkan $f(t)$ adalah Fourier cosine invers dari $F_s(\varphi)$.

Dengan demikian dari persamaan (2-4-1) dan (2-4-2) didapat :

$$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_s^{-1}$$

2.5. Multipel Transformasi Fourier

Jika fungsi mempunyai n Independen variabel x_1, x_2

$\ldots, x_n$ pada sumbu real, maka Fourier Transform dari fungsi terhadap setiap variabel tersebut dapat dinyatakan :

$$F_{(1)}(\varphi_1; x_2, \ldots x_n) = \mathcal{F}_{(1)}[f(x_1, x_2, \ldots x_n); x_1 \rightarrow \varphi_1]$$

$$= \mathcal{F}[f(x_1, x_2, \ldots x_n); x_1 \rightarrow \varphi_1]$$

sehingga dapat didefinisikan dobel transform :

$$F_{(2)}(\varphi_1, \varphi_2, x_3 \ldots x_n)$$

$$= \mathcal{F}_{(2)}[f(x_1, x_2, \ldots x_n); x_1 \rightarrow \varphi_1, x_2 \rightarrow \varphi_2]$$

$$= \mathcal{F}[f_{(2)}(\varphi_1, x_1, x_2, \ldots x_n); x_2 \rightarrow \varphi_2]$$

secara umum :

$$F_{(n)}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_{n-1}, \varphi_n)$$

$$= \mathcal{F}_{(n)}[f(x_1, x_2, \ldots x_n); x_1 \rightarrow \varphi_1, x_n \rightarrow \varphi_n]$$

$$= \mathcal{F}[F_n(\varphi_1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}, \varphi_n); x_n \rightarrow \varphi_n]$$

jika dinyatakan secara vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ dengan x dan φ inner product :

$$\varphi x = \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \ldots + \varphi_n x_n.$$

maka dimensi n Fourier transform dapat dinyatakan dengan :

$$F_{(n)}(\varphi) = \mathcal{F}_{(n)}[f(x) ; x \rightarrow \varphi]$$

$$F_{(n)}(\varphi) = (2\pi)^{-1/2n} \int_{E_n} f(x)\, e^{i(\varphi x)} dx$$

dimana En menyatakan transformasi Fourier berdimensi n.

2.6. Fungsi Bessel

Persamaan Differensial Bessel :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2-p^2)y = 0 \qquad (2\text{-}6\text{-}1)$$

Persamaan differensial diatas dapat diselesaikan dengan :

ambil $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{n+r}$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) X^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) X^{n+r-2}$$

sehingga Persamaan Defferensial Bessel menjadi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) X^{n+r}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) X^{n+r} + (x^2 - p^2) \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\{(n+r)^2 - p^2\} C_n + C_{n-2} \right] X^{n+r} = 0$$

sehingga dapat diperoleh persamaan rekurensi :

$$\{(n + r)^2 - p^2\} C_n + C_{n-2} = 0 \qquad (2\text{-}6\text{-}2)$$

jika diambil $n = 0$ diperoleh persamaan indicial

$$r^2 - p^2 = 0$$

$$(r + p)(r - p) = 0$$

sehingga diperoleh $r_1 = p$ dan $r_2 = -p$

penyelesaian untuk $r_1 = p = r$ dari persamaan (2-6-2)

maka :

$$C_n = -\frac{C_{n-2}}{(2p + n)\, n}$$

untuk $n = 1$

$$C_1 = \frac{-C_{-1}}{(2p + 1)} = 0$$

dengan demikian untuk n ganjil $C_3, C_5, \ldots,$ berharga

nol.

untuk n = 2

$$C_2 = \frac{-C_o}{2(2p+2)} = \frac{-1}{4(p+1)} C_o$$

untuk n = 4

$$C_4 = \frac{-C_2}{4(2p+4} = \frac{(-1)^2 C_o}{2^4\ 2(p+2)(p+1)}$$

secara umum :

$$C_{2n} = \frac{(-1)^2 C_o}{2^{2n}\ n!\ (p+1)\ (p+2)\ (p+3)\ \ldots\ (p+n)}$$

$$= \frac{(-1)^n C_o\ \Gamma(p+1)}{2^{2n}\ n!\ \Gamma(p+n+1)}$$

dengan demikian diperoleh penyelesaian pertama, yang berbentuk :

$$Y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \Gamma(p+1)}{2^{2n}\ n!\ \Gamma(p+n+1)} C_o\ x^{2n+p}$$

jika diambil $C_o = \dfrac{1}{2^n\ \Gamma(p+1)}$

diperoleh penyelesaian dasar pertama :

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \qquad (2\text{-}6\text{-}3)$$

Fungsi Jp(x) yang didefinisikan dapat disebut fungsi Bessel macam pertama order p untuk $r_2 = r = p$

Analog dengan cara diatas akan diperoleh penyelesaian dasar kedua :

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ \Gamma(n-r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} \qquad (2\text{-}6\text{-}4)$$

dengan demikian persamaan umum dari persamaan di

atas adalah : $y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$

dimana C_1 dan C_2 konstanta sebarang.

2.7. Rumus Recurensi

Ditinjau penderetan dari :

$$\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} = \exp\left(\frac{1}{2}x\,t\right)\exp\left[-\frac{x}{2t}\right] \qquad (2\text{-}7\text{-}1)$$

yaitu :

$$\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(xt)^r}{2^r\,r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-x)^s}{2^s\,t^s s!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left[\frac{x}{2}\right]^{r+s}\frac{t^{r-s}}{s!\,r!}$$

diadakan substitusi index : $r - s = n$

maka didapat :

$$\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!\,s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}t^n$$

dengan mengingat definisi fungsi Bessel dapat ditulis :

$$\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\,t^n \qquad (2\text{-}7\text{-}2)$$

terlihat bahwa $J_n(x)$ merupakan koefisien dari t^n pada penderetan $\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$

Apabila kedua ruas dari (2-7-2) di-differensial-kan terhadap x maka didapat :

$$\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{t}\right]\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n'(x)\,t^n$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\,t^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\,t^{n-1} = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n'(x)\,t^n$$

bila pangkat dari pada t disamakan, diperoleh rumus :

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2\, J_n'(x) \qquad (2\text{-}7\text{-}3)$$

apabila kedua ruas dari (2-7-2) di-defferensial-kan terhadap t maka diperoleh :

$$\frac{1}{2}x \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \exp\left\{\frac{1}{2} x \left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, J_n'(x)\, t^{n-1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} x\, J_n(x)\, t^n + \frac{1}{2} x\, J_n(x)\, t^{n-2}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, J_n(x)\, t^{n-1}$$

bila pangkat dari t disamakan, diperoleh rumus :

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \qquad (2\text{-}7\text{-}4)$$

Apabila persamaan (2-7-3) ditambahkan pada persamaan (2-7-4) maka didapatkan :

$$X\, J_n'(x) = X\, J_{n-1}(x) - n\, J_n(x) \qquad (2\text{-}7\text{-}5)$$

dan bila persamaan (2-7-4) dikurangi dengan persamaan (2-7-3) didapat :

$$X\, J_n'(x) = n\, J_n(x) - X\, J_{n+1}(x) \qquad (2\text{-}7\text{-}6)$$

Jika n = 0

$$J_0'(x) = -J_1(x) \qquad (2\text{-}7\text{-}7)$$

2.8. Bentuk Integral dari fungsi Bessel

Ditinjau Integral :

$$I = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{n-1/2}\, e^{ixt}\, dt \qquad (2\text{-}8\text{-}1)$$

dengan $n > -\frac{1}{2}$

bila exp(ixt) dideretkan terhadap ixt, maka integral diatas menjadi :

$$I = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(ix)^r}{r!} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{n-1/2}\, t^r\, dt$$

untuk r ganjil, integral diruas kanan sama dengan nol, sedangkan untuk r genap :

$$2\int_0^1 (1 - t^2)^{n-1/2} t^{2s}\, dt = \int_0^1 (1 - u)^{n-1/2} u^{s-1/2}\, du$$

$$= \frac{\Gamma(n + 1/2)\, \Gamma(s + 1/2)}{\Gamma(n + s + 1)}$$

sehingga didapat :

$$I = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!} \frac{\Gamma(n+1/2)\, \Gamma(s+1/2)}{\Gamma(n+s+1)}$$

$$= \Gamma(\tfrac{1}{2})\, \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!} \left[\frac{x}{2}\right]^{2s}$$

Dengan mengingat fungsi Bessel diperoleh :

$$Jn(x) = \frac{\left[\frac{x}{2}\right]^n}{\Gamma(1/2)\, \Gamma(n+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-1/2} e^{ixt}\, dt \quad (2\text{-}8\text{-}2)$$

Karena exp(ixt) = cos (xt) + isin (xt) dan mengingat fungsi-fungsi cos dan sin berturut-turut merupakan fungsi-fungsi genap dan ganjil, maka dengan substitusi t = cos θ maka

$$Jn(x) = \frac{x^n}{2^{n-1}\, \Gamma(1/2)\, \Gamma(n+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos\theta) \sin^{2n}\theta\, d\theta$$

(2-8-3)

bila dipakai subsitusi t = sin θ

$$Jn(x) = \frac{x^n}{2^{n-1}\, \Gamma(1/2)\, \Gamma(n+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta) \cos^{2n}\theta\, d\theta$$

(2-8-4)

bila n = 0

$$Jo(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta)\, d\theta$$

substitusi $x \sin \theta = t$, $\cos \theta \, d\theta = \frac{dt}{x}$

$$\cos = \sqrt{\frac{x^2-t^2}{x}}$$

$\theta = 0 \rightarrow t = 0$

$\theta = \frac{2}{\pi} \rightarrow t = x$

sehingga

$$Jo(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\cos t \, dt}{(x^2-t^2)^{1/2}}$$

$$\int_0^x \frac{\cos t \, dt}{(x^2-t^2)^{1/2}} dt = \frac{\pi}{2} Jo(x) \qquad (2\text{-}8\text{-}5)$$

2.9. Transformasi Laplace

Definisi transformasi Laplace :

Misalkan F(t) suatu fungsi dari t yang tertentu untuk t > 0, maka transformasi Laplace dari F(t) dinyatakan oleh $\mathcal{L}[F(t)]$ didefinisikan sebagai :

$$\mathcal{L}[F(t)] = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t)dt \qquad (2\text{-}9\text{-}i)$$

dimana parameter p riil.

Definisi transformasi Laplace invers :

Jika transformasi Laplace suatu fungsi F(t) adalah $\bar{f}(p)$ yaitu $\mathcal{L}[F(t)] = \bar{f}(p)$ maka F(t) disebut suatu transformasi Laplace invers dari $\bar{f}(p)$ dan secara simbolis ditulis sebagai $F(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)]$ dimana $\mathcal{L}^{-1}$ adalah invers operator transformasi Laplace.

Sebagai contoh :

$$\mathcal{L}\left[e^{-3t}\right] = \frac{1}{p+3} \quad \text{maka} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right] = e^{-3t}$$

theorema Konvolasi :

Jika $\mathcal{L}^{-1}\left[\bar{f}(p)\right] = F(t)$ dan $\mathcal{L}^{-1}\left[\bar{g}(p)\right] = G(t)$ maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\bar{f}(p)\ \bar{g}(p)\right] = \int_0^t F(u)\ G(t-u)\ du$$

Bukti :

$$\bar{f}(p)\ \bar{g}(p)] = \left\{\int_0^\infty e^{-pu}F(u)\right\}\left\{\int_0^\infty G(v)e^{-pv}dv\right\}$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-p(u+v)}F(u)\ G(v)\ dv\ du$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt}\left\{\int_0^t F(u)\ G(t-u)\ du\right\}dt$$

$$= \mathcal{L}\left[\int_0^t F(u)\ G(t-u)\ du;\ p\right]$$

terbukti.

2.10. Derivatif untuk Transformasi Laplace

Dalam penerapan theori transformasi Laplace dalam penyelesaian persamaan differensial diperlukan rumus transformasi Laplace dari fungsi derivatif.

$$\mathcal{L}\left[f'(t);\ p\right] = \left[f(t)\ e^{-pt}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)\ e^{-pt}$$

syarat perlu untuk adanya transformasi Laplace $f(t)$ bahwa :

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\ e^{-pt} = 0$$

maka jika diasumsikan bahwa $f(t)$ kontinye untuk $t > 0$

maka rumus tersebut equivalen dengan :

$$\mathcal{L}\left[f'(t);\ p \right] = p\ \bar{f}(p) - f(0)$$

Jika proses ini diulang akan diperoleh :

$$\mathcal{L}\left[f''(t);\ p \right] = p^2\ \bar{f}(p) - p\ f(0) - f'(0)$$

sehingga jika n bilangan positif bulat maka didapat :

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t);\ p \right]$$

$$= p^n \cdot \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Jika diambil :

$$f^{(r)}(0) = 0 \quad ,(r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

maka

$$\mathcal{L}\left[f^{n}(t);\ p \right] = p^n\ \bar{f}(p)$$

dalam pengertian operator $\dfrac{d^n}{dt^n}$ dalam transformasi Laplace menjadi p^n.

2.11. Persamaan Intergral

Transformasi Laplace digunakan untuk menyelesaikan persamaan integral dari bentuk volterra yang mana K(x,t) adalah fungsi t-x.

Sebagai contoh :

$$\int_0^t f(x)\ k(t-x)\ dx = g(t) \quad ,(t > 0) \quad ,g(0) = 0$$

dengan menggunakan transformasi Laplace pada kedua sisi dan dengan menggunakan theorema konvolasi didapat :

$\bar{f}(p)\ \bar{k}(p) = \bar{g}(p)$

$\bar{f}(p) = \bar{g}(p)/\bar{k}(p)$

dapat juga ditulis dalam bentuk :

$$\bar{f}(p) = p\ \bar{g}(p)\ \bar{L}(p) \qquad (2\text{-}10\text{-}1)$$

Untuk menunjukkan transformasi Laplace dari fungsi $f(x)$ yang tidak diketahui dalam syarat $\bar{g}(p)$ dan

$$\bar{L}(p) = \left[\ p\ \bar{k}(p)\ \right]^{-1} \qquad (2\text{-}10\text{-}2)$$

dengan menggunakan transformasi Laplace invers jika $L(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\left\{p\ \bar{k}(p)\right\}^{-1};\ x\right]$ ada maka dengan theorema konvolasi pada transformasi Laplace pada persamaan :

$$\bar{f}(p) = p\ \bar{g}(p)\ \bar{L}(p)$$

didapat penyelesaian dari integral di atas dalam bentuk :

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x g(t)\ L(x-t)dt \qquad (2\text{-}10\text{-}3)$$

Jika $k(x) = x^{-\alpha}$,$0 < \alpha < 1$ (2-10-4)

$$\mathcal{L}\ [k(x);\ p] = \int_0^\infty e^{-px}\ x^{-\alpha}\ dx$$

$$k(p) = \int_0^\infty e^{-u}\ p^{\alpha-1}\ u^{-\alpha}\ du$$

$$= p^{\alpha-1}\ \Gamma(1-\alpha) \qquad (2\text{-}10\text{-}5)$$

Karena :

$$\bar{L}\ (p) = \left[\ p\ \bar{k}(p)\ \right]^{-1}$$

$$= \left[\ p\ p^{\alpha-1}\ \Gamma(1-\alpha)\right]^{-1}$$

$$= \frac{p^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \qquad (2\text{-}10\text{-}6)$$

Sehingga :

$$L(x) = \mathcal{L}\left[\{p\,\bar{k}(p)\}^{-1};\ x\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\mathcal{L}^{-1}\left[p^{-\alpha};\ x\right] = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}$$

hal ini karena $\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$

$$= \pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\,X^{\alpha-1} \qquad (2\text{-}10\text{-}7)$$

$$L(x-t) = \pi^{-1}\sin(\alpha\pi)(x-t)^{\alpha-1} \qquad (2\text{-}10\text{-}8)$$

maka

$$f(x) = \pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\,\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt \qquad (2\text{-}10\text{-}9)$$

sebagai contoh :

$$\int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha}}\,dx = g(t) \quad ;t > 0 \quad ,0 < \alpha < 1 \quad ,g(0) = 0$$

maka

$$f(x) = \pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\,\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt \qquad (2\text{-}10\text{-}9)$$

demikian juga untuk persamaan integral :

$$\int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha}}\,dx = g(t) \quad ,t > a \quad ,0 < \alpha < 1 \quad ,g(a) = 0$$

dapat juga ditulis :

$$\int_0^t \frac{f(u+a)}{(t-u)^{\alpha}}\,du = g(t+a)$$

yang mana penyelesaiannya :

$$f(u+a) = \pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\,\frac{d}{du}\int_0^u \frac{g(t+a)}{(u-t)^{1-\alpha}}\,dt$$

dengan cara yang sama dapat diperlihatkan :

$$\int_t^b \frac{f(x)}{(x-t)^\alpha}\,dx = g(t) \qquad ,0 < t < b$$

$$0 < \alpha < 1 \quad ,g(b) = 0$$

mempunyai penyelesaian :

$$f(x) = -\pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{g(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt$$

sekarang pandang persamaan integral :

$$\int_a^t \frac{f(x)\,dx}{[\,\phi(t)-\phi(x)\,]^\alpha} = g(t) \quad ,a<t<b \quad ,0<\alpha<1 \qquad (2\text{-}10\text{-}10)$$

$$\int_t^b \frac{f(x)\,dx}{[\,\phi(x)-\phi(t)\,]^\alpha} = g(t) \quad ,a<t<b \quad ,0<\alpha<1 \qquad (2\text{-}10\text{-}11)$$

yang mana $\phi(t)$ selalu monoton naik dan dapat terdifferensial pada $a<t<b$ dan $\phi'(t) \neq 0$ dalam interval tersebut.

Dengan proses yang sama akan didapat penyelesaian dari persamaan (2-10-10) dan (2-10-11) berturut-turut

$$f(x) = \pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{g(t)\,d\phi(t)}{[\phi(x)-\phi(t)]^{1-\alpha}} \qquad (2\text{-}10\text{-}12)$$

dan

$$f(x) = -\pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{g(t)\,d\phi(t)}{[\phi(t)-\phi(x)]^{1-\alpha}} \qquad (2\text{-}10\text{-}13)$$

dengan jalan yang sama, jika diambil $a = 0$, $b = \sim$, $\phi(t) = t^2$; $\phi(x) = x^2$ dan $\alpha = \frac{1}{2}$ maka persamaan :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \frac{f(x)\,dx}{(t^2-x^2)^{1/2}} = g(t)$$

mempunyai penyelesaian :

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{2}{\pi}\ \frac{d}{dx} \int_0^t \frac{t\ g(t)\ \ dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} = \qquad (2\text{-}10\text{-}14)$$

demikian juga persamaan :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_t^{\sim} \frac{f(x)\ \ dx}{(x^2 - t^2)^{1/2}} = g(t) \qquad (2\text{-}10\text{-}15)$$

mempunyai penyelesaian :

$$f(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{d}{dx} \int_x^{\sim} \frac{t\ g(t)\ \ dt}{(t^2 - x^2)^{1/2}} \qquad (2\text{-}10\text{-}16)$$

2.12. Integral Double

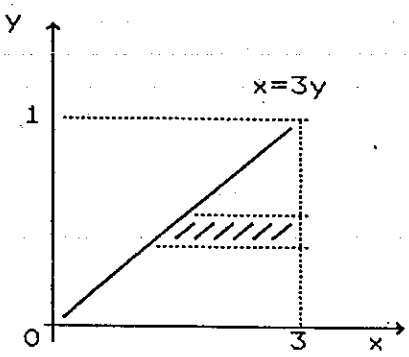
Pandang persamaan integral :

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\ dx\ dy$$

Daerah integrasi R dibatasi oleh garis-garis $x = 3y$, $x = 3$ dan $y = 0$, $y = 1$

untuk membentuk urutan integrasi, mula-mula integrasi terhadap y dari $y = 0$ sampai $y = x/3$, kemudian terhadap $x = 0$ sampai $x = 3$

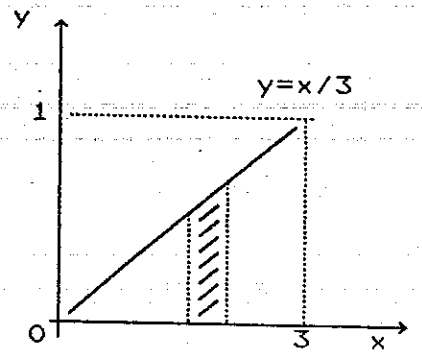
atau secara visual dapat dinyatakan sebagai berikut :



gambar di samping menggambarkan batas integral dari persamaan :

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\ dx\ dy$$

sekarang urutan integrasi akan dibalik sehingga :



gambar di samping menggambarkan batas integral dari persamaan :

$$\int_0^3 e^{x^2} \int_0^{x/3} dy\, dx$$

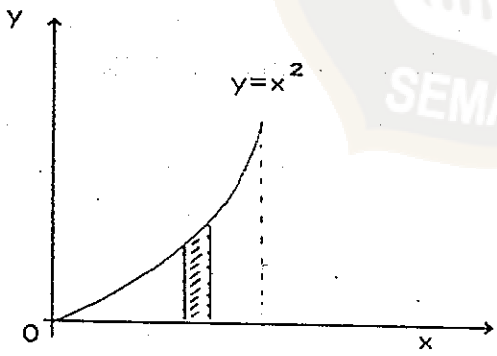
sehingga dapat disimpulkan :

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^3 e^{x^2} \int_0^{x/3} dy\, dx$$

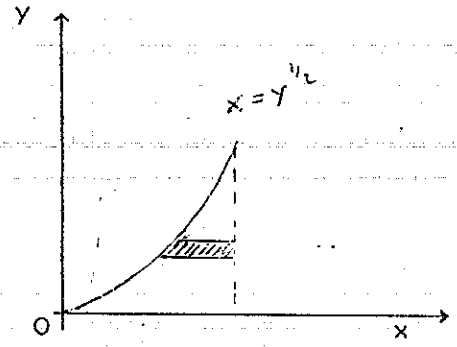
sekarang pandang persamaan integral :

$$\int_0^1 x \int_0^{x^2} e^y\, dy\, dx$$

dengan batas integral dapat digambarkan sebagai berikut :



Jika urutan integrasi dibalik maka batas integral menjadi :



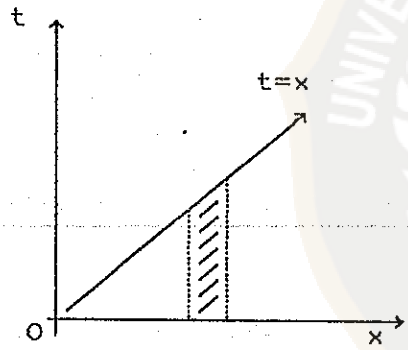
sehingga persamaan integral adalah :

$$\int_0^1 e^y \int_{y^{1/2}}^1 x \, dx \, dy$$

maka dapat disimpulkan :

$$\int_0^1 x \int_0^{x^2} e^y \, dy \, dx = \int_0^1 e^y \int_{y^{1/2}}^1 x \, dx \, dy$$

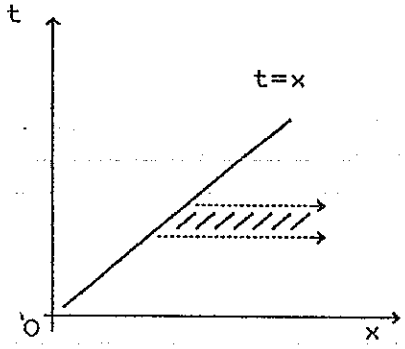
secara umum :



Gambar disamping menggambarkan batas integral persamaan :

$$\int_0^{\sim} k(\varphi, x) \int_0^x \frac{f(t)\, dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \, dx$$

Jika urutan integrasi dibalik maka :



sehingga batas integral persamaan integrasi di atas adalah :

$$\int_0^{\sim} f(t) \int_t^{\sim} \frac{k(\varphi, x)\, dx}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \, dt$$

sehingga akan didapat :

$$\int_0^{\sim} k(\varphi,x) \int_0^{x} \frac{f(t)\ dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}}\ dx = \int_0^{\sim} f(t) \int_t^{\sim} \frac{k(\varphi,x)\ dx}{(x^2 - t^2)^{1/2}}\ dt$$

(2-11-1)

Dengan cara yang sama akan didapat :

$$\int_0^{\sim} k(\varphi,x) \int_x^{\sim} \frac{f(t)\ dt}{(t^2 - x^2)}\ dx = \int_0^{\sim} f(t) \int_0^{t} \frac{k(\varphi,x)\ dx}{(t^2 - x^2)^{1/2}}\ dt$$

(2-11-2)