BAB. II

2.1. DIFFERENSIAL

DEFINISI : 1

Fungsi f(x) diferensiabel pada x jika :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ ada dan

merupakan derivatif f pada x

$$\frac{df(x)}{dx} = f^{1}(x)$$

DEFINISI : 2

Fungsi f(x,y) diferensiabel pada y jika :

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$ ada dan sama dengan $\frac{\partial f}{\partial y}$

juga diferensiabel pada x jika :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$$ ada dan sama dengan $\frac{\partial f}{\partial x}$

Selanjutnya

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x,y) - f'(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'(x,y+\Delta y) - f'(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

2.2. HIMPUNAN

DEFINISI : 3

Himpunan adalah koleksi dari objek-objek yang terdefinisikan dengan baik. Objek-objek tersebut dinamakan anggota dari himpunan tersebut.

NOTASI :

Himpunan dinyatakan dengan huruf besar dan anggotanya ditulis di dalam tanda kurung kurawal serta masing-masing anggota dipisahkan dengan tanda koma, misalnya : $A = \{a, b\}$

DEFINISI : 4

Gabungan(union) dari himpunan A dan B ditulis sebagai
$A \cup B = \{ x \in A \text{ atau } x \in B \}$

DEFINISI : 5

Irisan dari himpunan A dan B ditulis sebagai
$A \cap B = \{ x \in A \text{ dan } x \in B \}$

Ruang Euclide bidang n ditulis sebagai E^n

NOTASI :

Jika sebuah fungsi u mempunyai derivatif order n pada sebuah himpunan X ditulis sebagai $u \in C^n(X)$

2.3. KONTINU UNIFORM, DERET TAYLOR, & KONVERGEN

Pandang himpunan X yang tidak kosong dan fungsi d yang bernilai real non negatif.

DEFINISI : 6

Ruang metrik (x,d) adalah untuk sebarang titik x & y di dalam X memenuhi :

a). $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0$ jhj $x=y$

b). $d(x,y) = d(y,x)$

c). $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, untuk sebarang titik $z \in X$

DEFINISI : 7

Suatu barisan S_n di dalam ruang metrik (X,d) di-anggota dari himpunan tersebut.

NOTASI :

Himpunan dinyatakan dengan huruf besar dan anggotanya ditulis di dalam tanda kurung kurawal serta masing-masing anggota dipisahkan dengan tanda koma, misalnya : $A = \{a, b\}$

DEFINISI : 4

Gabungan(union) dari himpunan A dan B ditulis sebagai $A \cup B = \{ x \in A \text{ atau } x \in B \}$

DEFINISI : 5

Irisan dari himpunan A dan B ditulis sebagai $A \cap B = \{ x \in A \text{ dan } x \in B \}$

Ruang Euclide bidang n ditulis sebagai E^n

NOTASI :

Jika sebuah fungsi u mempunyai derivatif order n pada sebuah himpunan X ditulis sebagai $u \in C^n(X)$

2.3. KONTINU UNIFORM, DERET TAYLOR, & KONVERGEN

Pandang himpunan X yang tidak kosong dan fungsi d yang bernilai real non negatif.

DEFINISI : 6

Ruang metrik (x,d) adalah untuk sebarang titik x & y di dalam X memenuhi :

a). $d(x,y) \geqslant 0$, $d(x,y) = 0$ jhj $x=y$

b). $d(x,y) = d(y,x)$

c). $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, untuk sebarang titik $z \in X$

DEFINISI : 7

Suatu barisan S_n di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan konvergen, jika terdapat suatu titik $s \in X$ dengan sifat : Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif p sedemikian hingga untuk semua $n \geq p$ berlaku $d(S_n,s) < \varepsilon$

DEFINISI : 8

Deret Taylor pada fungsi f(x+h,y) disekitar titik (x,y) didefinisikan sebagai :

$$f(x+h,y) = f(x,y) + h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \ldots$$

sedang untuk f(x,y+h) di sekitar titik (x,y) adalah

$$f(x,y+h) = f(x,y) + h\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + \ldots$$

DEFINISA : 9

Fungsi f dari ruang metrik(X,d_1) ke dalam (Y,d_2) Fungsi f dikatakan kontinu seragam pada X ,jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga untuk semua p dan q di dalam X dengan $d_1(p,q) < \delta$ berlaku

$$d_2(f(p),f(q)) < \varepsilon$$

2.4. MATRIKS,DETERMINAN

DEFINISI : 10

Matriks adalah suatu tabel bilangan yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang.

Suatu matriks dapat dinyatakan dengan menggunakan huruf besar seperti $P = (p_{ij})$ dengan p_{ij} merupakan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j

Pandang matriks dibawah ini:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} = P$$

dengan $(p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in})$ merupakan baris ke-i dari matriks P dan

$$\begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$$

merupakan kolom ke-j dari matriks P

DEFINISI : 11

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks dengan m baris dan n kolom, jika jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya (m=n)

DEFINISI : 12

Matriks Identitas adalah suatu matriks dengan elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j untuk :

$i = j$, elemennya = 1

$i \neq j$, elemennya = 0

DEFINISI : 13

Jika matriks P berukuran $m \times n$, Q matriks berukuran $s \times t$ maka perkalian P dan Q dapat dilakukan jhj n=s

DEFINISI : 14

Matriks Transpose adalah matriks baru yang diperoleh dari suatu matriks, misal P, dengan menukar baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Notasi : P^t

Pandang matriks P dengan P^t

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad \text{dan } P^t = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

DEFINISI : 15

Determinan adalah tabel bilangan yang diatur oleh baris dan kolom yang berbentuk bujur sangkar dan mempunyai harga numerik.

Notasi

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} = |P|$$

DEFINISI : 16

Determinan minor $|M_{ij}|$ adalah determinan mula-mula dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j

DEFINISI : 17

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} \; |M_{ij}|$$

dengan K_{ij} = kofaktor

M_{ij} = determinan minor

DEFINISI : 18

DEFINISI : 18

Matriks kofaktor dari P adalah matriks baru yang terjadi di mana elemen-elemennya merupakan kofaktor dari P_{ij} dalam matriks P

Notasi : matriks kofaktor dari P adalah

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

DEFINISI : 19

Matriks yang mempunyai harga determinan tidak sama dengan nol disebut matriks non singular dan matriks tersebut mempunyai invers.

DEFINISI : 20

Adjoint suatu matriks P adalah transpose matriks kofaktor P dan ditulis sebagai = Adj P

DEFINISI : 21

Harga determinan dari matriks bujur sangkar P adalah

$$\begin{aligned} |P| &= \sum_{i=1}^{n} p_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}| \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_{ij} K_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_{ij} (-1)^{i+j}|M_{ij}| \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_{ij} K_{ij} \end{aligned}$$

DEFINISI : 22

Bila P adalah matriks bujur sangkar dan $|P| \neq 0$ maka matriks inversnya adalah

$$P^{-1} = \frac{\text{Adjoin } P}{|P|}$$

2.5 ATURAN CRAMER

Pandang persamaan

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Dari persamaan di atas bisa dibentuk menjadi $AX = B$ dengan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Teorema : 1

Jika $AX = B$ maka $X_k = \dfrac{D_k}{D}$

$D = \det A = A = 0$

D_k = det A dengan menggantielemen kolom ke-k dengan harga persamaan $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

X_k = variabel dengan urutan ke-k

Bukti :

$$A X = B$$

$$A^{-1} A X = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B$$

Menurut definisi $A^{-1} = \dfrac{\text{Adjoint } A}{A}$, maka

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1k} & k_{2k} & \cdots & k_{nk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} k_{11}b_1 + k_{21}b_2 + \cdots + k_{n1}b_n \\ k_{12}b_1 + k_{22}b_2 + \cdots + k_{n2}b_n \\ \vdots \\ k_{1k}b_1 + k_{2k}b_2 + \cdots + k_{nk}b_n \\ \vdots \\ k_{1n}b_1 + k_{2n}b_2 + \cdots + k_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

$$X_k = k_{1k}b_1 + k_{2k}b_2 + \cdots + k_{nk}b_n$$

$k = 1,2,3,\ldots,n$

menurut definisi , $A = a_{ij}K_{ij}$

$$= a_{1k}K_{1k} + a_{2k}K_{2k} + \ldots + a_{nk}K_{nk}$$

maka $(b_1K_{1k} + b_2K_{2k} + \ldots + b_nK_{nk}) = A$,dengan mengganti elemen kolom ke-k $(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$ dengan matriks B yaitu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dan diberi simbul D_k.

$$X_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

dengan

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$X_k = \dfrac{D_k}{D}$, terbukti teorema.

DEFINISI 2_2':

Fungsi $U(x,y)$ kontinu di titik (x_0,y_0) apabila

1) $U(x_0,y_0)$ ada

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} U(x,y) = U(x_0,y_0)$